Azonosító jel:

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2024. május 7.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2024. május 7. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2^x} = 2^{x+1} - 1$

b) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

a)	6 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	13 pont	

2. Egy szöveget ketten lektorálnak, Aliz és Hanna. Aliz az összes hiba p%-át fedezte fel, és a Hanna által felfedezett hibáknak is éppen a p%-át találta meg.
A szövegben Aliz 35, Hanna 40 hibát vett észre, ezek közül 28 hibát mindketten észrevettek.

a) Az összes hiba közül hányat nem vett észre egyikük sem?

Egy gyakorlott gépírónő a tapasztalatok szerint ötszáz karakterből átlagosan egynél hibázik (ezt tekinthetjük úgy, hogy minden egyes karaktert $\frac{1}{500}$ valószínűséggel ír le hibásan). Egy gépelt oldal kb. 2000 karaktert tartalmaz.

b) Igazolja, hogy a gépírónő körülbelül 0,0182 valószínűséggel gépel le hibátlanul egy teljes oldalt!

c) Ha a gépírónőnek egy 150 oldalas szöveget kell legépelnie, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a legépelt szövegnek lesz **legalább** két hibátlan oldala?

a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

3. Adott az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = -0,5x^2 + 3x$ másodfokú függvény.

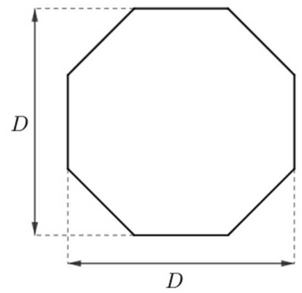
a) Határozza meg az *f* értékkészletét!

b) A *P*(6; 0) pont rajta van az *f* grafikonján. Adja meg a grafikon *P*-re illeszkedő érintőjének meredekségét, és ennek az érintőnek az egyenletét!

c) Adja meg azt a valós számok halmazán értelmezett *g* függvényt, amelyre igaz, hogy $g' = f$ és $g(3) = 7$ (g' a *g* deriváltfüggvényét jelöli)!

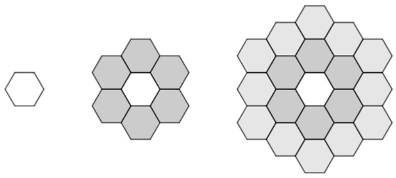
a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Az utakon látható STOP tábla méretét egy miniszteri rendelet pontosan szabályozza[1]: a tábla alakja egy olyan szabályos nyolcszög, amelynek az ábrán D-vel jelölt méretei egyaránt 600 mm-esek (lakott területen belüli táblák esetén).

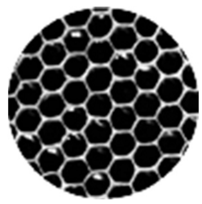


a) Mekkora a szabályos nyolcszög egy oldalának hossza?

A méhek (megközelítőleg) szabályos hatszög alakú sejtekből építik fel a lépet. Az építkezés első „lépése” után 1, a második lépése után 7, a harmadik lépése után 19 sejt készült már el összesen. Az első három lépést szemlélteti az alábbi ábra.



Tegyük fel, hogy az ábra szerint vázolt „körkörös” stratégia szerint építkeznek tovább a méhek, azaz minden egyes további lépésben újabb szabályos hatszög alakú sejtekkel veszik körül az előzőleg már elkészült építményt. Így a harmadik lépéstől kezdve minden egyes lépésben 6-tal több új szabályos hatszöget építenek meg, mint az előző lépésben.



b) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy az n-edik lépés után összesen $3n^2-3n+1$ darab hatszög készült el!

a)	6 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	12 pont	

[1] https://net.jogtar.hu/jogszabaly?docid=a0100004.kov

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Egy építőjáték olyan (kockától különböző) egybevágó négyzetes oszlopokat tartalmaz, amelyeknek minden lapja vagy kékre, vagy sárgára van festve. Mindegyik oszlopon **több sárga** színű lap van, mint kék színű. Az építőjáték a feltételnek megfelelő minden különböző színezésű oszlopból egy darabot tartalmaz.

a) Hány négyzetes oszlop van az építőjátékban? (Két színezett oszlop különböző, ha térbeli mozgatással nem vihetők át egymásba.)

Egy négyzetes oszlop felszíne 384 cm^2.

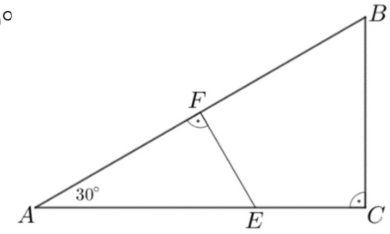
b) Számítsa ki az oszlop térfogatát, ha oldalélei 22 cm hosszúak!

c) Hogyan válasszuk meg a 384 cm^2 felszínű négyzetes oszlop alapéleit, illetve oldaléleit, hogy a nyolc alapél és a négy oldalél hosszának az összege minimális legyen?

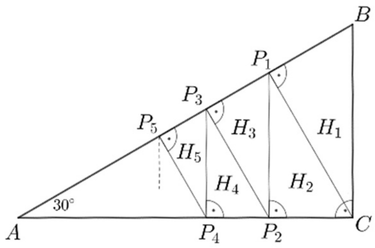
a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. Az ABC derékszögű háromszög A csúcsánál fekvő szöge 30°



a) A háromszög AB átfogójának F felezőpontjában merőlegest állítunk az átfogóra. Ez a merőleges az AC befogót az E pontban metszi. Milyen arányban osztja két részre az E pont az AC befogót?



A háromszögből az átfogójához tartozó CP_1 magassága mentén levágjuk a H_1-gyel jelölt háromszöget. Az így megmaradó ACP_1 derékszögű háromszögben végrehajtjuk ugyanezt a lépést: a H_2 háromszöget vágjuk le a háromszög átfogójához tartozó P_1P_2 magassága mentén, és így tovább (lásd az ábrán).

b) Ha ezt az eljárást 13-szor hajtjuk végre, akkor a 13 háromszög levágása után megmaradó háromszög területe hány százaléka az ABC háromszög területének?

c) Mekkora a végtelen sok szakaszból álló $CP_1P_2P_3P_4\ldots$ töröttvonal hosszának pontos értéke, ha $CP_1 = 2-\sqrt{3}$?

a)	5 pont	
b)	6 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Endre, Frici és Gyuri sportlövők. A lőtéren hat lőállás van egymás mellett, 1-től 6-ig megszámozva. Egyik nap az edzőjük véletlenszerűen osztja be őket egy-egy különböző lőállásba.

a) Melyik esemény a valószínűbb: az, hogy három egymás melletti lőállásba kerülnek, vagy az, hogy közülük semelyik kettő nem kerül szomszédos lőállásba?

Egy sportlövőversenyen minden lövéssel 5, 4, 3, 2, 1 vagy 0 pontot lehet szerezni. A győzelemhez Endrének az utolsó öt lövéssel összesen **legalább** 22 pontot kell elérnie.

b) Hányféleképpen lehet öt lövéssel legalább 22 pontot elérni?
(Két ötlövéses sorozatot azonosnak tekintünk, ha legfeljebb a szerzett pontszámok sorrendjében térnek el egymástól.)

Ugyanezen a versenyen Gyuri utolsó tíz lövése között nem volt 0 pontos. A tíz lövés pontszámának terjedelme, mediánja és átlaga is 3, egyetlen módusza pedig a 2 volt.

c) Határozza meg monoton növekvő sorrendben Gyuri utolsó tíz lövésének pontértékét! (Megoldása során indokolja, hogy a tíz lövés pontértéke – sorrendjüktől eltekintve – egyértelmű.)

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy háromszög oldalainak hossza p^2+q^2, p^2-q^2, illetve $2pq$, ahol p és q olyan pozitív egész számok, melyekre $p > q$ teljesül.

a) Igazolja, hogy a három oldalhossz közül p^2+q^2 a legnagyobb!

b) Igazolja, hogy a háromszög derékszögű!

c) Igazolja, hogy a háromszög területe p^3q-q^3p!

d) Jelölje a háromszögbe írt kör sugarának hosszát r. Igazolja, hogy r értéke egész szám!

a)	4 pont	
b)	4 pont	
c)	2 pont	
d)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. Legyen f a valós számok halmazán értelmezett függvény, ahol $f(x) = x^2$.

a) Határozza meg a és b értékét, ha $\int_a^b f(x) = 63$ és $f'(a) = b$.

Legyen h a valós számok halmazán értelmezett függvény, ahol $h(x) = x^2 + px + r$.

b) Határozza meg p és r értékét, ha $h(1)$, $h(3)$ és $h(4)$ (ebben a sorrendben) egy számtani, $h(1)$, $h(2)$ és $h(4)$ pedig (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	13		**51**	
	2.	13			
	3.	13			
	4.	12			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum

javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző