26. (2020. május, 4. feladat, 13 pont: 3 + 4 + 6)
Adott az $x^2 - (4p + 1) \cdot x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozza meg a p paraméter érétkét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x-3)(1,5-x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

b) Mutassa meg, hogy csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

c) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítása és eladása) esetén érik el?

9. feladat
Egy háromszög oldalai $AB = 13\ cm, BC = 14\ cm$ és $AC = 15\ cm$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a háromszög egy belső pontját.
a) Mutassuk meg, hogy $\frac{5}{14}$ annak a valószínűsége, hogy a kijelölt pont a leghosszabb oldalhoz van a legközelebb! (8 pont)

A DEF hegyesszögű háromszög magasságait berajzolva a háromszög 6 kisebb háromszögre bomlik fel. A létrejövő 6 háromszöget a piros, kék, zöld, lila, barna és sárga színekkel színezhetjük ki úgy, hogy amelyik színeket felhasználjuk, azok mindegyikéből ugyanannyi számú színt használunk. (Tehát pl. használhatunk 2 pirosat, 2 lilát és 2 sárgát, de nem használhatunk 3 kéket, 2 zöldet és 1 lilát.) Minden háromszöget csak egy színnel színezünk ki. A szomszédos háromszögeknek különböző színűeknek kell lenniük. Két háromszög akkor szomszédos, ha van közös oldaluk. A csak csúcsban közös háromszögeket nem tekintjük szomszédosnak.
b) Mutassuk meg, hogy a fenti feltételeket figyelembe véve 1230 féle módon színezhetjük ki a kis háromszögeket! (8 pont)

5. feladat

a) Adjuk meg az $f(x) = \frac{4^x - 16}{2^x - 4}$ függvény értelmezési tartományát! (2 pont)

b) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt a derékszögű koordináta-rendszerben! (4 pont)

c) Mutassuk meg, hogy teljesül az alábbi egyenlőség! (4 pont)

$$8^x - 64 = (2^x - 4) \cdot (4^x + 2^{x+2} + 16)$$

d) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! (6 pont)

$$\frac{8^x - 64}{2^x - 4} = 48$$

a) $$\left.\begin{aligned} \log_3[21 - 3 \cdot \log_2(x + 2y)]\} = 2 \\ 88^{x^2} \cdot 88^{y^2} = (88^{13})^4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot \lg(x - 1) - 5 \cdot \lg(y - 4) = 6 \\ \lg(x - 1) + 7 \cdot \lg(y - 4) = 2 \end{aligned}\right\}$$

Vizsgáld meg, hogy a sorozat korlátos, monoton, konvergens!

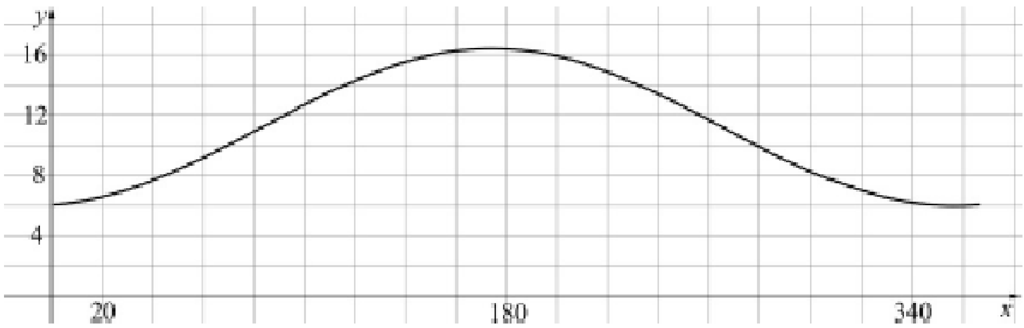
$$\boldsymbol{a_n = \frac{4n + 5}{2n - 1}}$$

26. (2020. május, 5. feladat, 16 pont: 2 + 3 + 7 + 4)

Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni: $f(n) = -5{,}2 \cdot \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2$, ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365, n \in \mathbb{N}$).

Az alábbi ábra a $g\colon [1{,}365] \to \mathbb{R}$; $g(x) = -5{,}2 \cdot \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f – nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!

Válaszát óra : perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

9. (2019. május, 9. feladat, 16 pont: 6 + 4 + 6)

a) Hány olyan 1000 – nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív prímek?

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
…										…

A fehér, illetve szürke színű „L alakú” sávokban lévő számok összege:
$L_1 = 1$,
$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$,
$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$, …

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$!

c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege $K_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$.