Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Vektorok összegének, illetve különbségének koordinátái megegyeznek a megfelelő koordináták összegével, illetve különbségével.

Bizonyítás:
Tekintsük a következő vektorokat: $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1; b_2)$.

Írjuk fel az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ bázisvektorok segítségével a vektorok összegét:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) + (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}) = (a_1 + b_1) \cdot \vec{i} + (a_2 + b_2) \cdot \vec{j}.$$

Írjuk fel az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ bázisvektorok segítségével a vektorok különbségét:

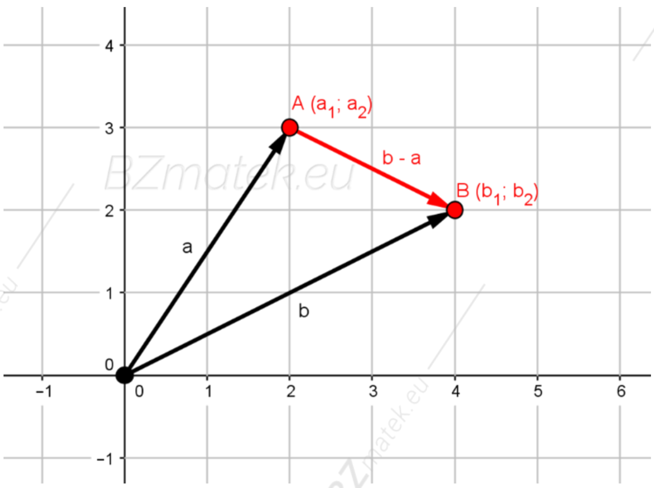
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) - (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}) = (a_1 - b_1) \cdot \vec{i} + (a_2 - b_2) \cdot \vec{j}.$$

Ebből adódnak a bizonyítandó állítások: $\vec{a} + \vec{b}\ (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ és $\vec{a} - \vec{b}\ (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

■

TÉTEL:
A kezdő és végponttal adott vektor koordinátái megegyeznek a végpont és a kezdőpont megfelelő koordinátáinak különbségével.

Bizonyítás:
Tekintsük az $A\ (a_1; a_2)$ és $B\ (b_1; b_2)$ pontokba mutató $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1; b_2)$ helyvektorokat:



Ebből a következőt kapjuk: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $\overrightarrow{AB}\ (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$.

■

TÉTEL:
A vektor skalárszorosának koordinátái megegyeznek a vektor koordinátáinak skalárszorosával.

Bizonyítás:
Tekintsük a következő vektort: $\vec{a}\ (a_1; a_2)$.

Írjuk fel az $\vec{\imath}$ és $\vec{\jmath}$ bázisvektorok segítségével a vektor skalárszorosát:

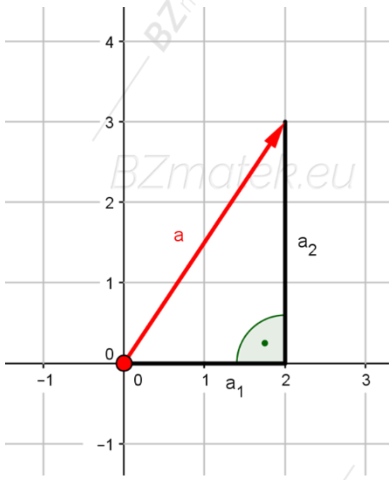
$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 \cdot \vec{\imath} + a_2 \cdot \vec{\jmath}) = (\lambda \cdot a_1) \cdot \vec{\imath} + (\lambda \cdot a_2) \cdot \vec{\jmath}$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $\lambda \cdot \vec{a}\ (\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$.

■

TÉTEL:
A vektor hossza megegyezik a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével.

Bizonyítás:
Tekintsük a következő helyvektort: $\vec{a}\ (a_1; a_2)$.



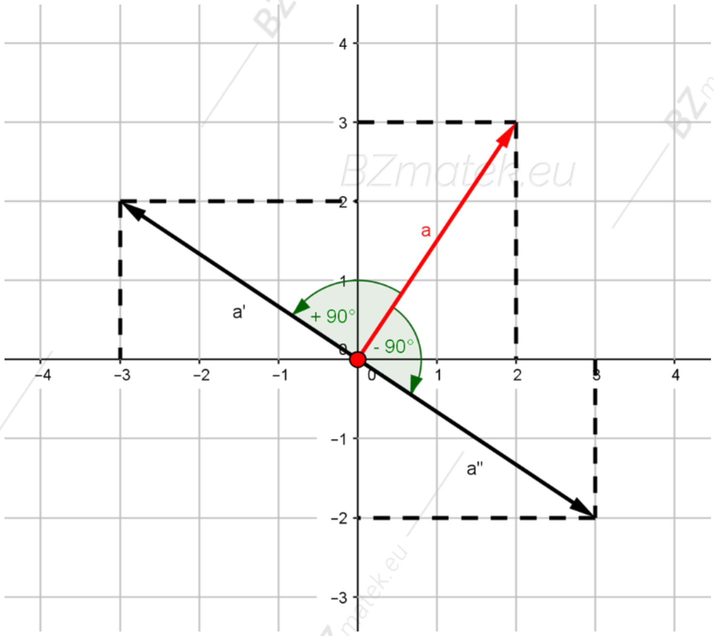
Írjuk fel Pitagorasz – tétel segítségével a következőt: $|\vec{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$.

■

TÉTEL:
A vektorra merőleges vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha az adott vektor koordinátáit felcseréljük és az egyik előjelét megváltoztatjuk.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük a következő helyvektort: $\vec{a}\ (a_1; a_2)$.



Ebből adódnak a bizonyítandó állítások:

Az $\vec{a}$ vektor $(+90°)$ - os elforgatottjának koordinátái: $\vec{a}'\ (-a_2; a_1)$.

Az $\vec{a}$ vektor $(-90°)$ - os elforgatottjának koordinátái: $\vec{a}''\ (a_2; -a_1)$.

■