

Algebrai törtek

Algebrai törtek értelmezési tartományának vizsgálata:

A törtek nevezőjében szereplő kifejezések értéke nem lehet 0, mert a 0 – val való osztást nem értelmezzük. Amennyiben a nevezőben bonyolultabb kifejezés szerepel, akkor célszerű (ha lehet) azt szorzattá alakítani. Mivel egy szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért ezt követően a szorzat tényezői nem lehetnek egyenlők 0 - val.

Példa:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Algebrai törtek egyszerűsítése:

Először (ha lehet) alakítsuk szorzattá a számlálóban és nevezőben álló kifejezést. Ezután a számlálóban és nevezőben megjelenő közös tényezőkkel egyszerűsítsük a törtet.

Megjegyzés:

Az értelmezési tartomány vizsgálatát mindig az egyszerűsítés előtt kell végrehajtanunk, mert az egyszerűsítés után bővíthet az alaphalmaz.

Példa:

$$\frac{x-1}{x^2-1} \rightarrow \text{Egyszerűsítés előtt: } x^2-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \text{ és } x \neq -1$$

$$\rightarrow \text{Egyszerűsítés után: } x \neq 1$$

Műveletek algebrai törtekkel:

- **Összeadás, kivonás:** A műveletek elvégzéséhez először közös nevezőre kell hoznunk a törteket, amihez a nevezők legkisebb közös többszörösét célszerű választanunk. A közös nevező meghatározásához célszerű (ha lehet) szorzattá alakítanunk a nevezőket. A közös nevező megállapítása után a törteket bővítjük úgy, hogy a nevezőjük a közös nevező legyen: amennyivel szorozzuk a nevezőt, annyival szorozzuk a számlálót is. Végül vonjuk össze a törteket, s a kapott törtet hozzuk a legegyszerűbb alakra.
- **Szorzás, osztás:** Először az osztást át kell írunk szorzássá: az osztó reciprokával szorzunk. Ezután a nevezőben és számlálóban álló kifejezést (ha lehet) alakítsuk szorzattá. Végül a szorzások elvégzése előtt, egyszerűsítsünk a megfelelő tényezőkkel.

Megjegyzés:

- *Összevonáskor ügyelnünk kell a következőre: a törtvonás zárójelet helyettesít, ha a tört előtt negatív előjel áll, akkor a számlálóban levő kifejezést zárójelbe kell tennünk.*
- *Abban az esetben, ha a tagok különbségére lenne szükségünk a közös nevezőhöz, de a törtek nevezőjében fordított sorrendben állnak a tagok, akkor ki kell emelnünk az egyik nevezőből (-1) -et. Ezt követően, ha a (-1) -szeres szorzót el szeretnénk hagyni a nevezőből, akkor meg kell változtatnunk a tört előjelét.*

Példa:

$$\frac{2}{x-y} = \frac{2}{-(y-x)} = -\frac{2}{y-x}$$

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\frac{x}{a-5}$$

$$\frac{2}{x-3y}$$

$$\frac{2a+4}{5}$$

$$\frac{-13}{x^2+16}$$

$$\frac{-5}{7a^8}$$

$$\frac{3}{13x^3y^4z}$$

$$\frac{45}{(a-7) \cdot (a+10)}$$

$$-\frac{6x+2}{7x} + \frac{1-x}{2x+5} - \frac{x+3}{3+2x}$$

2. (K) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\frac{x-3}{x+3}$$

$$\frac{3a-5}{2}$$

$$\frac{21}{2x+y}$$

$$\frac{19}{a^2+64}$$

$$\frac{3}{4a^2}$$

$$\frac{-7}{11x^5y^2z^6}$$

$$\frac{5x+2}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

$$\frac{2a}{a-3} + \frac{3a+1}{2a+3} - \frac{2}{5a-7}$$

3. (K) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\frac{5}{x^2-49}$$

$$\frac{-1}{a^2-100}$$

$$\frac{3}{x^2-9}$$

$$\frac{19x}{81-4a^2}$$

$$\frac{26}{a^2-4a+4}$$

$$\frac{123}{x^2+10x+25}$$

$$\frac{-31}{16a^2-88ab+121b^2}$$

$$\frac{8}{64x^2+48xy+9y^2}$$

4. (K) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\frac{2}{x^2-144}$$

$$\frac{7}{a^2-4}$$

$$\frac{-23a}{196-x^2}$$

$$\frac{1}{25a^2-169}$$

$$\frac{987}{a^2+2a+1}$$

$$\frac{-47}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{11}{4x^2+28xy+49y^2}$$

$$\frac{17}{9a^2-30ab+25b^2}$$

5. (E) Határozd meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\frac{87}{a^3b-a^2b}$$

$$\frac{-19}{4x^2y+6xy^2}$$

$$\frac{2x}{ab-5a+2b-10}$$

$$\frac{-6}{8x+21y-12xy-14}$$

$$\frac{-101}{2x^2y+4xy}$$

$$\frac{45}{7a^5b^4-7a^2b^3}$$

$$\frac{-4a}{9x-18+xy-2y}$$

$$\frac{8}{3a-5b-12a^2+20ab}$$

6. (K) Egyszerűsítsd a következő törtet a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{-2a}{4b}$$

$$\frac{3x^7}{8x^5}$$

$$\frac{35a^9}{7a^4}$$

$$\frac{2abc}{3ac}$$

$$\frac{6a^3b^5}{2a^2b}$$

$$\frac{13xy}{-26x^2y}$$

$$\frac{3x^5y^3}{15x^3y^2}$$

$$\frac{12x^2y^3z}{16xy^2z^3}$$

$$\frac{143a^4b^8c^5}{66a^5b^2c^3}$$

7. (K) Egyszerűsítsd a következő törtet a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{6a}{9b}$$

$$\frac{-8x^9}{7x^3}$$

$$\frac{10a^2}{2a}$$

$$\frac{11xyz}{10xzw}$$

$$\frac{17x^3y^2}{34xy^4}$$

$$\frac{-48a^2b}{12ab^2}$$

$$\frac{162x^4y^6}{135x^5y^5}$$

$$\frac{3a^8b^{10}c}{12a^8b^9c^3}$$

$$\frac{56a^{-3}b^5}{8a^{11}b^{-8}}$$

8. (K) Egyszerűsítsd a következő törtet a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(a-b)^2}{3 \cdot (a-b)^3}$$

$$\frac{(x+y)^2}{x+y}$$

$$\frac{3a \cdot (c-d)}{2b \cdot (d-c)}$$

$$\frac{x-y}{(y-x)^2}$$

$$\frac{5d \cdot (b-c)}{15a \cdot (c-b)}$$

$$\frac{(x-2)^2}{x-2}$$

$$\frac{(x+5)^2}{5+x}$$

$$\frac{72a \cdot (5b-6c)}{8d \cdot (6c-5b)}$$

$$\frac{(x-3) \cdot (x+2)}{(x-3)^2}$$

9. (K) Egyszerűsítsd a következő törtet a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x-3}{3-x}$$

$$\frac{5a}{5a+15b}$$

$$\frac{x^2+4x}{3x}$$

$$\frac{2a-4}{3a-6}$$

$$\frac{0,5+x}{2x+1}$$

$$\frac{3x+9}{2x+6}$$

$$\frac{5xy+15x}{6y+18}$$

$$\frac{3a-2b}{-10b+15a}$$

$$\frac{30x^2+10x^4}{5x^3+15x}$$

10. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^2b^2 - a^2b^3}{a^4b^2}$$

$$\frac{8x^2y^2 + 2xy}{4x^2y}$$

$$\frac{ab^3}{a^2b - ab^2}$$

$$\frac{xy + xz + xw}{y + z + w}$$

$$\frac{x + y + 5}{2xz + 2yz + 10z}$$

$$\frac{2a - b + 4}{5bc - 10ac - 20c}$$

$$\frac{7cd^3 \cdot (2a - 3b)}{14cd \cdot (3b - 2a)}$$

$$\frac{6ab + 12a^2}{(b + 2a)^2}$$

$$\frac{(x - 5y)^2}{15xy - 3x^2}$$

11. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{ac - bc}{ac + bc}$$

$$\frac{5xy - 5yz}{15zw - 15xw}$$

$$\frac{ac + bc}{c^2 + cd}$$

$$\frac{3a^2 - ab}{b^2 - 3ab}$$

$$\frac{x + xy + x^2}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{x^2 - 2xy}{2y^2 - xy}$$

$$\frac{12x^2y^2 + 20xy^3}{6x^2y + 10xy^2}$$

$$\frac{14acd^3 - 21bcd^3}{52bcd - 28acd}$$

$$\frac{2a^2c^2 - 8ab^2c}{a^4c^2 - 4a^3b^2c}$$

12. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{a - 12}{a^2 - 144}$$

$$\frac{x - y}{y^2 - 2xy + x^2}$$

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{a^2 - 4}{2 - a}$$

$$\frac{7 + x}{x^2 + 14x + 49}$$

$$\frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{x^8 - y^8}{x^4 + y^4}$$

$$\frac{25a^4 + 30a^2 + 9}{5a^2 + 3}$$

13. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$$

$$\frac{x^2 - 36}{x - 6}$$

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$$

$$\frac{a^2 - 49}{a + 7}$$

$$\frac{13 - x}{x^2 - 169}$$

$$\frac{x^2 - 10x + 25}{5 - x}$$

$$\frac{(x + y)^3 \cdot (x - y)}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x^6 - y^6}$$

$$\frac{2a^3 - 9}{4a^6 - 36a^3 + 81}$$

14. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^2 + 4a}{a^2 - 16}$$

$$\frac{x - x^2}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 10x + 25}$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{3x - 9}{x^2 - 9}$$

$$\frac{a^2 + 4a + 4}{3a + 6}$$

$$\frac{a^2 - 81}{5a + 45}$$

$$\frac{4x^3y + 4xy^3}{x^4 - y^4}$$

$$\frac{x^2 - 16x + 64}{7x^2 - 56x}$$

15. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 4x}$$

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + a}$$

$$\frac{5x - 35}{x^2 - 14x + 49}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{ab - a^2}$$

$$\frac{6x + 36}{x^2 - 36}$$

$$\frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\frac{3a^3 - 2a^2}{9a^2 - 4}$$

$$\frac{x^6 - y^6}{9x^4y - 9xy^4}$$

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{8x^2 + 32x}$$

16. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 16}$$

$$\frac{a^2 - 10a}{a^2 - 20a + 100}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}$$

$$\frac{9a^2 + 30a + 25}{9a^2 - 25}$$

$$\frac{36x^2 - 49}{36x^2 - 84x + 49}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 4x^2}$$

17. (K) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$\frac{x^2 - 16x + 64}{x^2 - 64}$$

$$\frac{a^2 - 36}{a^2 + 12a + 36}$$

$$\frac{x^2 + 18x + 81}{x^2 - 81}$$

$$\frac{25 - x^2}{x^2 + 10x + 25}$$

$$\frac{a^4 - 1}{a^4 - 2a^2 + 1}$$

$$\frac{49a^2 - 16}{49a^2 - 56a + 16}$$

$$\frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$$

18. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(x-1)^2 - (2x+1) \cdot (2x-1) + 3x^2}{x-1}$$

$$\frac{(3a-1) \cdot (2a+1)^2 - 3a \cdot (2a+3)^2 + 1}{-28a}$$

$$\frac{(2x+1)^2 - (3x-1) \cdot (3x+1) + 5x^2}{2x+1}$$

$$\frac{(4a+b) \cdot (4a-b) - (3a+2b)^2 + 5b^2}{7a-12b}$$

$$\frac{(x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) + y^3 - x^2}{y-1}$$

$$\frac{(5-a)^2 - (a+5)^2 - (a-5) \cdot (a+5) + a \cdot (a+20)}{25a}$$

19. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{3a^2 - 3}{7a + 7}$$

$$\frac{y - x^2y}{x + 1}$$

$$\frac{2ac - 4bc}{a^3c - 4ab^2c}$$

$$\frac{a^2b - ab^2}{5a^2 - 5b^2}$$

$$\frac{5a^2 - 45}{a^2 - 6a + 9}$$

$$\frac{x + 2y}{3x^2 + 12xy + 12y^2}$$

$$\frac{5y - 3x}{18x^2 - 60xy + 50y^2}$$

$$\frac{18a^2 + 12a + 2}{15ab + 5b}$$

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{3x^4 - 3y^4}$$

20. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{5x - 5y}{10x^2 - 10y^2}$$

$$\frac{6a^2 - 6b^2}{9a^2 - 18ab + 9b^2}$$

$$\frac{6x^2 - 12xy + 6y^2}{3x^2 - 3y^2}$$

$$\frac{5a^2 - 5ab}{5a^2 + 10ab + 5b^2}$$

$$\frac{(a+b)^3}{3a^2 + 6ab + 3b^2}$$

$$\frac{2x^3y - 2xy^3}{4x^2 + 8xy + 4y^2}$$

$$\frac{ab^2 + 2ab + a}{b^3 - b}$$

$$\frac{45x^2 - 20y^2}{18x^2 - 24xy + 8y^2}$$

$$\frac{4x^4 - 4y^4}{12x^2 + 12y^2}$$

21. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{15a + 30}{5a^2 - 20}$$

$$\frac{12x^2 - 48}{9x^2 - 36x + 36}$$

$$\frac{3a^2 - 27b^2}{5a^2 + 30ab + 45b^2}$$

$$\frac{3x^2 - 12}{x^2 - 2x}$$

$$\frac{3a^2 - 30a + 75}{4a^2 - 100}$$

$$\frac{9x^2 + 18xy + 9y^2}{12x^2 - 12y^2}$$

$$\frac{b^2a^4 - 16b^2}{5a^3 + 20a}$$

$$\frac{2x^2 + 24x + 72}{4x^2 - 144}$$

$$\frac{2x^2 - 4xy + 2y^2}{6x^2 - 6y^2}$$

22. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{3a+6}{a^3+8}$$

$$\frac{x^4-y^4}{x^3-y^3}$$

$$\frac{4a^2-4b^2}{6b^3+6a^3}$$

$$\frac{a^3+1}{6a^2+12a+6}$$

$$\frac{9-3x+x^2}{x^3+27}$$

$$\frac{4x-20}{x^3-125}$$

$$\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$$

$$\frac{x^3-9x^2+27x-27}{x^2-9}$$

$$\frac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}$$

23. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3+64}{7x+28}$$

$$\frac{a^4-81}{a^3-27}$$

$$\frac{15x^3-15y^3}{5x^2-5y^2}$$

$$\frac{x^3-8}{x^3+2x^2+4x}$$

$$\frac{a^3+1000}{9a^2-90a+900}$$

$$\frac{a^2+a+1}{a^3-1}$$

$$\frac{18x^2+36x+18}{9x^3+9}$$

$$\frac{a^6-b^6}{a^4-b^4}$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^2-a-b^2-b}$$

24. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{5x-5y+xz-yz}{4z+20}$$

$$\frac{4a-4b-ab^2+b^3}{(b+2) \cdot (b-a)}$$

$$\frac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}$$

$$\frac{x^4-x^3-4x^2+4x}{2x-x^2}$$

$$\frac{x^2-xy-xz+yz}{x^2-2xz+z^2}$$

$$\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}$$

$$\frac{xz-yw+xw-yz}{yz+yw}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab-ac-bc}$$

$$\frac{6ab+3+2b+9a}{2ab-2b+3a-3}$$

25. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3+8x+x^2y+8y}{x+y}$$

$$\frac{ac+bc-ad-bd}{7c-7d}$$

$$\frac{8a-4-2a^2+a}{(a-4)^2}$$

$$\frac{b^2-10b+25}{ab-5a+2b-10}$$

$$\frac{8xy-6y-3+4x}{16x^2-9}$$

$$\frac{2a^2-4a+2}{a^3-a^2-a+1}$$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{xy+x^2-3x-3y}$$

$$\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}$$

$$\frac{6ab+9a+8b+12}{3ab+15a+4b+20}$$

26. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 16}$$

$$\frac{a^2 + 10a + 25}{a^2 - 4a - 45}$$

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 40}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\frac{x^2 - x - 42}{x^2 + 2x - 24}$$

$$\frac{a^2 + 4a - 32}{a^2 - 11a + 28}$$

$$\frac{6a^2 - 2a - 20}{3a^2 + 11a + 10}$$

$$\frac{2x^2 - xy - 3y^2}{4x^2 - 12xy + 9y^2}$$

$$\frac{-a^2 + 2a + 11,25}{-a^2 + 7a - 11,25}$$

27. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 4a + 4}$$

$$\frac{x^2 - 36}{x^2 - x - 30}$$

$$\frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 + 4a + 3}$$

$$\frac{x^2 - 5x - 24}{x^2 - 12x + 32}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 48}{x^2 - 14x + 48}$$

$$\frac{2x^2 - x - 15}{4x^2 + 20x + 25}$$

$$\frac{3a^2 + 23a - 8}{5a^2 + 42a + 16}$$

$$\frac{-2s^2 + 5s + 3}{-2s^2 + s + 1}$$

28. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$$

$$\frac{a^2b + 8ab + 7b}{ab - 2a + 7b - 14}$$

$$\frac{(x + y)^2 - z^2}{x + y + z}$$

$$\frac{4 - a^2 - 2ab - b^2}{2 + a + b}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy - z^2}{x^2 + z^2 + 2xz - y^2}$$

$$\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac}$$

$$\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$$

$$\frac{10a^2 + 20ab + 10b^2}{15a^4 - 15b^4}$$

$$\frac{x^5 + x^4y - 2x^3y^2}{3x^3 + 5x^2y - 2xy^2}$$

29. (E) Egyszerűsítsd a következő törteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{6a^3 - 18a^2b + 18ab^2 - 6b^3}{4a^2 - 4b^2}$$

$$\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{3a^2 + 6ab + 3b^2}$$

$$\frac{(a - b)^3 - 3ab \cdot (a + b) + b^3}{a - 6b}$$

$$\frac{(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz) \cdot (x + y - z)}{(x + y + z) \cdot (x^2 + z^2 - 2xz - y^2)}$$

$$\frac{(a + 1) \cdot (a^8 + a^4 + 1)}{(a^4 - a^2 + 1) \cdot (a^2 + a + 1)}$$

30. (K) Határozd meg az adott és az egyszerűsítés utáni tört értelmezési tartományát!

$$\frac{5ab + 15b}{6a + 18}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{a^2 + a}{a^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$$

$$\frac{2xy \cdot (x - y) \cdot (x + y)}{4x^2 + 8xy + 4y^2}$$

$$\frac{2ac - 4bc}{a^3c - 4acb^2}$$

31. (K) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!
(Az eredményeket pozitív hatványkitevőkkel add meg!)

$$\frac{3a}{4b^2} \cdot 10ab$$

$$\frac{10xy}{3z^2} : 6xz$$

$$\frac{12cd^5}{7ab} \cdot \frac{21a^2b^3}{32c^2d^3}$$

$$\frac{15ab^2}{4c^2d^3} \cdot \frac{12cd}{25a^2b}$$

$$\frac{45y^3}{14x^2} : \left(-\frac{18y^2}{49x^4}\right)$$

$$\frac{17a^3b^2}{50c^4d^2} \cdot \frac{10c^3d}{34a^2b}$$

$$\frac{5c^2d^4}{6ab^3} \cdot \frac{9a^2b^2}{15cd}$$

$$\frac{8x^3z^4}{15y^6} \cdot \frac{16x^4z^2}{25y^7}$$

$$\frac{4z^5w^2}{27x^2y^4} : \frac{32z^6w}{81xy^6}$$

32. (K) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!
(Az eredményeket pozitív hatványkitevőkkel add meg!)

$$\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6a^2}{7b^2} \cdot \frac{b^3}{a^3}$$

$$\frac{8a}{9b} : \frac{12a^7}{21b^4} \cdot \frac{15a^8}{14b^9}$$

$$\frac{9xy}{5ab} \cdot \frac{3ab}{4yz} \cdot \frac{4bz}{3axy}$$

$$\frac{2x}{7y} \cdot \frac{35x^2}{6y^2} \cdot \frac{3y^3}{5x^4}$$

$$\frac{6a^3}{5b^{-2}} \cdot \frac{10ab^8}{3a^5} : \frac{4b^{11}}{a^6}$$

$$\left(\frac{xz}{2yw} \cdot \frac{3z^2}{4y^2w}\right) : \frac{9z^3w}{8x^2y^4}$$

$$\left(\frac{3z^2d}{2a^2b^2} \cdot \frac{4xyz}{63a^2bc}\right) \cdot \frac{7abc}{8x^2y}$$

$$\left(\frac{8b^2cd}{9a^5} : \frac{7cd}{12a^3}\right) \cdot \frac{14a^2}{3b^2}$$

$$\left(\frac{2ax}{yz} : \frac{3bx}{ay}\right) : \frac{9b^2z}{8a^2xy}$$

33. (K) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!
(Az eredményeket pozitív hatványkitevőkkel add meg!)

$$\frac{(2x)^2 \cdot y}{6x^5x^7} \cdot \frac{(x^{-4})^3}{(x^2y^6)^{-9}}$$

$$\frac{(9x^2y^3)^4}{(5x^3y^4)^3} : \frac{(3xy^2)^6}{(5xy^5)^3}$$

$$\left(\frac{3a^2b}{c^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{c^3b}{a^5}\right)^2 : \frac{9b^5}{(ac^2)^3}$$

$$\left(\frac{2x^2}{5y^2}\right)^3 : \left(\frac{4x^3}{25y^4}\right)^2$$

$$\left(\frac{2a^3b^4}{c^5}\right)^6 \cdot \left(\frac{a^7b^8}{c^9}\right)^{10} : \frac{(8a^{55})^2}{b^{100}c^{90}}$$

$$\frac{(7a^2b^6)^2}{(2a^3b^4)^3} : \frac{49a^3b^4}{(4a^4b^2)^2}$$

$$\left(\frac{a^2bc^3}{x^{-2}y^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3b^{-2}c^{-2}}{x^2y^3}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2a^3b^2c^{-3}}{x^5y^{-1}}\right)^4 : \left(\frac{a^{-1}b^{-2}c^2}{4x^{-2}y^3}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{b^{-4}}{a^{-3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^{-1}}{a^4}\right)^{-5}$$

34. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{(x-2)^2}{x+2} \cdot \frac{1}{2-x}$$

$$\frac{x^2 - xy}{y^2} \cdot \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{a^2 + ab}{a} : \frac{ab + b^2}{b}$$

$$\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{3x+12}{2x-2} \cdot \frac{4x-4}{6x-12}$$

$$\frac{4a^2 - 9b^2}{a^2b^2} : \frac{2ac + 3bc}{2ab}$$

$$\frac{a-b}{4b^3} : \frac{a^2-ab}{8b^4}$$

$$\frac{8x-56}{3xy} \cdot \frac{9y+18xy}{2x-14}$$

$$\frac{20a^4 - 15a^3b}{7a^2 + 2ab} : \frac{40ab^2 - 30b^3}{14ab^3 + 4b^4}$$

35. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^2 - ab}{a^3} : \frac{a}{a - b}$$

$$\frac{a + 7}{a - 7} : \frac{(7 - a)^2}{7 + a}$$

$$\frac{8x^2 + 8xy}{y^3} : \frac{4xy}{y^4}$$

$$\frac{7x - 21}{6x + 54} : \frac{3x + 27}{5x - 15}$$

$$\frac{2a + 2b}{3a - 3b} : \frac{6a + 6b}{5a - 5b}$$

$$\frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} : \frac{x^2y + xy^2}{xy}$$

$$\frac{a^2 - ab}{a^2 + ab} : \frac{a^3b - b^3a}{a^2b + ab^2}$$

$$\frac{3x + 12}{xy} : \frac{xy - 2y}{x + 4}$$

$$\frac{x^2 + xy}{xy - y^2} : \frac{xy^2 - y^3}{x^3 + x^2y}$$

36. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$(2a - 1)^2 : \frac{1 - 2a}{4a}$$

$$\frac{2ab - a^2}{4b^2 - a^2} : \frac{6b + 3a}{a}$$

$$\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x - y} : \frac{y - x}{x^2 - 4y^2}$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{3x + 3y}{4x - 4y}$$

$$\frac{25 - x^2}{2x^2 - 10x} : \frac{20x + 4x^2}{25 + 10x + x^2}$$

$$\frac{ab - 3a}{a^2b + 2a^2} : \frac{b^2 - 4}{b^2 - 6b + 9}$$

$$\frac{x^2 + 5x}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - 25}{x^2 - 3x}$$

$$\frac{a^2 - 16}{a^2 + a} : \frac{2a^2 + 8a}{a^2 - 1}$$

$$\frac{9a^2 - 6a + 1}{9a^2 - 1} : \frac{9a^2 + 6a + 1}{3a^2 - a}$$

37. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{7}{4x^3 - 36x} : \frac{x^2 - 9}{14}$$

$$\frac{a^3 - 5a^2}{a^2 - 25} : \frac{a^3 + 5a^2}{a^2 + 10a + 25}$$

$$\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 4x + 4} : \frac{2x - 6}{x^2 - 4}$$

$$\frac{x^2 - 4x}{x + 2} : \frac{x - 2}{x^2 - 16}$$

$$\frac{a + b}{a - b} : \frac{ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{2x - 12}{2x - 5} : \frac{x^2 - 12x + 36}{4x^2 - 25}$$

$$\frac{a^2 - 4b^2}{35ab} : \frac{28a^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}$$

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 - 2x} : \frac{x^2 + 5x}{x^4 - 4x^2}$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} : \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$$

38. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{3x^2 - 12}{x^2 - 4x + 4} : \frac{x^2 - 4x}{6x^2 - 24x}$$

$$\frac{5x^2 - 20y^2}{3x + 6y} : \frac{5x - 10y}{9x}$$

$$\frac{3a^2 - 6ab}{a^2 + 4b^2} : \frac{a^4 - 16b^4}{15 \cdot (a - 2b)^2}$$

$$\frac{3a^2 - 3}{a^2 + 2a + 1} : \frac{9a}{2a + 2}$$

$$\frac{5x^2 + 100x + 500}{x^2 - 100} : \frac{4x^2 - 80x + 400}{x^2 + 10x}$$

$$\frac{3a^3 + 18a^2 + 27a}{5a + 15} : \frac{a^3 - 9a}{10a - 30}$$

$$\frac{4a^2 + 12a + 9}{2a - 3} : \frac{20a^3 - 45a}{4a^2 - 12a + 9}$$

$$\frac{16 - x^2}{16x - 8x^2 + x^3} : \frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2}{4x^3 - x^4}$$

$$\frac{a^4 - 16}{a^2 + 4a + 4} : \frac{a^4 + 4a^2}{a^3 + 2a^2}$$

39. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{4a^3b + 4ab^3}{a^4 - b^4} : \frac{8ab}{a + b}$$

$$\frac{x^4 - 1}{2x^3 + 2x} : \frac{x^2 + 2x + 1}{4x}$$

$$\frac{a^2 - 6a + 9}{5a} : (a^2 - 5a + 6)$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{2x + 2}{x - 2}$$

$$\frac{a^2 - 10a + 25}{a^2 - 3a - 10} : \frac{a - 5}{4a + 8}$$

$$\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 + 7a + 12} \cdot \frac{a^2 + 3a}{a^2 - 4a - 4}$$

$$\frac{2a^2 + a - 3}{3a^2 + 5a - 12} : \frac{2a^3 + 3a^2}{3a^2 + 2a - 8}$$

$$\frac{2x + 4}{4x - 2} : \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 4x + 3} : \frac{x^2 - 4x + 4}{5x + 15}$$

40. (E) Végezd el a törtek osztását, illetve szorzását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x^3 + 27}{8x + 6} \cdot \frac{12x + 9}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\frac{5x^2 + 10x + 5}{12x - 6} : \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{12x^2 - 12x + 3}$$

$$\frac{a^3 - 8}{5a + 15} \cdot \frac{7a + 21}{a^2 + 2a + 4}$$

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{3a^2 - 3ab}{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \cdot \frac{a^2 - b^2}{5a^2 + 5ab}$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - xy} : \frac{5x^2 - 5y^2}{3x^3 - 3y^3}$$

$$\frac{3a^2 + 3ab + 3b^2}{4a + 4b} \cdot \frac{2a^2 - 2b^2}{9a^3 - 9b^3}$$

$$\frac{10a^7 - 20a^6 + 10a^5}{4a^6 + 8a^5 + 4a^4} \cdot \frac{2a^3 + 6a^2 + 6a + 2}{5a^4 - 5a^2}$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3} : \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

41. (K) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$2a - \frac{a - b}{5}$$

$$\frac{2a + 5}{4} - \frac{2a - 3}{5}$$

$$\frac{2x + 3y}{2} - \frac{x - 2y}{3} + \frac{x - y}{4}$$

$$\frac{x + 1}{3} - 2x$$

$$\frac{4a - 5b}{12} - \frac{30 - 2b}{18}$$

$$\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 2}{4} - \frac{x - 3}{6}$$

$$\frac{2a - 3b}{3} - \frac{2a - 4b}{5} + \frac{3a + 3b}{2}$$

$$\frac{10a - 5b}{8} - \frac{3a - 9b}{2} + \frac{7a - 7b}{6}$$

$$\frac{2x^2 - 3y^2}{5} - \frac{5x^2 - y^2}{4}$$

42. (K) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1 + x}$$

$$\frac{a^2 + 3}{a^2} + \frac{2 - a}{2a}$$

$$\frac{3}{5x} + \frac{x + 2}{3x^2} - \frac{7}{15x}$$

$$\frac{2a^2 - 3a + 4}{a^2b} - \frac{3a - 1}{ab}$$

$$\frac{2a - 3b}{a} + \frac{4a^2 - 5b^2}{ab}$$

$$\frac{2}{3x^2} + \frac{3}{2x} - \frac{5}{6x}$$

$$\frac{5a}{6b^2c} + \frac{11c}{18a^2b} - \frac{7b}{12ac^2}$$

$$\frac{4a - 3b}{a^2b} - \frac{7a - 6b}{ab^2}$$

$$\frac{5x}{zw} + \frac{2y}{3z^2w} - \frac{3}{6y^2z^2}$$

43. (K) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$a + \frac{a-ab}{b}$$

$$\frac{5c}{ab} - \frac{3b}{ac}$$

$$\frac{6}{7x^3} - \frac{x-6}{3x^2} + \frac{11}{21x}$$

$$\frac{x+y}{x^2y} + \frac{x-y}{xy^2}$$

$$\frac{2a^2+3a-5}{a^2b} + \frac{4a-1}{ab}$$

$$\frac{3}{4x^2z} - \frac{5}{12yz^2} + \frac{8}{9xy^2}$$

$$\frac{3}{a^3b^3} - \frac{4}{a^4b^2}$$

$$\frac{6b-3a}{b} + \frac{3a^2-7b^2}{ab}$$

$$\frac{5x^2-2x-1}{x^2y} - \frac{3x-2}{xy}$$

44. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a+3}{a-1} + \frac{5-a}{a}$$

$$\frac{a+2b}{a-b} - \frac{a-2b}{a+b}$$

$$\frac{x+5}{x-4} - \frac{x-6}{x+7}$$

$$\frac{x}{2x+1} - \frac{x}{2x-1}$$

$$\frac{a+b}{a-b} - \frac{a+2b}{b-a}$$

$$\frac{x-3}{x-1} - \frac{2x}{x+1}$$

$$\frac{x-3}{x+2} + \frac{x+2}{x-3}$$

$$\frac{a+1}{a} - \frac{a+2}{a+1}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a+b} - \frac{a^2-b^2}{a-b}$$

45. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{1}{6-3a} - \frac{a}{a-2}$$

$$\frac{3x}{5x+5y} + \frac{2y}{3x+3y}$$

$$\frac{x+4}{2x+4} - \frac{x+6}{3x+6}$$

$$\frac{8a+9}{6b-18} - \frac{6-a}{7b-21}$$

$$\frac{x+2}{3x-12} + \frac{x-1}{20-5x}$$

$$\frac{2a}{5a+5b} + \frac{3b}{5a-5b}$$

$$\frac{6a+7}{a^2+a} - \frac{5}{a+1}$$

$$\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{a^2-ab}$$

$$\frac{2x-5}{x^2-x} + \frac{x-4}{2x-2}$$

46. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{3x+1}{21-9x} + \frac{x+2}{3x-7} - \frac{x+1}{6x-14}$$

$$\frac{a+5}{10a+25} - \frac{2a-4}{4a+10} - \frac{3-a}{2a+5}$$

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{4x+1}{4x-2} + \frac{3-x}{10x-5}$$

$$\frac{2a+1}{9a+15} + \frac{a-2}{3a+5} - \frac{5a-2}{12a+20}$$

$$\frac{3a+5}{6a-2} - \frac{a+1}{3a-1} - \frac{4}{9a-3}$$

$$\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} + \frac{y^2}{x^2-xy}$$

$$\frac{3a+1}{a^2} + \frac{2a-3}{a^2+a} - \frac{5a-2}{a^2-a}$$

$$\frac{5x-3}{x^2+3x} - \frac{x+1}{3x^2+9x} + \frac{3}{x} - \frac{2}{x+3}$$

$$\frac{2a-1}{2a} - \frac{2a}{2a-1} - \frac{1}{2a-4a^2}$$

47. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{20}{a^2 - 25} + \frac{2}{5 + a}$$

$$\frac{x - y}{3x + 3y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{5x - 1}{2x^2 + 6x} + \frac{4 - 2x}{x^2 - 9}$$

$$\frac{a - 1}{4a^2 - 9} + \frac{a}{4a^2 - 12a + 9}$$

$$\frac{3 + x}{x^2 - 10x + 25} + \frac{5}{4x - 20}$$

$$\frac{2x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\frac{a}{a^2 + 4a + 4} - \frac{a - 3}{a + 2}$$

$$\frac{5 - x}{x^2 - 8x + 16} + \frac{6}{5x - 20}$$

$$\frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9} - \frac{3}{3x + 9}$$

48. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x + 1}{x^2 - x} - \frac{x + 2}{2x^2 - 2}$$

$$\frac{1 - 3a}{3a + 9} + \frac{2a^2}{2a^2 + 12a + 18}$$

$$\frac{7}{8a^2 - 18b^2} + \frac{1}{2a^2 + 3ab} - \frac{1}{4ab - 6b^2}$$

$$\frac{1}{2x + 2} - \frac{x - 1}{3x^2 + 6x + 3}$$

$$\frac{3a + 1}{a} + \frac{2a - 3}{a + 1} - \frac{5a - 2}{a - 1}$$

$$4 + \frac{6}{x - 1} + \frac{2 + 2x}{1 - x^2}$$

$$\frac{2a + 1}{a + 1} + \frac{a - 2}{a - 1} - \frac{3a^2 - 1}{a^2 - 1}$$

$$\frac{4}{x + 2} + \frac{3}{x - 2} - \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

49. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a - 3}{a + 3} - \frac{a - 1}{a - 3} + \frac{12a}{a^2 - 9}$$

$$\frac{2x + 1}{x + 6} - \frac{2x - 3}{x - 6} + \frac{22x}{x^2 - 36}$$

$$\frac{7}{a + 5} + \frac{30}{a^2 - 25} - \frac{3}{a - 5}$$

$$\frac{x + 3}{1 + x} + \frac{2x - 1}{1 - x} - \frac{x - 3}{x^2 - 1}$$

$$\frac{3a + 2}{2a + 1} + \frac{1 - 4a}{2a - 1} + \frac{2a^2 - a}{4a^2 - 1}$$

$$\frac{2x + y}{3x - y} + \frac{x - y}{3x + y} - \frac{3x^2 - xy + 2y^2}{9x^2 - y^2}$$

$$\frac{4x - 3}{3 - 2x} - \frac{4 + 5x}{3 + 2x} - \frac{3 + x - 10x^2}{4x^2 - 9}$$

$$\frac{1}{3a + 1} + \frac{1}{3a - 1} - \frac{1}{9a^2 - 1}$$

50. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{55 + 19,5x}{x^2 - 100} - \frac{2x + 5}{2x - 20} - \frac{7}{x + 10}$$

$$\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{3}{x^2 + x} - \frac{5}{x^2 - x} + \frac{8}{x^3 - x}$$

$$\frac{4 + a}{5a^2 - 20a} + \frac{(a - 1)^2}{16a - a^3} + \frac{a - 4}{4a + a^2}$$

$$\frac{5}{a - 3} - \frac{a - 2}{a^2 - 9} + \frac{a - 1}{2a + 6}$$

$$\frac{1}{a - 3} - \frac{3}{2a + 6} - \frac{a}{2a^2 - 12a + 18}$$

$$\frac{a + 3}{2a + 2} - \frac{2a - 1}{2a - 2} - \frac{a - 3}{2a^2 - 2}$$

$$\frac{x + 1}{2x + 6} - \frac{9x + 45}{2x^2 - 18} - \frac{2x}{3 - x}$$

51. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{x}{x + 5} - \frac{5x + 9}{x^2 + 10x + 25} - \frac{2x}{3x + 15}$$

$$\frac{5x + 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{10}{x^2 - 1} - \frac{5x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{1}{9a^2 - 1} + \frac{1}{9a^2 + 6a + 1} - \frac{2}{9a^2 - 6a + 1}$$

$$\frac{x + 3}{2x - 4} - \frac{x - 2}{3x + 9} - \frac{3x^2 + 53x + 32}{12x^2 + 12x - 72}$$

$$\frac{2 - 3a}{a^2 - 4} + \frac{4a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{1}{a - 2}$$

$$\frac{2a - 1}{a^2 - 49} - \frac{a + 1}{a^2 - 14a + 49} - \frac{2}{-a - 7}$$

$$\frac{x + 5}{4x^2 - 25} - \frac{x - 1}{4x^2 + 20x + 25} + \frac{1}{2x + 5}$$

$$\frac{2}{a + 1} - \frac{3a + 6}{a^2 + 4a + 3} + \frac{3}{a + 3}$$

52. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{x - 3}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{3 - x^2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$\frac{2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\frac{1}{a - b} - \frac{3ab}{a^3 - b^3} - \frac{b - a}{a^2 + ab + b^2}$$

$$\frac{1}{x^3 + 8} - \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$$

$$\frac{4a^2 - 3a + 5}{a^3 - 1} - \frac{1 - 2a}{a^2 + a + 1} + \frac{6}{1 - a}$$

$$\frac{2a^2 + 4a}{a^3 - 8} - \frac{3 - a}{a^2 + 2a + 4} + \frac{1}{a - 2}$$

$$\frac{2x^2 - 2x - 9}{x^3 - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{3}{x - 1}$$

53. (E) Végezd el a törtek összeadását, illetve kivonását a változók lehetséges értékeinél!

$$\begin{array}{l} \frac{4a^2 - (b-c)^2}{(2a+c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (c-2a)^2}{(2a+b)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (2a-b)^2}{(b+c)^2 - 4a^2} \\ \frac{1}{(x-y) \cdot (x-z)} + \frac{1}{(z-x) \cdot (z-y)} + \frac{1}{(y-x) \cdot (y-z)} \\ \frac{1}{a \cdot (a-b) \cdot (a-c)} + \frac{1}{b \cdot (b-a) \cdot (b-c)} + \frac{1}{c \cdot (c-a) \cdot (c-b)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{a \cdot (a+b)} + \frac{1}{b \cdot (a+b)} + \frac{1}{a \cdot (a-b)} + \frac{1}{b \cdot (b-a)} \\ \frac{a+b}{(b-c) \cdot (c-a)} + \frac{b+c}{(c-a) \cdot (a-b)} + \frac{a+c}{(a-b) \cdot (b-c)} \\ \frac{(x-y)^2}{(z-x) \cdot (z-y)} + \frac{(y-z)^2}{(x-y) \cdot (x-z)} + \frac{(z-x)^2}{(y-x) \cdot (y-z)} \end{array}$$

54. (E) Hozd egyszerűbb alakra a kifejezéseket a változók lehetséges értékeinél!

$$\begin{array}{l} \frac{x-y}{y-x} \\ \frac{1-a-b}{a+b-1} \\ \frac{2-\frac{a}{3a+1}}{5a+2} \\ \frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{a-b-1} \\ \frac{(2-\frac{a}{3a+1})}{9a^2-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{a+b}{\frac{1}{ab}} \\ \frac{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}} \\ \frac{1-\frac{x^2}{3x-1}}{2+\frac{1}{1-x}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \\ 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} \\ \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}} \cdot \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x+z}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x+z}} \end{array}$$

55. (E) Hozd egyszerűbb alakra a kifejezéseket a változók lehetséges értékeinél!

$$\begin{array}{l} \frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} \\ \frac{\frac{a}{a-1} + a}{\frac{a}{a-1} - a} \\ \frac{(2-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}) \cdot (\frac{a}{b} + 1)}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \\ 2 - \frac{2}{2+\frac{1}{2-\frac{1}{x}}} \\ \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{x}{2} - \frac{2}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1+2x}{1-x}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{2-5a}{\frac{a}{3} + 5a} \\ \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{x}{ab}) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab}) \cdot a}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{x^2}{a^2b^2}} \\ \frac{1+2x}{4+2x} - \frac{x}{3x-6} + \frac{\frac{2}{3}x^2}{4-x^2} \\ \frac{6+13x}{24-12x} \end{array}$$

56. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\left(\frac{4a}{2a+5} - 2\right) : \frac{5}{4a^2-25}$$

$$\frac{x^2-16}{10x+2} : \left(\frac{21x}{10x+2} - 2\right)$$

$$\frac{x+5}{x^2-16} \cdot \left(1 - \frac{9}{x+5}\right)$$

$$\frac{a^2-9}{a+2} : \left(1 - \frac{5}{a+2}\right)$$

$$\left(\frac{3-4x}{2x+1} + 2\right) : \frac{x}{2x+1}$$

$$\left(\frac{1-6a}{2a+3} + 3\right) : \frac{5}{2a+3}$$

$$\frac{x^2-4}{10x+2} : \left(\frac{11x}{10x+2} - 1\right)$$

$$\left(\frac{12a}{4a-7} - 3\right) : \frac{24a+42}{16a^2-49}$$

57. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right)$$

$$\left(2 + \frac{x-1}{3x-1}\right) \cdot \left(\frac{1-x}{7x-3} + 1\right)$$

$$(x^2-1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 1\right)$$

$$\left(3 + \frac{1}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{1-2a}{3a-2} + 1\right)$$

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot \left(a - b - \frac{a^2}{a+b}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

$$\left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y}\right) : \left(\frac{x-2y}{x+2y} + 1\right)$$

$$\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2} + \frac{b}{3b-2a}\right) : \left(1 - \frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$$

58. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2} - \left(\frac{a^4+ab^3}{a^2+ab} - ab\right)$$

$$\left(x - y + \frac{x^2-2xy+y^2}{x+y}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$$

$$\left(x + y + \frac{y^2}{x-y}\right) : \frac{x^2}{y-x}$$

$$\left(\frac{a^2-3ab}{a+b} + b\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$

$$\left(a + b + \frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\right) : \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2} : \left(x + y - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$$

$$\left(\frac{3x}{y} + 1\right)^2 - \left(\frac{3x}{y} - 1\right) \cdot \left(\frac{3x}{y} + 1\right)$$

$$\left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a}\right)^2$$

59. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\left(\frac{2}{1-x^2} + \frac{x+2}{x-1}\right) : \frac{x+3}{x^2-1}$$

$$\left(\frac{2a+2}{a^2+2a} + \frac{a}{2a+4}\right) \cdot \frac{2a+2}{a+2} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{5x+5}{x+3} : \left(\frac{x-1}{2x+6} + \frac{x+6}{x^2-9} - \frac{x}{2x-6}\right)$$

$$\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$$

$$\left(\frac{a+5}{2a-10} - \frac{a-5}{2a+10} - \frac{50}{25-a^2}\right) \cdot \frac{a-5}{5a}$$

$$\left(\frac{x}{9x^2-16} - \frac{x-1}{16+24x+9x^2}\right) \cdot \frac{18x^2-32}{4x-11x^2}$$

$$\left(\frac{a}{b^2-ab} + \frac{b}{a^2-ab}\right) \cdot \frac{ab^2+a^2b}{b^2-a^2}$$

$$\left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} + \frac{2x}{x^2-4}\right) \cdot \frac{3x-6}{2x}$$

60. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\left(\frac{y}{x^2-xy} - \frac{2}{x-y} - \frac{x}{y^2-xy}\right) : \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab}\right)$$

$$\left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)$$

$$\left(\frac{2}{1-x^2} + \frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x^2+6x+9}$$

$$\left(\frac{3x+2}{3x^2+1} - \frac{18x^3-x-9}{9x^4-1} + \frac{3x-2}{3x^2-1}\right) : \frac{x^2+10x+25}{9x^4-1}$$

$$3 - 2 \cdot \left(\frac{a+b}{ab-b^2} + \frac{2a+3b}{b^2-a^2}\right) : \frac{a^4-4b^4}{a^4b-a^2b^3}$$

$$\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right)$$

$$\left(\frac{xy+y^2}{5x^2-5xy} + xy + y^2\right) \cdot \frac{5x}{x+y} - \frac{y}{x-y}$$

61. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\left[\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{(x+3)^2}\right] \cdot (x^2-9)^2$$

$$x - \left[\frac{x \cdot (16-x)}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2}\right] : \frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}$$

$$\left(\frac{5a}{a+b} + \frac{5b}{a-b} + \frac{10ab}{a^2-b^2}\right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$$

$$\left(\frac{a+1}{1-a} - \frac{1-a}{1+a} - \frac{4a^2}{a^2-1}\right) : \left[-2 \cdot \left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right)\right]$$

$$\left(\frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2-2ab+b^2}\right) : \frac{b^2+4ab-a^2}{a^2-b^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2-2xy+y^2} - \frac{2}{x^2-y^2} + \frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right) \cdot (x^4+y^2-2x^2)$$

62. (E) Végezd el a következő műveleteket a változók lehetséges értékeinél!

$$\left(\frac{a^3 - b^3}{a - b} + ab\right) : \frac{a + b}{2}$$

$$\left[\frac{x - 1}{3x + (x - 1)^2} - \frac{1 - 3x + x^2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1}\right] : \frac{x^2 + 1}{1 - x}$$

$$\left(\frac{2}{x^2 - x} - \frac{2x}{1 - x^2}\right) \cdot \frac{2x^2 + 2x}{x^3 - 1} + \frac{4}{x - 1}$$

$$\left[\frac{(x + y)^2 + 2y^2}{x^3 - y^3} - \frac{1}{x - y} + \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\frac{8 + b^3}{a^2 - c^2} : \frac{4 - 2b + b^2}{a - c}\right) \cdot \left(a + \frac{ac + c^2}{a + c}\right)$$

$$\left(\frac{2a^2 + a}{a^3 - 1} - \frac{a + 1}{a^2 + a + 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{a + 1}{a} - \frac{a^2 + 5a}{a^2 + a}\right)$$

$$\left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2 + 2xy + y^2} + \frac{2}{(x + y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right] : \frac{x - y}{x^3 y^3}$$

$$\left(\frac{1}{a^2 - ab} - \frac{3b^2}{a^4 - ab^3} - \frac{b}{a^3 + a^2b + ab^2}\right) \cdot \left(b + \frac{a^2}{a + b}\right)$$

63. (K) Írd fel 2 polinom hányadosaként a következő kifejezéseket!

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - d$$

64. (K) Milyen a esetén lesz a következő kifejezés helyettesítési értéke 0?

$$\frac{a + 6}{a - 6} - \frac{a - 6}{a + 6}$$

65. (E) Hozd egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést!

Milyen számok lehetnek a kifejezés helyettesítési értékei? ($a \in \mathbb{Z}^+$)

$$\frac{40a}{10a + 5} : \left(\frac{2a + 1}{2a - 1} - \frac{2a - 1}{2a + 1}\right)$$

66. (E) Az a és a b számokra teljesülnek a következő feltételek: $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$ és

$$\left(a - \frac{ab}{a - b}\right) : \left(\frac{ab}{a - b} - b\right) - \frac{a^2}{2b^2} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) = -6. \text{ Számítsd ki a } \frac{3a - 2b}{a + b} \text{ kifejezés értékét!}$$

67. (E) Bizonyítsd be, hogy a helyettesítési érték megegyezik a változó értékével!

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} : \frac{x - 2}{x + 3} = 2$$

68. (E) Bizonyítsd be, hogy a következő kifejezések helyettesítési értékei függetlenek a változók értékétől!

$$\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x}{x^2-1}$$

$$\frac{x^2 - y^2 + x + y}{x + y} - (x - y)$$

$$\left(\frac{2a+1}{5a-1} + \frac{3-2a}{5a+1}\right) : \frac{24a-2}{25a^2-1}$$

$$\left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-3}{x+2} - \frac{2x^2-6x}{x^2-4}\right) \cdot (x-2)$$

$$\left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1}\right) \quad \left(\frac{x+4}{2x-8} - \frac{x-4}{2x+8} + \frac{32}{x^2-16}\right) : \frac{4}{x-4}$$

69. (E) Igazold a következő azonosságot a változók lehetséges értékeit figyelembe véve!

$$\left(2a - \frac{a^2 + 9b^2}{3b}\right) : \left(a + \frac{9b^2}{a-6b}\right) + \frac{a}{3b} \cdot \left(1 - 3b - \frac{6b}{a}\right) = -a$$

70. (E) Igazold a következő azonosságot a változók lehetséges értékeit figyelembe véve!

$$\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{2}{x^2-y^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right] \cdot (x^2 - y^2)^2 \cdot \frac{1}{(x+y)^2 + 2 \cdot (x^2 - y^2) + (x-y)^2} = 1$$

71. (E) Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezés helyettesítési értéke minden a egész esetén páratlan egész szám lesz!

$$\frac{80a}{4a-10} : \left(\frac{2a+5}{2a-5} - \frac{2a-5}{2a+5}\right)$$

72. (E) Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezés helyettesítési értéke (a változó lehetséges értékeit figyelembe véve) minden x valós szám esetén prímszám lesz!

$$\left(\frac{2x+1}{3x-1} + \frac{5-2x}{3x+1}\right) \cdot \frac{9x^2-1}{11x-2}$$

73. (E) Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezés helyettesítési értéke (a változó lehetséges értékeit figyelembe véve) minden x valós szám esetén négyzetszám lesz!

$$\left(\frac{3x+4}{2x-10} - \frac{3x-4}{2x+10} + \frac{95}{x^2-25}\right) : \frac{19}{x-5}$$

74. (E) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan a egész, amelyre az alábbi kifejezés helyettesítési értéke is egész lenne!

$$\left(\frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1} : \frac{a}{1-2a+a^2}\right) : \left(\frac{4}{a-1} - \frac{2}{a^2+a} + \frac{8}{1-a^2}\right)$$

75. (E) Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezés helyettesítési értéke minden a pozitív egész esetén egész szám lesz!

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{9}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$$

76. (E) Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezés helyettesítési értéke minden x pozitív egész esetén pozitív egész szám lesz!

$$\left(\frac{9}{x^2} + \frac{x}{3}\right) : \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right)$$

77. (E) Bizonyítsd be, hogy az alábbi kifejezés helyettesítési értéke minden n pozitív egész esetén egész szám lesz!

$$\frac{(n-1) \cdot (n+1)^n - n \cdot (n+1)^{n-1} + 1}{n^2}$$

78. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $a > b > c$, akkor az $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ kifejezés helyettesítési értéke mindig pozitív lesz!

79. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, akkor $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$!

80. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = 0$!

81. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, akkor $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$!

82. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $(a + b) \cdot (b + c) = 0$, akkor $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$!

83. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, akkor $\frac{a^2 + 2bc + 2ac + b^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{c^2}$!

84. (E) Bizonyítsd be, hogy $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$, ha $a + b + c = 0$!

85. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ és $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, akkor $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$!

86. (E) Bizonyítsd be, hogy ha az $a; b; c$ valamelyike éppen a másik 2 összegével egyenlő, akkor $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$!

87. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}^+$, akkor $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$!
(Bármely pozitív számnak és reciprokának összege nem kisebb 2 – nél.)

88. (E) Bizonyítsd be, hogy ha 2 tört összeg egyenlő 1 - gyel, akkor a törtek különbsége egyenlő négyzeteinek különbségével!

89. (E) Határozd meg a kifejezésekben az $A; B; C; D$ értékét! (parciális törtekre bontás)

$$\frac{5x}{(x-2) \cdot (x+3)} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{13x-8}{(x-2) \cdot (7x+4)} = \frac{C}{x-2} + \frac{D}{7x+4}$$

90. (E) Határozd meg a kifejezésekben az $A; B; C; D$ értékét! (parciális törtekre bontás)

$$\frac{5x+31}{x^2-3x-10} = \frac{A}{x-5} - \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{5}{2x^2+5x-3} = \frac{C}{2x-1} + \frac{D}{x+3}$$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 12; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (12) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (13) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (14) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

- (15) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Fröhlich Lajos; 2007.; Plusz 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából (emeltszint); Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Ruff János; 2016.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (22) Saját anyagok