Feltételes valószínűség

DEFINÍCIÓ: (Feltételes valószínűség)
Az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége, az A esemény bekövetkezésének valószínűségét jelenti, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezett.
Jelöléssel: $P\ (A|B) = \frac{P\ (A \cdot B)}{P\ (B)}$, ahol $P\ (B) \neq 0$.

Megjegyzés:

- *Feltételes valószínűség esetén a teljes eseményteret leszűkítjük a B – t alkotó elemi eseményekre, így ez lesz az új eseménytér.*
- *Két esemény szorzatának valószínűsége:* $P\ (A \cdot B) = P\ (A|B) \cdot P\ (B)$.

Példa:
Mennyi a valószínűsége, hogy 6 - ost dobtunk, ha tudjuk, hogy párosat dobtunk?

Megoldás:

Első módszer:

Az összes eset: 3. (Lehetséges dobások: 2; 4; 6.)

A kedvező esetek: 1. (A dobott szám a 6 – os.)

Ezek alapján a megoldás: $P = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333$.

Második módszer:

Legyen az A esemény az, hogy 6 – ost dobunk, a B esemény pedig az, hogy párosat dobunk.

Ekkor a következő adódik: $P\ (B) = \frac{3}{6}$ és $P\ (A \cdot B) = \frac{1}{6}$.

Ezek alapján a megoldás: $P\ (A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333$.

TÉTEL: (Valószínűségek szorzási szabálya)
Legyen H egy eseménytér, $A_1; A_2; \dots; A_n$ olyan eseményeivel, amelyek valószínűsége nem 0. Ekkor az események szorzatának (együttes bekövetkezésének) valószínűsége:

$$P\,(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$$

<u>Példa:</u>
Egy gyűlésre meghívtak 8 magyar, 4 német és 3 francia képviselőt. Mennyi a valószínűsége, hogyha egyenként érkeznek a helyszínre, akkor elsőnek magyar, másodiknak német, harmadiknak pedig francia személy fog érkezni?

<u>Megoldás:</u>

Első módszer:

Az összes eset: $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$.

A kedvező esetek: $8 \cdot 4 \cdot 3 = 96$.

Ezek alapján a megoldás: $P = \frac{96}{2\,730} \approx 0{,}0352$.

Második módszer:

Legyen az A esemény az, hogy az első érkező magyar, a B esemény az, hogy a második érkező német, a C esemény pedig az, hogy a harmadik érkező francia lesz.

Ekkor a következő adódik: $P\,(A) = \frac{8}{15}$; $P\,(B|A) = \frac{4}{14}$ és $P\,(C|A \cdot B) = \frac{3}{13}$.

Ezek alapján a megoldás: $P\,(A \cdot B \cdot C) = \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{96}{2730} \approx 0{,}0352$.

TÉTEL: (Teljes valószínűség tétele)
Legyen $B_1; B_2; \ldots; B_n$ olyan teljes eseményrendszer, amely egyetlen eseményének valószínűsége sem 0. Ekkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége:

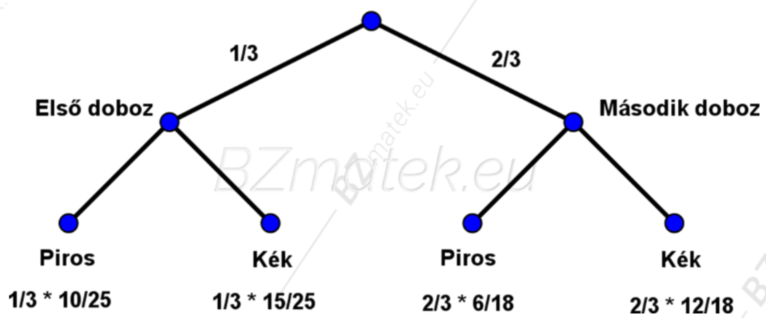
$$P\ (A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

Példa:
Egy dobozban 10 piros és 15 kék golyó van, egy másikban 6 piros és 12 kék. Az egyik dobozból véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót. Mi annak a valószínűsége, hogy az piros, ha a második dobozból kétszer nagyobb eséllyel húzzunk, mint az elsőből?

Megoldás:

Első módszer:

Szemléltessük gráffal a lehetséges esetek esélyeit:



Ezek alapján a megoldás: $P = \frac{10}{25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{18} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{45} \approx 0{,}3556.$

Második módszer:

Legyen az A esemény az, hogy a húzott golyó piros, a B esemény az, hogy az első dobozból húzunk egy golyót, a C esemény pedig az, hogy a második dobozból választunk egy golyót.

Ekkor a következő adódik: $P\ (B) = \frac{1}{3}; P\ (C) = \frac{2}{3}; P\ (A|B) = \frac{10}{25}$ és $P\ (A|C) = \frac{6}{18}$.

Ezek alapján a megoldás: $P\ (A) = \frac{10}{25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{18} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{45} \approx 0{,}3556.$

TÉTEL: (Bayes – tétel)
Legyen $B_1; B_2; \ldots; B_n$ olyan teljes eseményrendszer, amely egyetlen eseményének valószínűsége sem 0, továbbá az A pedig egy tetszőleges esemény. Ekkor teljesül a következő: $P\,(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$, ahol $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

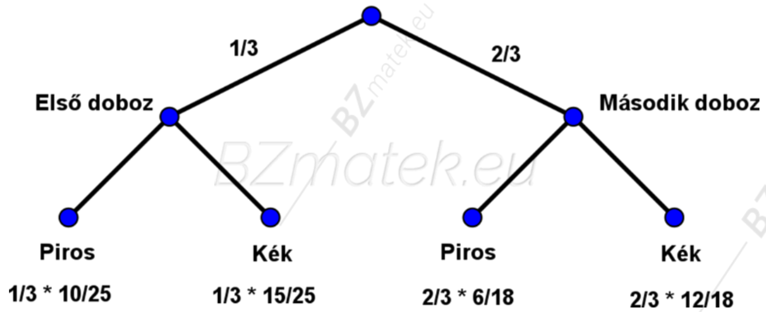
<u>*Megjegyzés:*</u>
A Bayes - tétellel azt számíthatjuk ki, hogy az A bekövetkezését mekkora valószínűséggel befolyásolta a B_i feltétel.

<u>**Példa:**</u>
Egy dobozban 10 piros és 15 kék golyó van, egy másikban 6 piros és 12 kék. Az egyik dobozból véletlenszerűen kiválasztottunk egy golyót és az piros. Mi annak a valószínűsége, hogy a piros golyó az első dobozból származott, ha a második dobozból történő húzás kétszer valószínűbb, mint az elsőből?

<u>Megoldás:</u>

Első módszer:

Szemléltessük gráffal a lehetséges esetek esélyeit:



Ezek alapján a megoldás: $P = \frac{\frac{10}{25} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{10}{25} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{18} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$

Második módszer:

Legyen az A esemény az, hogy a húzott golyó piros, a B_1 esemény az, hogy az első dobozból húzunk egy golyót, a B_2 esemény pedig az, hogy a második dobozból választunk egy golyót.

Ekkor a következő adódik:

$P\,(B_1) = \frac{1}{3}; P\,(B_2) = \frac{2}{3}; P\,(A|B_1) = \frac{10}{25}; P\,(A|B_2) = \frac{6}{18}$ és $P\,(A) = \frac{16}{45}$.

Ezek alapján a megoldás: $P\,(B_1|A) = \frac{\frac{10}{25} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{16}{45}} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(E) Egy A esemény valószínűsége $\frac{3}{4}$. Egy másik B eseménynek az A feltételre vonatkozó feltételes valószínűsége $\frac{1}{3}$. Határozd meg az A és B események együttes bekövetkezésének (szorzatának) a valószínűségét!**

2. **(E) Az A és B események együttes bekövetkezésének (szorzatának) valószínűsége $\frac{2}{5}$, annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik $\frac{4}{5}$. Határozd meg a feltételül szabott esemény bekövetkezésének valószínűségét!**

3. **(E) Az A és B eseményekre teljesül a következő: $P(A) = 0,4; P(B) = 0,5$ és $P(A + B) = 0,7$. Határozd meg a $P\ (A \mid B)$ értékét!**

4. **(E) Legyen $P\ (A \mid B) = 0,7; P(A \cdot B) = 0,3$ és $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0,6$. Mennyi a $P(A)$ értéke?**

5. **(E) Mennyi az A és B esemény valószínűsége, ha $P(A \mid B) = \frac{7}{10}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$ és $P\left(A \mid \overline{B}\right) = \frac{1}{5}$?**

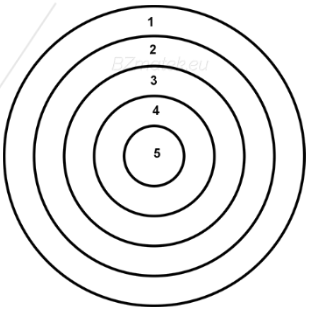
6. **(E) Bizonyítssd be, hogy ha $P\ (A) = \frac{5}{6}$ és $P\ (B) = \frac{11}{12}$, akkor $\frac{9}{11} \leq P(A \mid B) \leq \frac{10}{11}$!**

7. **(E) Bizonyítsd be, hogy ha $P(A) = \frac{9}{10}$ és $P(B) = \frac{4}{5}$, akor $\frac{7}{9} \leq P(B \mid A) \leq \frac{8}{9}$!**

8. **(E) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges A és B események esetén $(P(B) \neq 0)$ fennáll a $P\left(\overline{A} \mid B\right) = 1 - P(A \mid B)$ egyenlőség!**

9. (E) Legyen A az az esemény, hogy két kockával dobva, a dobott számok összege legfeljebb 8, a B pedig az az esemény, hogy az összeg legalább 5. Add meg a $P(A \mid B)$ értékét!

10. (E) Az adott céltábla sugarai $1; 2; 3; 4; 5$ egység. Legyen A az az esemény, hogy az adott céltáblára véletlenszerűen lőve legfeljebb 4 pontot érünk el, a B pedig az az esemény, hogy legalább 2 pontunk lesz. Add meg a $P(A \mid B)$ értékét!



11. (E) Éva, Sándor és Zoltán egy repülőgéppel érkeznek. Éva 3, Sándor 4 és Zoltán 5 csomagot adott fel. Tekintsük a következő eseményeket:

A: Elsőnek Éva csomagja érkezik meg a futószalagon.

B: Másodiknak Sándor csomagja érkezik meg a futószalagon.

C: Harmadiknak Zoltán csomagja érkezik meg a futószalagon.

Add meg az alábbi valószínűségek értékét!

$P(A)$ $\quad$ $P(A \cdot B)$ $\quad$ $P(A \cdot B \cdot C)$ $\quad$ $P(B \mid A)$ $\quad$ $P(C \mid A \cdot B)$

12. (E) Két kalapba számozott golyókat raktunk. Az elsőbe 6 darab pirosat 1 – től 6 – ig számozva, a másodikba 4 darab fehéret 1 – től 4 – ig számozva. Kihúzunk mindkét kalapból véletlenszerűen egy - egy golyót. Jelentse az A esemény azt, hogy a kihúzott golyókon lévő számok szorzata 3 – mal osztható, a B esemény pedig azt, hogy a számok szorzata 10 – nél kisebb. Add meg az $A; B; A \cdot B; A - B$ események valószínűségeit, valamint azt, hogy mekkora valószínűséggel következik be az A esemény, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezett?

13. (E) Van 4 számkártyánk, amelyekre a $0; 1; 3; 5$ számok vannak írva. Alapos keverés után kiválasztunk közülük 2 - t. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két kártya összege, különbsége, illetve szorzata páros? Mekkora a $P\,(szorzat\,páros \mid összeg\,páros)$ és a $P(összeg\,páros \mid szorzat\,páros)$ feltételes valószínűség értéke?

14. (K) Egy urnában 10 fehér és 10 piros golyó található. Mennyi annak a valószínűsége, hogy negyedikre fehéret húzunk, ha az első három piros volt?

15. (K) Egy dobozban 5 fehér és 5 piros golyó van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik húzásra fehér golyót veszünk ki, ha előtte kétszer egymás után visszatevés nélkül fehéret húztunk?

16. (K) Egy dobókockával kétszer dobunk. Feltéve, hogy a két szám összege 8, mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük 5 – ös?

17. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy dobókockát feldobva páros számot dobunk, ha tudjuk, hogy a dobot szám prím?

18. (K) Egy szabályos dobókockával és egy szabályos tetraéderrel (amelyen 1 - től 4 - ig vannak a pontok, és a dobás értéke a takart szám) dobva mi annak a valószínűsége, hogy mindkettővel 1 - est dobunk, feltéve, hogy a tetraéder takart száma az 1 – es?

19. (K) Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?**

b) **Ha tudjuk, hogy az első dobás eredménye páratlan, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7 lesz?**

20. (K) Egy dobozba egy – egy piros, fehér és zöld dobókockát tettünk. Kiveszünk 2 – t és dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha fehér és zöld kockát húzunk, akkor legalább egy 6 - ost dobunk?

21. (K) Egy jól megkevert magyar kártyacsomagból egymás után kiveszünk 2 lapot. (A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

a) **Mennyi a valószínűsége, hogy másodikra pirosat húzunk, ha elsőre is pirosat?**

b) **Mennyi a valószínűsége, hogy másodikra pirosat húzunk, ha elsőre makkot?**

c) **Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre makkot másodikra pedig pirosat húzunk?**

22. (K) Egy magyar kártyacsomagból kiválasztunk 3 lapot visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első ász, a második király, a harmadik ismét ász lesz? (A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

23. (K) Egy jól megkevert francia kártyából kihúzunk egymás után 2 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második lap pikk lesz?
(A francia kártyacsomag 52 lapból áll, ahol a 4 szín – káró; kör; pikk; treff - mindegyikéből $13-13$ darab van: 2; 3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; bubi; dáma; király; ász.)

24. (K) Ejtőernyős ugrást hajtanak végre egy $1500\ m^2$ – es területre. Annak sikeres az ugrása, aki a terepen kijelölt $10\ m$ oldalú négyzeten belül ér földet. Külön díjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt $2\ m$ sugarú körben ér le. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy sikeres ugrást végrehajtó ejtőernyős külön díjat is kap, ha a négyzeten belül a leérkezés bármely helyre egyenlő esélyű?

25. (K) Tekintsük egy évfolyam 4 osztályának év végi matematika jegyeinek statisztikáját.

Osztály / Jegy	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	0	1	5	12	14
B	1	3	12	8	6
C	0	5	11	7	7
D	1	2	6	13	12

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák évvégi osztályzata 5 - ös matematikából?**

b) **Károly év végi jegye 3 - as matematikából. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ő a C osztályba jár?**

26. (K) Egy osztályban rajzórán Csontváry – és Munkácsy – képeket nézegettek. Az óra végén a tanár megkérdezte a jelen levő 9 lányt, hogy melyik kép testzett nekik jobban: 3 fő szavazott Csontváryra, a többiek Munkácsyra. Ugyanakkor a 18 fiú közül 8 – nak tetszett inkább Munkácsy, a többinek Csontváry.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy kiválasztva egy főt az lány, feltéve, hogy Munkácsy kedvelő?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy kiválasztva egy főt az Csontváry kedvelő, feltéve, hogy fiú?**

27. (K) Egy dolgozat alkalmával 30 diák közül 25 jól megoldotta az első feladatot, közülük 10 a másodikat is. A második példát összesen 13 fő oldotta meg jól.

_a)_ Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki jól oldotta meg a második feladatot, ha az első feladatot sikerült megoldania?

_b)_ Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki jól oldotta meg az első feladatot, ha a másodikat nem sikerült jól megoldania?

28. (K) Egy focicsapat az egész meccset Aladár, Balázs és Csaba csatárokkal támadta végig. Aladár 15 helyzetből 2, Balázs 4 helyzetéből 1, Csaba pedig 7 helyzetéből 2 gólt rúgott. Helyzetük csak nekik volt a pályán lévő 22 játékosból és gólt csak ők lőttek. A sportműsorban bejátszanak egy találomra kiválasztott helyzetet.

_a)_ Mekkora valószínűséggel látunk gólt a bejátszásban?

_b)_ Ha gólt látunk a bejátszásban, azt mekkora valószínűséggel rúgta Csaba?

_c)_ Ha nem látunk gólt, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy Aladár hagyta ki a helyzetet?

29. (K) Egy találkozón 75 feketére festett és 35 színes motort láthatott a közönség. A fekete motorok 40 % - ában, míg a színesek 80 % - ában V8 – as motor dübörgött. Ha valaki meghallotta egy V8 – as motor hangját, akkor mekkora valószínűséggel pillantott meg színes motort?

30. (K) Egy üzemben az első napon 100 darab termék készül, amelyből 5 selejt. A második napon 150 darab termék készül, s ebből 10 lesz selejtes. A második nap végén az addig elkészült összes termék közül kiválasztunk egyet. Feltéve, hogy a termék selejt lesz, mennyi annak a valószínűsége, hogy az első napon készült?

31. (K) Egy zenekarnak 87 tagja van, 52 férfi és 35 nő. Közülük a vonós szekciót 42 művész alkotja, soraikban 15 hölggyel. A portás a hangszer tokját látva megállapítja, hogy az épületbe bejött művész vonós. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az illető nő?

32. (K) Egy 34 fős osztályban 14 fiú és 20 lány van. A fiúk közül 5, a lányok közül 7 kitűnő tanuló. Ha véletlenszerűen kiválasztunk 2 tanulót egymás után, mekkora annak a valószínűsége, hogy az először választott kitűnő lány és a második nem kitűnő lány?

33. (K) Egy osztályteremben kettesével ülnek a tanulók a padokban. Ha megtudjuk, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott padban legalább az egyik tanuló fiú, mennyi annak a valószínűsége, hogy van lány is abban a padban?

34. (K) Ha nagyon sok 2 gyermekes család közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és megtudjuk, hogy legalább az egyik gyerek lány, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?

35. (K) Egy dobozban 5 piros, 6 fehér és 7 zöld golyó van. A golyók legfeljebb csak színükben különböznek. Egymás után véletlenszerűen kihúzunk 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy piros, egy fehér és egy zöld golyó követi egymást, ha a kihúzott golyókat nem tesszük vissza, illetve ha a kihúzott golyókat visszatesszük?

36. (E) A 32 lapos magyar kártyát kiosztják 4 játékosnak, egyenlő számban. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha az egyik játékosnak nem jut ász, akkor legalább egy játékos lesz, akinek pontosan két ász jutott?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

37. (E) Az úszóversenyen 100 méteres pillangóúszás nyolcas döntőjébe bejutott két barátnő Eszter és Flóra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha Eszter dobogós helyen végez, akkor Flóra nyeri a döntőt? (A döntőben nem volt holtverseny.)

38. (E) Egy dobozban 3 piros és 5 zöld golyó van. Feldobunk egy pénzérmét. Kétszerezzük meg a piros, illetve a zöld golyók számát attól függően, hogy írást, illetve fejet dobunk az érmével. Ezután véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy írást dobunk, és a húzás eredménye piros golyó?

39. (E) Egy dobozban 3 golyó van: fehér, kék, piros. Háromszor húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy kéket és pirosat is húzunk legalább egyszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk fehéret?

40. (E) Egy dobozban 3 golyó van: piros, fehér és zöld. Ötször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy fehéret és zöldet is húztunk legalább kétszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

41. (E) Két kalap mindegyikében 12 golyó van, 6 fehér és 6 fekete az első kalapban, és 12 fekete a másik kalapban. Az első kalapból véletlenszerűen kiválasztunk egy golyót, és átrakjuk a másodikba. Ezután a másodikból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második kalapból választott golyó fekete?

42. (E) Azonos fajta árukból két tételünk van. Az első tétel 15, a második tétel 20 darabból áll. Mindkét tételben $1-1$ hibás darab van. Az első tételből egy véletlenszerűen választott darabot átteszünk a másodikba. Ezután a második tételből választunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a darab selejtes lesz?

43. (E) Egy dobozban 2 fehér és 2 fekete golyó van.

a) **Ildi kivesz egy golyót a dobozból, s látja, hogy fehér. Anélkül, hogy visszatenné az első golyót, kivesz egy másodikat. Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy a második golyó fehér, vagy annak, hogy fekete?**

b) **Zoli kivesz egy golyót a dobozból, s félreteszi anélkül, hogy megnézné, milyen színű. Másodszorra kivesz egy fehéret. Minek nagyobb a valószínűsége: annak, hogy az első golyó fehér volt, vagy annak, hogy fekete?**

44. (E) Egy szabályos dobókocka mellett van egy olyan is, amelynek egy 2 pontos, két 4 pontos és három 6 pontos lapja van. Véletlenszerűen választunk a két kocka közül, és a választott kockával egyszer dobunk.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6 - ost dobunk?**

b) **A véletlenszerűen választott kockával 4 - est dobtunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt a szabályos kockával dobtuk?**

45. (E) 10 azonos alakú doboz közül az első 9 – ben $4-4$ golyó van, mégpedig 2 fehér és 2 kék. A tizedik dobozban 5 fehér és 1 kék golyó van. Az egyik találomra választott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a tizedik dobozból való, ha a kivett golyó fehér?

46. (E) Feldobunk egy érmét: ha fej, akkor olyan kockával dobunk, amelynek 2 piros és 4 fehér lapja van; ha írás, akkor olyannal, amelynek 3 piros és 3 fehér lapja van.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kockával pirosat dobunk?**

b) **Ha pirosat dobtunk, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az érmén fej volt?**

47. (E) Feldobunk egy szabályos érmét: ha fej az eredmény, akkor 1 - szer, ha írás, akkor 2 - szer dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz 6 – os dobás?

48. (E) Ha egy kockával 1 és 4 közötti számot dobunk, akkor egy 3 piros és 5 fehér golyót, ha 5 – öst vagy 6 – ost dobunk, akkor egy 3 piros és 2 zöld golyót tartalmazó dobozból húzunk egyet.

***a)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk?**

***b)* Ha pirosat húzunk, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy első dobozból való?**

49. (E) Egy játékosnak 2 érme van a zsebében, egy szabályos és egy olyan, amelyiknek mindkét oldalán fej van. Egy érmét véletlenszerűen kiválaszt, és feldobja kétszer. Ha 2 fejet kapott, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a szabályost választotta?

50. (E) Egy egyetemi vizsgán az A szakos hallgatók $70\,\%$ - a, a B szakos hallgatók $55\,\%$ - a szerepel sikeresen. Az A szakos hallgatók az évfolyam $20\,\%$ - át teszik ki. Mennyi a annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázik?

51. (E) Egy egyetemi vizsgán az A szakos hallgatók $60\,\%$ - a, a B szakos hallgatók $80\,\%$ - a szerepel sikeresen. Az A szakos hallgatók az évfolyam $15\,\%$ - át teszik ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott hallgató megbukik a vizsgán?

52. (E) Egy főiskolán a hallgatók $45\,\%$ - a elsőéves, $30\,\%$ - a másodéves, a többiek felsőbb évesek. Annak valószínűsége, hogy egy hallgató félévi vizsgaátlaga legalább közepes, rendre $\frac{7}{20}, \frac{12}{25}$ és $\frac{3}{5}$. Ha egy találomra kiválasztott hallgató vizsgaátlaga közepesnél gyengébb, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az illető elsőéves?

53. (E) Egy egyetem első évfolyamán a nappali tagozatosok $10\ \%$ - a vizsgázott jelesre analízisből, ugyanez az arány a levelező tagozatosok között $7\ \%$, míg a távoktatásban tanulók között $5\ \%$ volt. Az egyes tagozatok létszámról tudjuk, hogy a nappali tagozatosok másfélszer annyian vannak, mint a levelező tagozatosok és a távoktatásban részt vevők összesen, továbbá a levelező tagozatosok háromszor annyian vannak, mint a távoktatásban tanulók. Az évfolyam létszáma 150 fő.

a) **Véletlenszerűen kiválasztva egy hallgatót az évfolyamból, mennyi annak a valószínűsége, hogy ő jelesre vizsgázott analízisből?**

b) **Ha egy véletlenszerűen kiválasztott tanuló jelesre vizsgázott, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy ő levelező tagozatos?**

c) **A levelező tagozatosok évfolyam – találkozót szerveznek, ahol mindenki két különböző menüből választhat, és mivel senki nem ismeri a helyet, ezért mindenki sorsolással dönti el, hogy mit egyen. (A menüket azonos eséllyel választják.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kettes menüt legfeljebb 5 fő választja?**

54. (E) Egy céllövöldében 3 rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben 3 darab található, melyekkel $0,5$ a találat valószínűsége. A második rekeszben 1 darab van, s ezzel $0,7$ a valószínűsége a találatnak. A harmadik rekeszben pedig 2 darab található, melyekkel $0,8$ valószínűséggel találunk célt. Véletlenszerűen választunk egy puskát.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a puskával célt találunk?**

b) **Ha a puskával célt találunk, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az a második rekeszből való?**

55. (E) Egy gyakorlatban résztvevő 18 lövész négy csoprotba sorolható úgy, hogy közülük öten $0,8$, heten $0,7$, négyen $0,6$ és ketten $0,5$ valószínűséggel találnak a céltáblára. Véletlenül meglátunk közülük egy lövészt, aki egy lövést ad le, de ez nem talál a céltáblára. Melyik csoporthoz tartozik a legnagyobb valószínűséggel ez a lövész és mennyi ez a valószínűség?

56. (E) Egy lövésznek két puskája van, ezek látszólag egyformák. Az egyik puskával minden lövésnél $0,9$ valószínűséggel, a másikkal $0,6$ valószínűséggel találja el a céltáblát. Az egyik fegyvert véletlenszerűen kiválasztja, és azzal lövéseket ad le a céltáblára.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első lövés talál?**

b) **Ha az első lövés talált, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy azzal lőtt, amelyikkel nagyobb valószínűséggel talál?**

57. (E) Egy vegyes amatőr röplabdacsapatban 2 lány és 4 fiú van. Egy lány $\frac{1}{18}$ valószínűséggel üt védhetetlen nyitást, egy fiú $\frac{1}{5}$ valószínűséggel. Ha kockadobással döntik el, hogy ki legyen az első nyitó, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az első nyitás védhetetlen lesz?

58. (E) Egy üzemben 3 gépsoron gyártanak azonos termékeket. Az első gépsor az össztermelés $40\ \%$ - át állítja elő, a másik kettő azonos arányban a többit. Az első gépsor termékeinek $5\ \%$ - a nem első osztályú, a többi igen, a másodiknál ez a szám $7\ \%$, a harmadiknál $10\ \%$. Az elkészült termékek teljes mennyiségéből kiválasztunk egy darabot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a termék első osztályú?

59. (E) Egy cégnél 4 műszakban gyártanak egy dísztárgyat. A 4 műszak napi termelése rendre: $130; 100; 120; 150$ darab tárgy. Az egyes műszakok termékei közül átlagosan rendre $10\ \%$; $5\ \%$; $15\ \%$; $10\ \%$ összetörik. Kiveszünk az elmúlt 4 műszak termékei közül egyet, s azt átjuk, hogy eltört. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a leglassabban dolgozó műszakban készült?

60. (E) Egy csavarokat gyártó cégnél 3 különböző korú gyártósor működik párhuzamosan. Az első napi $4\ 000$, a második napi $4\ 500$, míg a legújabb napi $5\ 500$ csavart gyárt. Az egyes gépeken a selejtes termékek százalékos aránya rendre: $5\ \%$, $3\ \%$ és $8\ \%$. A nap végén az egyes sorokról lejött termékeket összekeverik. Az egész napi termelésből megnézünk egy csavart, és azt látjuk, hogy selejtes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második gyártósoron készült?

61. (E) Egy üzemben 3 gépen gyártanak azonos alkatrészeket. A termelés $20\ \%$ - át az első, $35\ \%$ - át a második, a többit a harmadik gép adja. Az első gép $2\ \%$, a második $4\ \%$, a harmaik $6\ \%$ selejttel dolozik. A teljes termelésből kiválasztunk egy alkatrészt, ami selejtes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az nem az első gépen készült?

62. (E) Két gépen azonos típusú csavarokat gyártanak, az első gépen háromszor annyit, mint a másodikon. Az első gép termékeinek $4\ \%$ - a, a másodiknak $3\ \%$ - a selejtes. Kiválasztunk véletlenszerűen egy csavart, amely selejtes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy azt az első gép gyártotta?

63. (E) Egy géphez szükséges alkatrészt két helyről szerzünk be, az egyik helyről származók hibátlan működésének valószínűsége $0,95$, a másik helyről szállítottaknál pedig $90\ \%$. Jelenleg az első típusúból 8 darab, a második fajtából 12 darab van összekeverve. Találomra kiveszünk egy alkatrészt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az nem hibátlan?

64. (E) Egy terméket 60 darabos csomagolásban szállítanak. A csomagok negyede 1 hibásat, másik negyede 2 hibásat tartalmaz, a többiben nincs hibás. Egy találomra kiválasztott csomagból kiveszünk 2 terméket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hibátlanok?

65. (E) Egy műhelyben 3 műszakban termelnek azonos fajta árut. Egy napon az összes termelt áruból az első műszakban 40 %, a másodikban és a harmadikban $30-30$ % készült. Az első műszakban készült áruk 5 % - a, a másodikban gyártottak 7 % - a, a harmadikban termeltek 10 % - a hibás. A 3 műszakban elkészült teljes mennyiségből a minőségellenőr egy darabot találomra kiválaszt és megvizsgál. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez hibátlan áru?

66. (E) Egy bizonyos készüléket $10-10$ darabos tételekben szállítanak. A tételek fele csupa hibátlan készüléket tartalmaz, a többi között azonos eséllyel található 1, illetve 2 hibást tartalmazó tétel. Kiválasztunk egy tételből 2 készüléket, és mindkettőt hibátlannak találjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan tételből választottunk, amelyben 2 hibás volt?

67. (E) Televízió – képcsövek kísérleti gyártását végzik egy gyárban. Három tétel készül el. Az első két tétel a teljes mennyiség egy - egy negyedét, a harmadik tétel a felét adja. A vizsgálat során kiderül, hogy az előírt működési óraszámot az első tételnek csak a 10 % - a, a másodiknak 20 % - a, a harmadiknak 25 % - a éri el. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a teljes mennyiségből egy találomra kiszemelt képcső az előírt ideig működik?

68. (E) Egy forgácsoló üzemben készült munkadarabok 96 % - a felel meg a súlyszabálynak. A minőség - ellenőrzés során az elkészült munkadarabok egy részét megvizsgálják, a súly szempontjából szabványos darabok 98 % - a bizonyul alakra jónak, a nem szabványos súlyú darabokból pedig 5 % - ot nyílvánítanak alakra jónak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy darab, amely a minőségellenőrzésen alakra jónak bizonyul, megfelel a súlyszabványnak?

69. (E) Egy üzemben gépeket gyártanak. Az első szalagon naponta 100 gép készül, melyből 7 % selejt. A második szalagon 150 gépet gyártanak, s ebből 5 % nem működik. A harmadik szalagon pedig 200 gép készül, amiből 8 % selejt. A gépeket a nap végén egy raktárba viszik. Kiválasztunk egy gépet.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gép működik?**

b) **Ha nem működik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az a második szalagon készült?**

70. (E) Egy személygépkocsikat gyártó üzemben 3 műszakban állítanak elő autókat. Az egyes napszakokban nem egyenletes a termelés hatékonysága. Az első műszakban $1\ \%$, a második műszakban $0,8\ \%$, a harmadikban pedig $2\ \%$ a selejt aránya. Az egy napon előállított autók $30\ \%$ - át az első műszak, $40\ \%$ - át a második műszak és a maradék $30\ \%$ - ot a harmadik műszak állítja elő.

a) **Ha véletlenszerűen választunk egy autót a legyártottak közül, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az selejtes?**

b) **Ha egy selejtes autót vásárolunk, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy azt az első műszakban gyártották?**

71. (E) Egy számítógépgyár 3 távol - keleti cégtől szerzi be ugyanazt az alaplapot: egy kínai, egy tajvani és egy koreai cégtól. A kínai beszállítótól az alaplapok $45\ \%$ - át, melyek $0,5\ \%$ - a hibás, a tajvani cégtől az alaplapok $30\ \%$ - át, melyből minden 100. hibás. A maradék alaplapokat a koreai cég gyártja $3,5\ \%$ - os hibaaránnyal.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alaplapot véletlenszerűen kiválasztva, az jó lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alaplapot véletlenszerűen kiválasztva, az jó lesz, feltéve, hogy kínai a beszállító?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alaplapot véletlenszerűen kiválasztva, az nem koreai, feltéve, hogy jó?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alaplapot véletlenszerűen kiválasztva, az jó, feltéve, hogy nem koreai?**

72. (E) Egy nyári délután annak a valószínűsége, hogy sétálni megyünk $0,75$. Amennyiben otthon maradunk, akkor $0,4$ a valószínűsége annak, hogy fagyizunk. Annak a valószínűsége, hogy fagyizunk $0,3$.

a) **Mennyi egy délután annak a valószínűsége, hogy fagyizunk, ha sétálni megyünk?**

b) **Mennyi egy délután annak a valószínűsége, hogy otthon maradunk és fagyizunk?**

c) **Mennyi egy délután annak a valószínűsége, hogy sétálunk és fagyizunk?**

73. (E) Egy esős vidéken a meteorológusok megfigyelései alapján megállapították a nyári hónapokra vonatkozólag, hogy júniusban (30 nap) 45 %, júliusban (31 nap) 20 % és augusztusban (31 nap) 15 % valószínűséggel esik az eső. Figyelembe véve a nyári hónapok napjainak számát, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy nyári napon:

a) **esik az eső?**

b) **június van, feltéve, hogy esik az eső?**

c) **nem augusztus van, feltéve, hogy nem esik az eső?**

74. (E) Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a járművek 50 % - a személyautó, 35 % - a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 15 % - ánál, a teherautók 20 % - ánál, az egyéb kategóriájú járművek 35 % - ánál valami műszaki probléma fedezhető fel.

a) **Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy a műszaki állapota kifogásolható?**

b) **Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor teherautó?**

75. (E) A B_1 esemény jelentse azt, hogy elromlik az autó motorja. A B_2 esemény jelentse azt, hogy elromlik az autó akkumulátora. A B_3 esemény jelentse azt, hogy elromlik a hűtő. Tudjuk, hogy $B_1 + B_2 + B_3 = H; B_i \cdot B_j = \emptyset\ (i \neq j)$. Tudjuk továbbá, hogy $P\ (B_1) = 0,1$, $P\ (B_2) = 0,7$ és $P\ (B_3) = 0,2$. Az A esemény jelentse azt, hogy az autó működésképtelen. Tudjuk azt is, hogy $P\ (A \mid B_1) = 0,8$, $P\ (A \mid B_2) = 0,15$ és $P\ (A \mid B_3) = 0,3$. Ezek a feltételes valószínűségek azt jelentik, hogy egyes hibák előfordulása esetén milyen valószínűséggel lesz működésképtelen az autó.

a) **Mekkora annak a valószínűsége, hogy működésképtelenné válik az autó?**

b) **A parkolóban egy véletlenszerűen kiválasztott autó rossz. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek oka az akkumulátor meghibásodása?**

76. (E) Tegyük fel, hogy a férfiak 5 % - a és a nők $0,25$ % - a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiből álló csoportból 1 személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?

77. (E) Egy hideg téli napon Zoli sapka nélkül megy iskolába, így 80 % esélye van, hogy megfázik. Ha megfázik, akkor 75 % eséllyel kapja el az influenzát, ha nem fázik meg, akkor 25 % eséllyel. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem lesz influenzás?

78. (E) Egy gyógyszerkísérlet során a kísérletben részt vevő betegek $30\ \%$ - ának az A, $50\ \%$ - ának a B, a többieknek a C gyógyszert adták be. Az A gyógyszert szedők $70\ \%$ - a; a B – t szedők $60\ \%$ - a; a C – t kapók $85\ \%$ - a gyógyult meg.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott a kísérletben résztvevő beteg meggyógyult?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha a felépült betegek közül választunk egy főt, az a B készítményt kapta?**

79. (E) Egy országban a népesség $4\ \%$ - a cukorbeteg. Egy nem teljesen pontos gyorsteszt szolgál a betegség felismerésére. A teszt a cukorbetegek $95\ \%$ - ánál ad pozitív jelzést, de az egészségesek $2\ \%$ - ánál szintén pozitív jelzést ad.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a teszt pozitív eredményt ad?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a teszt pozitív, de a személy egészséges?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy téved a teszt?**

80. (E) Egy ország lakosságának egy ezreléke szenved egy bizonyos betegségben. Ezt a betegséget nem lehet egyszerűen felismerni, ezért egy tesztet használnak a kimutatására. Ez a tesz a betegek $99,9\ \%$ - át betegnak mutatja. Sajnos viszont az egészséges emberek közül is kb. minden tízezrediket betegnek mutatja.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy emberen a tesztet elvégezve őt betegnek mutatja?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha valakit a teszt betegnek nyilvánít, akkor ő valóban beteg?**

81. (E) Egy bizonyos vírus jelenlétének kimutatására vértesztet alkalmaznak. A teszt előzetes vizsgálatok alapján $1\ 000$ fertőzöttből 998 esetben mutat pozitív eredményt. Különböző okokból azonban 100 nem fertőzöttből 5 esetben pozitívat mutat, azaz tévesen riaszt. Becslések szerint egy nagyváros lakói közül legfeljebb egy ezrelék lehet az adott vírussal fertőzött. Valakin elvégzik a tesztet, és pozitívnak találják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy tényleg fertőzött?

82. (E) Egy biológiai kísérlet során 100 egyedet három - $20; 30;$ illetve 50 egyedből álló – csoportba osztanak, és az első csoport 20 egyedét gyenge, a második csoport 30 egyedét közepes erősségű, a harmadik csoport 50 egyedét erős hatóanyaggal oltják be. A csoportokat ezután külön – külön tárolják. Megállapítják, hogy az oltás hatására az első csoportból 3, a másodikból 10, a harmadikból 39 megy keresztül valamilyen meghatározott változáson. Eztuán a csoportok elkülönítését megszüntetik. Ha az összes egyedből egy egyedet találomra kiválasztunk és ennek vizsgálata azt mutatja, hogy nem ment keresztül változáson, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed a második csoportból való?

83. (E) Egy régióban bekövetkezett madárpusztulásért 3 ipari vállalat tehető felelőssé. A mérgező anyag kibocsátás eloszlása: $26\,\%; 44\,\%; 30\,\%$. Mérések szerint az egyes üzemek mérgező anyag kibocsátása esetén a madárpusztulás valószínűsége $0,3; 0,5; 0,2$.

***a)* Mekkora a madárpusztulás teljes valószínűsége?**

***b)* Mekkora bírságot szabjon ki a madárpusztulásért a bíróság, ha az elhullott madarak értéke 30 millió forint, és nem ismeret, hogy ki a szennyezés kibocsátója?**

84. (E) Egy kereskedő egy bizonyos gyümölcsöt 3 termelőtől szerez be. A vásárolt mennyiség $40\,\%$ - a az első termelőtől származik, ennek fele első osztályú. A második termelőtől az összmennyiség $35\,\%$ - át szerzi be, ennek $70\,\%$ - a első osztályú, míg a harmadik termelő csak első osztályú árut szállított. Kiválasztunk egy gyümölcsöt, és az másodosztályú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az a második termelőtől származik?

85. (E) Egy üzletbe 4 termelőtől szállítanak almát. Az első termelőtől való a mennyiség $\frac{1}{10}$ – ed része, amelyől $40\,\%$ első osztályú. A második termelőtől szállítják a tétel $\frac{1}{4}$ – ed része, amely $50\,\%$ - ban első osztályú. A harmadiktól rendelték meg a mennyiség $\frac{2}{5}$ – ed részét, ebből $20\,\%$ elsőosztályú áru. A többi gyümölcs a negyedik termelőtől kerül az üzletbe és mind elsőosztályú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az üzletben találomra kiválasztva egy almát, az elsőosztályú lesz?

86. (E) Egy üzletben 3 termelőtől összesen $1200\ kg$ burgonyát szállítanak. A szállított mennyiség $\frac{1}{6}$ - része az első, $\frac{1}{4}$ - része a második, míg a többi a harmadik termelőtől származik. Az első termelő burgonyájának $\frac{1}{5}$ - e, a másodikénak $\frac{1}{3}$ - a, a harmadikénak pedig $\frac{1}{2}$ - e első osztályú. A raktárban a 3 forrásból származó árut összekeverik.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott burgonya első osztályú lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen választott első osztályú burgonya a második termelőtől származik?**

87. (E) Egy őrzővédő cég három tagja 24 órás váltásban látja el egy raktár őrzését. Attila 3 napot, Béla és Csongor $2-2$ napot dolgozik hetente. Attila az esetek 90 % - ában, Béla 95 % - ában, Csongor pedig 92 % - ában elfogja a betörőket.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott időpontban érkező betörőt nem sikerül elkapni?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha elfognak egy betörőt, akkor Attila, Béla, illetve Csongor volt eredményes?**

88. (E) Egy tanár két osztályban érettségiztetett. A feleletek 58 % - át az A osztályban hallotta, a többit a B – ben. Az A – ban a diákok 20 % - a, a B – ben 36 % - a kapott dicséretet a szép feleletéért.

a) **Ha a tanárnak véletlenszerűen eszébe jut majd egy érettségi felelet, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy szívesen fog rá emlékezni?**

b) **Ha a tanárnak eszébe jut majd egy szép felelet, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a B osztályba járt a felelő diák?**

89. (E) Egy osztályban a fiúk és lányok aránya $1:2$. A lányoknak a negyede imádja a kosárlabdát, a fiúknak pedig a fele.

a) **Az osztályból véletlenszerűen kiválasztva valakit, mennyi annak az esélye, hogy ő szereti a kosárlabdát?**

b) **Az osztályból véletlenszerűen kiválasztva valakit, megtudtuk, hogy szereti a kosárlabdát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ő lány?**

90. (E) Egy társasház második emeletén 3 lakás található. Az építtető az eredeti tervekhez képest változatott a lakásokon. A változtatások 45 % - a a $B1$ lakásban, 35 % - a $B2$ – ben, a többi a $B3$ – ban történt. A $B1$ lakás tulajdonosa 60 % - ban, a $B2$ lakásé 30 % - ban, a $B3$ lakásé pedig 70 % - ban nem örült a változtatásoknak.

a) **A szinten egy változtatást véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy örültek neki?**

b) **Ha a szinten egy változtatást véletlenszerűen kiválasztva, a kiválasztott változtatásnak nem örültek, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a változás a $B1$ lakásban történt?**

91. (E) Két város közötti távíróösszeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$ – e vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$ – a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és a vonalak aránya $5:3$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha a vevőoldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított?

92. (E) Egy zöldség - kiskereskedőhöz egy alma és egy körte szállítmány érkezett. A szállítás során a körteszállítmány negyede veszített az értékéből, az almaszállítmány 60 % - a túlérett, a gyümölcsök többi része első osztályú maradt. A kiskereskedő, mielőtt átvette a két szállítmányt, ellenőrizte az áru minőségét. Kiválasztott az egyik szállítmányból véletlenszerűen egy gyümölcsöt. A kiválasztott gyümölcs első osztályúnak bizonyult, ezért visszatették a helyére. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha ugyanabból a gyümölcsfajtából megint kivesz egy darabot, az ismét első osztályú lesz?

93. (E) Egy idős úr memóriája már nem a régi, a teendőinek harmadát el szokta felejteni. Ha reggel nem veszi be a gyógyszerét, akkor biztosan rosszul lesz délelőtt. Ha beveszi a gyógyszert, akkor 90 % valószínűséggel nem lesz rosszul aznap. Mekkora valószínűséggel érzi ma jól magát a bácsi?

94. (E) Egy idős házaspár minden este együtt vacsorázik: az egyikük hidegtálat, vagy meleg ételt készít. Ha a néni van a konyhában, akkor 10 - ből 3 - szor van hidegtál és 7 - szer meleg vacsora. Ha a bácsi készíti a vacsorát, akkor $0,1$ valószínűséggel kerül meleg étel az asztalra és $0,9$ valószínűséggel van hidegtál. Mekkora valószínűséggel készítette a bácsi a vacsorát, ha tudjuk, hogy ma meleg ételt esznek?

95. (E) Peti szerint, ha 5 - ös lesz a matekdolgozata, akkor a szülei 80 % eséllyel elengedik bulizni. Ha nem, akkor csak 5 % az esélye. A dolgozat megírása után úgy gondolja, hogy 50 % az esélye, hogy 5 - ös legyen a dolgozata. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Petit elengedik este a buliba?

96. (E) Feldobunk egy érmét, majd dobunk egy kockával. Ha fej volt az érmén és a kocka 3 – nál kisebbet mutat, akkor Rákóczi - túróst veszünk, különben dobostortát. Ha írás volt az érmén és a kocka párosat mutat, akkor túrós bélest veszünk, különben meggyes rétest. Mekkora valószínűséggel eszünk meggyes rétest vagy dobostortát?

97. (E) Flóra, ha eléri a vonatot, akkor 90 % az esélye, hogy időben hazaér. Ha nem éri el, akkor 100 %, hogy csak holnap ér haza. Mekkora valószínűséggel kell majd rá várni valamennyit, ha az esetek 60 % - ában el szokta érni a vonatot?

98. (E) Kockával dobunk, utána feldobunk egy érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.

***a)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 fejet kapunk?**

***b)* Ha az érmével dobtunk 3 fejet, mennyi annak a valószínűsége, hogy a kockán 2 – es volt?**

***c)* Ha az érmével dobtunk 3 fejet, mennyi annak a valószínűsége, hogy a kockán 4 – es volt?**

99. (E) Ismét megemelték a buszjegyek árát, ezért Tamás elhatározta, hogy a következő héten munkába menet reggelente nem fog lyukasztani egyszer sem. Minden nap $0,3$ valószínűséggel száll fel ellenőr a buszra, és ha már felszállt, akkor 95 % eséllyel el is kapja a potyautast.

***a)* Mekkora valószínűséggel ússza meg Tamás a büntetést a következő hét munkanapjain?**

***b)* Mire számíthat, hányszor fogják megbüntetni a következő hét során?**

***c)* Mekkora valószínűséggel büntetik meg pontosan kétszer?**

***d)* Mekkora valószínűséggel kapják el először éppen az utolsó napon, pénteken?**

***e)* Feltéve, hogy Tamást egyszer sem büntették meg, mekkora valószínűséggel volt minden nap ellenőr a buszon?**

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 − 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok