3. feladat

a) Az 1-es és 2-es számjegyek felhasználásával hétjegyű pozitív egész számokat képezünk (lehetséges, hogy csak az egyik fajta számjegyet használjuk fel). Legyen az A esemény az, hogy a kapott szám osztható hárommal, a B esemény pedig az, hogy a kapott szám osztható néggyel. Határozzuk meg a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget! (6 pont)

8. feladat

Tekintsük az alábbi ábrán látható 3x3-as, középső négyzetét nem tartalmazó négyzet alakú táblázatot. Ebben a táblázatban véletlenszerűen kijelölünk 3 kis négyzetet.

A	B	C
D		E
F	G	H

Jelölje X azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a 3 kijelölt kis négyzet között hány szomszédos lesz.

Két négyzetet akkor tekintünk szomszédosnak, ha élszomszédosak.

A csak csúcsban szomszédos négyzeteket nem tekintjük szomszédosnak.

Pl. B és C szomszédosak, de B és E nem szomszédos négyzetek.

a) Adjuk meg X várható értékét! (8 pont)

18. (2019. október, 7. feladat, 16 pont: 7 + 9)

a) Igazolja, hogy nincs olyan 2 – nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ és $\binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

b) Határozza meg azokat az 5 – nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ és $\binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

6. feladat

Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 8\ cm$ és $BC = 9\ cm$.

a) Határozzuk meg a háromszög köré írható körének középpontjának és súlypontjának távolságát! Válaszunkat cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg! (5 pont)

Kijelölünk az AC befogón egy D és a BC befogón egy E pontot, hogy $AD = DE = BE$ teljesüljön.

b) Határozzuk meg a CDE háromszög kerületét! (5 pont)

Az ABC háromszögbe téglalapokat írunk úgy, hogy annak egyik csúcsa C, ezzel szemközti csúcsa az AB átfogón van és a másik két csúcsa illeszkedik a befogókra.

c) Határozzuk meg ezen téglalapok közül a legnagyobb területűt! (6 pont)

7. Hannáék a számrendszereket tanulták az utóbbi hetekben matek órán. Az egyik óra után a tanár felírt egy házi feladatot a táblára, de Hanna sajnos csengetés után vette észre, és futtában csak a következőt tudta leírni a füzetébe:

$$s_a + g_a = 132_a$$

Otthon észrevette és gondolta, ír a tanárnak egy emailt, hogy megkérdezze, milyen számok állnak az s és a g helyén. A tanár a következőt válaszolta neki:

„Ha úgy tekintünk először s-re és g-re, mint tízes számrendszerbeli számokra, akkor a g számot úgy kapjuk, hogy az s kétjegyű számban a számjegyeket felcseréljük. A számjegyek összege 7. Ha az s számot megszorozzuk a második számjegyének felével, és ehhez hozzáadjuk az első számjegyének 4-szeresét, majd az egészet leosztjuk 3-mal, akkor a második számjegyének $\frac{13}{2}$-szeresét kapjuk, úgy, hogy a második számjegyének a fele lesz a maradék."

a) A tanár a levelében csak az s és g helyére beírt számokhoz adott Hannának útmutatást. Határozza meg ezt a két számot, majd azt, hogy milyen alapú számrendszerben teljesülhet az eredeti egyenlőség!

Hanna tovább olvasta a tanára írását, és látta, hogy két szorgalmi feladatot is csatolt hozzá, amelyek így szólnak:

26. (2020. május, 4. feladat, 13 pont: 3 + 4 + 6)
Adott az $x^2 - (4p + 1) \cdot x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

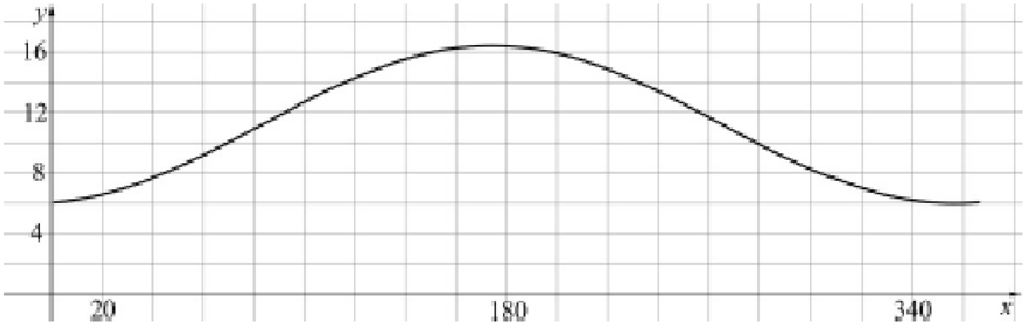
b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozza meg a p paraméter érétkét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

26. (2020. május, 5. feladat, 16 pont: 2 + 3 + 7 + 4)

Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni: $f(n) = -5{,}2 \cdot \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2$, ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \le n \le 365, n \in \mathbb{N}$).

Az alábbi ábra a $g: [1{,}365] \to \mathbb{R}$; $g(x) = -5{,}2 \cdot \cos\left(\frac{n+8}{58}\right) + 11{,}2$ függvényt szemlélteti. (A g függvény az f – nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.
Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!
Válaszát óra : perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

9. (2019. május, 9. feladat, 16 pont: 6 + 4 + 6)

a) Hány olyan 1000 – nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív prímek?

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
…										…

A fehér, illetve szürke színű „L alakú” sávokban lévő számok összege:
$L_1 = 1$,
$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$,
$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$, ...

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$!

c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege $K_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$.

Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x-3)(1,5-x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.)

b) Mutassa meg, hogy csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

c) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítása és eladása) esetén érik el?

9. feladat

Egy háromszög oldalai $AB = 13\ cm, BC = 14\ cm$ és $AC = 15\ cm$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a háromszög egy belső pontját.

a) Mutassuk meg, hogy $\frac{5}{14}$ annak a valószínűsége, hogy a kijelölt pont a leghosszabb oldalhoz van a legközelebb! (8 pont)

A DEF hegyesszögű háromszög magasságait berajzolva a háromszög 6 kisebb háromszögre bomlik fel. A létrejövő 6 háromszöget a piros, kék, zöld, lila, barna és sárga színekkel színezhetjük ki úgy, hogy amelyik színeket felhasználjuk, azok mindegyikéből ugyanannyi számú színt használunk. (Tehát pl. használhatunk 2 pirosat, 2 lilát és 2 sárgát, de nem használhatunk 3 kéket, 2 zöldet és 1 lilát.) Minden háromszöget csak egy színnel színezünk ki. A szomszédos háromszögeknek különböző színűeknek kell lenniük. Két háromszög akkor szomszédos, ha van közös oldaluk. A csak csúcsban közös háromszögeket nem tekintjük szomszédosnak.

b) Mutassuk meg, hogy a fenti feltételeket figyelembe véve 1230 féle módon színezhetjük ki a kis háromszögeket! (8 pont)

5. feladat

a) Adjuk meg az $f(x) = \frac{4^x - 16}{2^x - 4}$ függvény értelmezési tartományát! (2 pont)

b) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt a derékszögű koordináta-rendszerben! (4 pont)

c) Mutassuk meg, hogy teljesül az alábbi egyenlőség! (4 pont)

$$8^x - 64 = (2^x - 4) \cdot (4^x + 2^{x+2} + 16)$$

d) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! (6 pont)

$$\frac{8^x - 64}{2^x - 4} = 48$$