Valószínűségszámítás, független események

DEFINÍCIÓ: (Gyakoriság, relatív gyakoriság)
Amennyiben egy kísérletet n - szer megismételve egy A esemény k - szor következik be, akkor a k értéket az A esemény gyakoriságának, a $\frac{k}{n}$ hányadost a relatív gyakoriságának nevezzük.

Megjegyzés:

- *A lehetetlen esemény relatív gyakorisága* 0, *a biztos esemény relatív gyakorisága* 1.
- *Bármely esemény relatív gyakoriságára igaz a következő:* $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$.

DEFINÍCIÓ: (Valószínűség)
Minden véletlen A eseményhez hozzárendelhető egy 0 és 1 közé eső szám, amely megmutatja, hogy a kísérletet elég sokszor megismételve, az eseteknek mekkora hányadában következik be az esemény. Ezt az eseményre jellemző számot az esemény valószínűségének nevezzük. Jele: $P\ (A)$.

Megjegyzés:

- *Az A esemény valószínűsége az az érték, amelyhez a kísérletek számának növelésével egyre közelebb kerül a relatív gyakoriság, vagyis ami körül a relatív gyakoriság ingadozik.*
- *Ha a relatív gyakoriság nem mutat stabilitást, akkor az adott esemény valószínűségét nem tudjuk értelmezni.*
- *A körülményekkel együtt változhat egy adott esemény valószínűsége is.*

<u>Valószínűségi axiómák:</u>
Minden A eseményhez rendeljünk hozzá egy valós számot, amit az A esemény valószínűségének nevezünk és $P\ (A)$ – val jelölünk, a következő kikötésekkel:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P\ (I) = 1$ és $P\ (\emptyset) = 0$
- ha az A és B egymást kizáró események, akkor annak a valószínűsége, hogy valamelyik megvalósul: $P\ (A + B) = P\ (A) + P(B)$.

A valószínűség tulajdonságai:

- Ha A és B két tetszőleges esemény, akkor $P\ (A - B) = P\ (A) - P\ (A \cdot B)$.
- Az A és $\overline{A}$ valószínűségének összege: $P\ (A) + P\ (\overline{A}) = 1$.
- Ha $A_1; A_2; \dots; A_n$ teljes eseményrendszert alkot, akkor $P\ (A_1) + P\ (A_2) + \cdots + P\ (A_n) = 1$.
- Ha az A esemény bekövetkezésével a B esemény is bekövetkezik, akkor $\mathrm{P}\ (\mathrm{A}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{B})$.

DEFINÍCIÓ: (Klasszikus valószínűségi mező)
Ha egy eseménytér nem üres, véges, és elemi eseményeinek bekövetkezése egyenlő valószínűségű, akkor az eseményteret az eseményeivel és a köztük értelmezett műveletekkel (összeadás, szorzás, kivonás, komplementer), klasszikus valószínűségi mezőnek nevezzük.

TÉTEL:
Ha egy klasszikus valószínűségi mező eseménytere H, továbbá $|H| = n$ (ahol n pozitív egész szám) és elemi eseményei $E_1; E_2; \dots;\ E_n$, akkor $P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_n) = \frac{1}{n}$.

TÉTEL: (Klasszikus valószínűségszámítás alaptétele)
Ha egy klasszikus valószínűségi mező eseménytere H, továbbá $|H| = n$ és az A eseményre pedig teljesül, hogy $|A| = k$ (ahol k és n különböző pozitív egész szám), akkor $P\ (A) = \frac{k}{n}$.

Megjegyzés:

- *Ha az elemi események, vagyis az összes lehetséges esetek száma n és az A esemény k elemi eseményből áll, vagyis a kedvező kimenetelek száma k, akkor az A esemény valószínűsége:* $P\ (A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\textit{kedevező esetek száma}}{\textit{összes lehetséges eset száma}}$.
- *Mivel a tört értékeit általában kombinatorikus módszerekkel számíthatjuk ki, így ezt kombinatorikus valószínűségnek is szokás nevezni.*

TÉTEL:
Tetszőleges A eseményre teljesül a következő: $P\ (A) = 1 - P\ (\overline{A})$.

TÉTEL:
Ha $A \subseteq B$, akkor teljesül a következő: $P\ (B - A) = P(B) - P(A)$.

TÉTEL:
A lehetetlen esemény valószínűsége $P\ (\emptyset) = 0$.

<u>*Megjegyzés:*</u>
Az állítás megfordítása csak véges eseményalgebrában igaz. Amennyiben az elemi események száma végtelen, akkor a képlet nevezőjében végtelen áll, s ha a számláló véges, akkor az eredmény 0 *lesz, vagyis nem csak lehetetlen eseménynek lehet* 0 *a valószínűsége. (példa: geometriai valószínűség esetén egy pont kiterjedése, hossza* 0*)*

TÉTEL:
Tetszőleges A és B eseményre teljesül a következő: $P\ (A + B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \cdot B)$.

<u>*Megjegyzés:*</u>
A képlet több eseményre is alkalmazható:

$$P\ (A + B + C) = P\ (A) + P\ (B) + P\ (C) - P\ (A \cdot B) - P\ (B \cdot C) - P\ (A \cdot C) + P\ (A \cdot B \cdot C).$$

DEFINÍCIÓ: (Független események)
Két eseményt függetlennek tekintünk, ha az egyik esemény bekövetkezésének semmilyen hatása nincs a másik esemény bekövetkezésére. Jelöléssel: $P\ (A \cdot B) = P\ (A) \cdot P\ (B)$.

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Az, hogy két esemény független, nem jelenti azt, hogy a két esemény kizárja egymást.*
- *Két esemény függetlensége azt jelenti, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem teszi sem valószínűbbé, sem valószínűtlenebbé a másik esemény bekövetkezését. Egyik esemény sem befolyásolja a másik esemény valószínűségét.*
- *Ha Az* A *esemény független a* B *eseménytől, akkor a* B *is független az* A *- tól.*
- *Az összefüggés több események szorzatára is fennáll.*

<u>**Nagy számok törvénye:**</u>
Annak valószínűsége, hogy a sokszor elvégzett kísérlet során egy A esemény relatív gyakorisága és a valószínűség különbségének abszolútértéke kisebb legyen egy adott, tetszőlgesen kicsi pozitív számnál, annál nagyobb, minél nagyobb a kísérletek száma. Annak valószínűsége, hogy az eltérés bármilyen kis pozitív számnál nagyobb legyen, egyre kisebb.

<u>*Megjegyzés:*</u>
Egy kísérletet elég sokszor elvégezve, az esemény relatív gyakorisága nagy valószínűséggel jól megközelíti az esemény valószínűségét, egy meghatározott érték körül stabilizálódik.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

Dobókocka

1. **(K) Két dobókocka közül az egyik manipulált, azaz a tömegeloszlása nem egyenletes. Mindkét kockával 100 dobást végzünk, s az alábbi eredményt kapva, melyik kocka lehet inkább a manipulált?**

A kocka	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
gyakoriság	**28**	**17**	**13**	**15**	**22**	**5**
B kocka	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
gyakoriság	**18**	**14**	**20**	**16**	**19**	**13**

2. **(K) Egy kísérletsorozatban 552 kockadobásból 85 – ször született 6 - os, egy másik sorozatban pedig 674 dobásból 115 – ször. Melyik eredmény relatív gyakorisága áll közelebb az elméleti valószínűséghez?**

3. **(K) Egy dobókockával 2 - szer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyik szám prím lesz? Mennyi lesz az esély, ha 3 dobókockával dobunk?**

4. **(K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy felül különböző számokat látunk, ha egyszerre dobunk 2 dobókockával? Nagyobb lesz – e az esély, ha 3 dobókockával dobunk?**

5. **(K) Egy dobókockával 2 - szer dobva leírjuk egymás mellé a számokat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott kétjegyű szám négyzetszám lesz?**

6. **(K) Egy dobókockával 2 - szer dobva leírjuk egymás mellé a számokat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második szám lesz a nagyobb?**

7. **(K) Egy dobókockával 2 - szer dobva leírjuk egymás mellé a számokat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy így egy kétjegyű páros számot kapunk?**

8. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata egy kétjegyű pozitív egész szám?

9. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata prímszám?

10. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata köbszám?

11. (K) Egy dobókockával 2 - szer dobva, melyiknek nagyobb a valószínűsége: a szorzat értéke páros, vagy a szorzat értéke páratlan lesz?

12. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható lesz 9 – cel?

13. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható 7 – tel?

14. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható 10 – zel?

15. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 5 lesz?

16. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legfeljebb 4 lesz?

17. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott számok összege 9 – nél kisebb lesz?

18. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott számok összege prímszám lesz? Nagyobb lesz – e az esély, ha 3 dobókockával dobunk?

19. (K) Feldobunk egyszerre 3 dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 kockával legfeljebb 4 – et dobunk?

20. (K) Egy kockával 3 - szor dobunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata 32 – vel osztható lesz?

21. (K) Feldobunk 3 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott számok összege 15 lesz?

22. (K) Feldobunk 3 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 16 lesz?

23. (K) Egy dobókockával 3 - szor dobva, melyiknek nagyobb a valószínűsége: az összeg értéke páros, vagy az összeg értéke páratlan lesz?

24. (K) Egy kockával 3 - szor dobunk egymás után, és a kapott eredményeket a dobások sorrendjében egymás mellé leírjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy így 3 – mal osztható háromjegyű számot kapunk?

25. (K) Egy kockával 3 - szor dobunk egymás után, és a kapott eredményeket a dobások sorrendjében egymás mellé leírjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy így 9 – cel osztható háromjegyű számot kapunk?

26. (K) Egy kockával 3 - szor dobunk egymás után, és a kapott eredményeket a dobások sorrendjében egymás mellé leírjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy így a számjegyek szorzata négyzetszám lesz?

27. (K) Egy dobókockával 4 - szer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 1 - szer fordul elő a 3?

28. (K) Egy dobókockával 4 - szer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 1 - szer dobunk 6 - ost?

29. (K) Egy dobókockával 5 - ször dobva mennyi annak a valószínűsége, hogy minden dobás páros lesz?

30. (K) Egyszerre dobunk fel 5 szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 darab 3 - mal osztható számot dobunk?

31. (K) Feldobunk egyszerre 5 szabályos dobókockát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legkisebb dobott szám a 3 lesz?

32. (K) Egy szabályos dobókockát egymás után 5 - ször feldobunk, és a kapott eredményeket a dobások sorrendjében egymás mellé leírjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 4 – gyel osztható ötjegyű számot kapunk?

33. (K) Egy szabályos dobókockával 5 - ször dobunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindig ugyanazt a számot dobjuk?

34. (K) Egy kockával 6 - szor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó helyen a többitől különböző szám áll?

35. (K) Egy szabályos dobókockát egymás után 6 - szor feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy minden számot kidobunk egyszer?

36. (K) Egyszerre dobunk 6 darab szabályos dobókockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 kockán azonos pontszám lesz felül?

37. (K) Egy szabályos dobókockával 14 - szer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 darab 6 - os szerepel az eredmények között?

38. (K) Melyiknek nagyobb a valószínűsége: 1 kockával elsőre 6 – ost dobni, vagy 1 kockával harmadjára 1 – est dobni?

39. (K) Melyiknek nagyobb a valószínűsége: 1 kockával dobva 4 dobás között lesz 6 – os, vagy 2 kockával dobva 24 dobás között lesz egyszer mindkettőn 6 – os?

40. (K) Hagyományos dobókockával 7 - szer dobva melyiknek nagyobb a valószínűsége: 3 - szor dobunk 4 - nél kisebbet, vagy 4 – szer dobunk 3 – nál nagyobbat?

41. (K) Anna és Béla a következő játékot játsszák. Dobnak 2 kockával és ha a dobott számok szorzata vagy összege 3 - mal osztható, akkor Anna nyer, más esetben pedig Béla nyeri a játékot. Kinek van nagyobb esélye a győzelemre?

42. (K) Csilla és Dénes a következő játékot játsszák. Dobnak 2 kockával és ha a dobott számok szorzata és összege 3 - mal osztható, akkor Csilla nyer, más esetben pedig Dénes nyeri a játékot. Kinek van nagyobb esélye a győzelemre?

43. (K) Ildi és Zoli játszik. Ildi 1 dobókockával 2 - szer dob, Zoli pedig 1 – szer. Ildi akkor kap 1 pontot, ha 3 - mal osztható az összeg, Zoli pedig akkor, ha a dobott szám páros. Ha 3 kört játszanak, akkor kinek nagyobb az esélye a győzelemre?

44. (K) Egy dobókockával, ha párosat dobunk, akkor 0 - t írunk le, ha páratlant, akkor pedig 1 - et. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6 dobás után egy 6 - tal osztható hatjegyű számot kapunk?

45. (K) Egy szabályos dobókocka 3 oldalán 1 – es, 3 oldalán pedig -1 – es van. A kockát 5 - ször egymás után feldobjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege páratlan lesz?

46. (K) Egy szabályos dobókocka 2 oldalán -1 – es, 2 oldalán 0 – s és 2 oldalán pedig 1 – es van. A kockát 5 - ször egymás után feldobjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege páros lesz?

47. (K) Egy szabályos tetraéder lapjaira a $0; 1; 2; 3$ számokat írták. Két ilyen tetraéder feldobás után egy – egy szám alulra kerül. Legnagyobb valószínűséggel mennyi lesz a takart számok összege?

48. (K) Egy szabályos tetraéder lapjait megszámozzuk 1 – től 4 – ig. A tetraéderrel 5 – ször dobva a következő események közül melyiknek mennyi a valószínűsége?

A: Mindig 4 – es lesz alul.

B: Egyszer sem lesz 4 – es alul.

C: Előfordul, hogy 4 – es lesz alul.

D: Kétszer a 4 – es, háromszor az 1 – es lesz alul.

49. (K) Egyszerre dobunk 3 különböző színű szabályos oktaéderrel, amelyek lapjait 1 – től 8 – ig megszámoztuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az oktaédereken különböző számok lesznek felül a dobások után?

50. (K) A hagyományos dobókockával egyet dobunk. Komplementer események - e az alábbiak? Add meg az összegük komplementerének valószínűségét!

A: Prímszámot dobunk.

B: Összetett számot dobunk.

51. (K) Egy dobókockával 2 - szer dobunk. Jelentse az A esemény azt, hogy az összeg legalább 10, a B pedig azt, hogy legalább egyszer 6 – ost dobunk. Határozd meg az $A + B$ és az $A \cdot B$ események valószínűségét!

52. (K) Egy szabályos dobókockát feldobva jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott szám kisebb, mint 3; B pedig azt, hogy a dobott szám páratlan. Határozd meg az $A + B$ és az $A \cdot B$ események valószínűségét!

53. (K) Egyszerre dobunk 2 szabályos dobókockával. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege 9 – nél nagyobb, B pedig azt, hogy legalább az egyik kockán felül 6 – os van. Határozd meg az $A + B$ és az $A \cdot B$ események valószínűségét!

54. (K) Egyszerre dobunk 2 szabályos dobókockával. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege prím, a B pedig azt, hogy legalább az egyik kockával 6 - ost dobtunk. Határozd meg az $A+B$ és az $A \cdot B$ események valószínűségét!

55. (K) Feldobunk 2 szabályos dobókockát és tekintsük a következő eseményeket:

A: A dobott számok összege prímszám.

B: A dobott számok összege páratlan szám.

C: A dobott számok összege osztható 5 – tel.

Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$A \cdot B$ $\quad$ $A+B$ $\quad$ $A \cdot B \cdot C$ $\quad$ $A+B+C$ $\quad$ $A-B$

56. (K) Egyszerre dobunk 2 szabályos dobókockával. Jelentse A azt az eseményt, hogy legalább az egyik kockán 6 – ost dobunk, B pedig azt, hogy a dobott számok összege páros. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\overline{A}$ $\quad$ $\overline{B}$ $\quad$ $A \cdot B$ $\quad$ $A+B$ $\quad$ $\overline{A} \cdot B$ $\quad$ $A+\overline{B}$

57. (K) Egyszerre dobunk 2 szabályos dobókockával. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege páratlan, B pedig azt, hogy legalább az egyik kockán 6 - os van. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$A \cdot B$ $\quad$ $A+B$ $\quad$ $\overline{A}+B$ $\quad$ $\overline{A+B}$

58. (K) Egyszerre dobunk egy fehér és egy kék szabályos dobókockával és tekintsük a következő eseményeket:

A: Mindkét kockán 3 - mal nem osztható számot kapunk.

B: A fehér kockán legalább akkora számot kapunk, mint a kéken.

C: Mindkét kockán 5 van felül.

Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\overline{A}$ $\quad$ $\overline{B}$ $\quad$ $\overline{C}$ $\quad$ $A+B$

$A \cdot B$ $\quad$ $A \cdot C$ $\quad$ $\overline{A}+\overline{B}$ $\quad$ $\overline{A} \cdot \overline{B}$

59. (K) Egyszerre dobunk egy piros és egy zöld szabályos dobókockával és tekintsük a következő eseményeket:

A: A piroson kisebb számot kapunk, mint a zöldön.

B: A dobott számok összege legalább 7.

C: A két kockán ugyanaz a szám van felül.

Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\overline{A}$ $\quad A \cdot B$ $\quad A + B$ $\quad A \cdot \overline{B}$ $\quad A - B$ $\quad B - A$

$\overline{B}$ $\quad A + C$ $\quad A \cdot C$ $\quad \overline{A + B}$ $\quad \overline{A \cdot B}$ $\quad A + B + C$

60. (K) Egy 20 oldalú dobóikozaéder oldalaira 1 – től 20 – ig vannak felírva az egész számok. Ezzel dobva a kidobott számot vizsgáljuk. Tekintsük a következő eseményeket:

A: Legfeljebb 15 – öt dobtunk.

B: Páros számot dobtunk.

C: Összetett számot dobtunk.

D: Prímszámot dobtunk.

E: Legalább 8 – at dobtunk.

Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$A + \overline{D}$ $\quad \overline{A} \cdot B \cdot C$ $\quad A \cdot E$ $\quad \overline{B + C}$

61. (E) Egyszerre dobunk 3 olyan szabályos oktaéderrel, amelynek lapjait 1 – től 8 – ig megszámoztuk és tekintsük a következő eseményeket:

A: A három dobott szám megegyezik.

B: A három dobott szám közül legalább kettő megegyezik.

C: A három dobott szám közül legalább kettő különbözik.

D: A három dobott szám közül legfeljebb kettő különbözik.

Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\overline{A}$ $\quad A \cdot B$ $\quad A + B$ $\quad A \cdot D$ $\quad A - C$ $\quad B - A$

62. (E) Egy szabályos dobókocka 1 lapjára az 1 – es, 2 lapjára a 2 – es, 3 lapjára pedig a 3 – as szám van írva. A dobókockával 2 - szer dobunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4 lesz?

63. (E) Mennyi dobás esetén a legvalószínűbb egy dobókockával az első 6 - ost dobni?

64. (E) Egy dobókockával addig dobunk, amíg 1 – es nem lesz a dobott szám. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy egy dobássorozat legfeljebb 5 dobásból fog állni!

65. (E) Tamás a másodfokú egyenletek megoldását gyakorolja: $x^2 + b \cdot x + c = 0$ alakú egyenleteket old meg úgy, hogy a b és a c együtthatókat egy – egy kockadobással határozza meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan egyenletet ír fel, amelynek nincs valós gyöke; amelynek 1 valós gyöke van; amelynek 2 valós gyöke van?

Érme

66. (K) Feldobva 2 pénzérmét tekintsük az írások számát. Mennyi a valószínűsége az egyes kimeneteleknek?

67. (K) Egy érmével 3 – szor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind fej lesz?

68. (K) Egy érmével 3 – szor dobunk. Melyik a valószínűbb: pontosan 1, vagy pontosan 2 fejet dobunk?

69. (K) Egy érmével 3 – szor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 írást dobunk?

70. (K) Egy érmével 4 – szer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy sorrendben a következőket látjuk: fej, fej, írás, írás?

71. (K) Egy érmével 4 – szer dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobások között 2 fej és 2 írás lesz?

72. (K) Egy érmével 5 – ször dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyik ugyanaz az oldal lesz?

73. (K) Egy érmével 5 – ször dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az FIIFI kimenetel adódik?

74. (K) Egy érmével 5 – ször dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy több írást dobunk, mint fejet?

75. (K) Egy érmével 6 – szor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 4 - szer írást dobunk?

76. (K) Melyik a valószínűbb 1 pénzérmével játszva: 4 dobásból pontosan 3 fej lesz, vagy 8 dobásból pontosan 5 írás?

77. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos pénzérmével dobva először a negyedik dobás lesz írás?

78. (K) Mennyi dobás esetén a legvalószínűbb egy érmével az első fejet dobni?

79. (K) Ottó és Panni egy érmével 4 – szer dobnak: Ottó nyer, ha lesz a sorozatban 2 fej egymás után, egyéb esetben Panni nyer. Melyiknek nagyobb a nyerési valószínűsége?

80. (K) Egy érmével 4 – szer dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között legalább 1 fej van, B pedig azt, hogy legalább 2 írás van. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\overline{A}$ $\quad$ $\overline{B}$ $\quad$ $A \cdot B$ $\quad$ $A + B$ $\quad$ $\overline{A} \cdot B$ $\quad$ $A + \overline{B}$

Kártya

A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.

A francia kártyacsomag 52 lapból áll, ahol a 4 szín – káró; kör; pikk; treff - mindegyikéből $13-13$ darab van: 2; 3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; bubi; dáma; király; ász.

81. (K) A 32 lapos magyar kártya lapjaival valószínűségi kísérleteket végzünk. A 8 piros lapot megkeverés után sorba kirakjuk. Mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: A 4 figurás lap az első 4 helyen van.

B: A 4 figurás lap egymás mellett van.

82. (K) A 32 lapos magyar kártya lapjaival valószínűségi kísérleteket végzünk. A piros és a zöld lapokat összekeverjük, majd kihúzunk közülük 5 - öt. Mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

A: Mind az 5 kihúzott lap zöld.

B: A kihúzott lapok között pontosan 2 piros van.

83. (K) Egy 32 lapos magyar kártyából kiválasztunk véletlenszerűen 1 lapot.

***a)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap zöld?**

***b)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap figura?**

***c)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap zöld figura?**

***d)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap zöld vagy figura?**

***e)* Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap piros alsó vagy makk felső?**

84. (K) Egy 32 lapos magyar kártyából kiválasztunk véletlenszerűen 1 lapot.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap ász?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap piros vagy ász?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap piros és ász?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap piros, de nem ász?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap nem piros és nem is ász?**

85. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 4 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok mindegyike piros lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok mindegyike ász lesz?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között lesz alsó?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között lesz piros?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között lesz a piros ász?**

86. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 4 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 3 makk lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legfeljebb 3 zöld lesz?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 3 hetes lesz?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legalább 1 ász lesz?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 ász, 1 király és 1 felső lesz?**

87. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 4 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind különböző színű lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind különböző értékű lesz?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind különböző színű és értékű lesz?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 piros és 1 makk lesz?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 ász és 1 király lesz?**

88. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 5 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 zöld lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legfeljebb 1 alsó lesz?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legfeljebb 2 piros lesz?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legalább 3 felső lesz?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legalább 1 zöld lesz?**

89. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 5 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között lesz a tök ász és a makk hetes?**

b) **Ha mindegyik lap zöld, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a zöld hetes is köztük lesz?**

c) **Ha mindegyik lap piros, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy figurás lap is lesz közte?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 piros és 3 zöld lesz, ha ebben az esetben a kihúzás sorrendje is számít?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 ász, 2 király és 1 felső lesz, ha ebben az esetben a kihúzás sorrendje is számít?**

90. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 5 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 2 király és 2 zöld lesz?

91. (E) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 5 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között pontosan 1 pár (2 azonos értékű lap) lesz?

92. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egymás után 8 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között legalább 1 piros lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között nincs ász?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a 4 ászt kihúzzuk?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 ászt húzunk?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 ászt húzunk?**

93. (E) Egy csomag magyar kártyából kiválasztunk 10 lapot úgy, hogy a lapokat a húzások után nem tesszük vissza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott lapok között vagy pontosan 2 hetes, vagy pontosan 2 tök van?

94. (K) Egy magyarkártya paklit megkeverünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 2 helyre nem kerül piros lap?

95. (K) Egy csomag magyar kártyából 2 - szer húzunk úgy, hogy az elsőnek húzott lapot visszatesszük. Mennyi annak a valószínűség, hogy mindkétszer ugyanazt húzzuk?

96. (K) Egy csomag magyar kártyából kiveszünk 1 lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Ezután megkeverjük a csomagot, és ismét választunk 1 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez utóbbi lap nem azonos színű az elsővel?

97. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot, majd visszatesszük. Ezt megismételjük még 5 - ször.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 - szor pirosat húzunk?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 darab pirosat húzunk?**

98. (K) A magyar kártyacsomagból 7 lapot húzunk úgy, hogy a kihúzott lapot megtekintés után visszatesszük a csomagba.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között 4 figurás és 3 hetes lesz?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között legfeljebb 5 figurás lesz?**

99. (K) Egy csomag magyar kártyából Mátyás és Telma is kap 8 − 8 lapot. Anélkül, hogy megnéznék a lapjaikat, Mátyás arra fogad, hogy 2 - nél több pirosa van, Telma pedig legfeljebb 2 - re. Kinek nagyobb az esélye a nyerésre?

100. (K) Egy 32 lapos magyar kártyát 4 játékos között szétosztunk úgy, hogy mindegyik játékos 8 lapot kapjon.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a 4 ász egy játékoshoz kerül?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a 4 ász a kezdő játékoshoz kerül?**

c) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legidősebb játékoshoz kerül a piros ász?**

d) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz olyan játékos, akinek csak zöldje van?**

e) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legfiatalabb játékosnál lesz a piros király és a piros felső?**

101. (K) Melyik a valószínűbb: egy csomag magyar kártyából királyt húzni, vagy egy csomag francia kártyából figurás lapot húzni?

102. (K) Egy csomag francia kártyából kihúzunk egymás után 13 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a treff király a 13 lap között lesz?

103. (K) Egy csomag francia kártyából kiveszünk 2 lapot, a pakli tetején és alján lévő lapokat. Ha azonos színűek lesznek, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok mindegyike „számozott" lap?

104. (K) Egy csomag francia kártyából kiválasztunk 3 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind különböző színű lesz?

105. (K) Egy csomag francia kártyából Ákos és Bea is kap $6-6$ lapot. Anélkül, hogy megnéznék a lapjaikat, Ákos arra fogad, hogy legalább 1 királya van, Bea pedig arra, hogy nincs 1 sem. Kinek nagyobb az esélye a nyerésre?

106. (K) Egy csomag francia kártyából 2 - szer húzunk. Melyik esetben nagyobb a valószínűsége annak, hogy 2 hetest húzunk: ha az első lap kihúzása után a lapot visszatesszük, és a csomagot újrakeverjük, vagy ha az első kihúzott lapot nem tesszük vissza a második húzás előtt?

107. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot. Komplementer események - e az alábbiak? Add meg az összegük komplementerének valószínűségét!

A: Pirosat húzunk.

B: Hetest húzunk.

108. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott lap zöld, a B pedig azt, hogy a kihúzott lap számozott. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\boldsymbol{A \cdot B}$ $\boldsymbol{A + B}$ $\boldsymbol{A - B}$ $\boldsymbol{B - A}$ $\boldsymbol{\overline{A}}$

109. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott lap piros, a B pedig azt, hogy a kihúzott lap ász. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$\boldsymbol{A \cdot B}$ $\boldsymbol{A + B}$ $\boldsymbol{A - B}$ $\boldsymbol{B - A}$ $\boldsymbol{\overline{A}}$

110. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott lap piros vagy zöld, a B pedig azt, hogy a kihúzott lap király vagy ász. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$A \cdot B$ $\quad$ $A + B$ $\quad$ $A - B$ $\quad$ $B - A$ $\quad$ $\overline{A}$

111. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott lap piros, a B azt, hogy a kihúzott lap ász, a C pedig azt, hogy a kihúzott lap zöld figurás. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$A + B$ $\quad$ $C - B$ $\quad$ $A \cdot B$ $\quad$ $A + (B - C)$ $\quad$ $\overline{C}$

112. (K) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk egyszerre 4 lapot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott lap mindegyike zöld, a B azt, hogy a kihúzott lapok között mindegyik szín szerepel, a C pedig azt, hogy a kihúzott lapok között nincs zöld. Határozd meg az adott és a következő események valószínűségét!

$A + B$ $\quad$ $A + C$ $\quad$ $A \cdot B$ $\quad$ $A \cdot C$

Lottó

Az 5 – ös lottón 90 számból húznak ki 5 – öt úgy, hogy a golyókat nem rakják vissza.

A 6 – os lottón 45 számból húznak ki 6 – ot úgy, hogy a golyókat nem rakják vissza.

Totó: 14 mérkőzésre tippelhetünk hazai (H), vendég (V), vagy döntetlen (X) kimenetelt.

113. (K) Az 5 - ös lottóban mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan $0; 1; 2; 3; 4; 5$ találatunk lesz?

114. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 - ös lottón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy szelvénnyel játszunk? (A 6 - ös lottón legalább 2 találat kell elérni, hogy kifizetés történjen.)

115. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 - ös lottón legalább 4 találatunk lesz 1 szelvénnyel játszva?

116. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 - ös lottón legfeljebb 3 találatunk lesz 1 szelvénnyel játszva?

117. (K) Az 5 - ös lottón az egyik héten a következő számokat húzták ki: $47; 60; 65; 81; 89$. A következő heti szelvényen ezeket a számokat jelöljük meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy telitalálatunk lesz?

118. (K) Az 5 - ös lottószelvényemen ezen a héten a $7; 22; 51; 54; 78$ számokat játszottam meg. Éppen a húzást figyelem, és eddig a $78; 13; 22$ számokat húzták ki. Ebben a pillanatban mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 találatom lesz?

119. (K) Az 5 – ös lottó – húzást nézzük a TV – ben. Az első 4 kihúzott szám szerepel a szelvényünkön. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ötösünk lesz?

120. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón a legkisebb kihúzott szám a 14 – es?

121. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón a legnagyobb kihúzott szám a 74 – es?

122. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón kihúzott összes szám 18 – nál nagyobb és 81 – nél kisebb?

123. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón kihúzott középső szám a 21 – es?

124. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón kihúzott középső szám nagyobb 50 – nél?

125. (K) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón kihúzott számok növekvő sorrendben lettek kihúzva?**

126. (K) Az 5 - ös lottó egy sorolásánál a számokat növekvő sorrendben írjuk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó előtti szám a 45?

127. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 - ös lottón egy adott húzásnál 4 - et az $1; 2; \ldots; 9; 10$ számok közül húznak ki?

128. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón 2 egymás utáni héten kihúzzák a 13 – ast?

129. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón kihúzott számok között pontosan 3 nullára végződik?

130. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 – ös lottón kihúzott számok között több 5 - tel osztható lesz, mint 5 – tel nem osztható?

131. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 - ös lottón kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen 10?

132. (E) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 5 - ös lottó húzásakor olyan számokat húzunk, amelyek között lesz legalább 2 olyan szám, amelyeknek különbsége 1?

133. (K) Az 5 - ös lottón az $1; 2; \ldots; 89; 90$ számok közül 5 - öt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van a $4; 9; 16$, a B pedig azt, hogy a kihúzott számok között van a $16; 25; 36$. Mennyi a valószínűsége az $A + B$ és az $A \cdot B$ esemény bekövetkezésének?

134. (K) Az 5 - ös lottón az $1; 2; \ldots; 89; 90$ számok közül 5 - öt húznak ki.A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok közül pontosan 2 darab prímszám, a B pedig azt, hogy a kihúzott számok közül pontosan 2 darab 3 – mal osztható. Mennyi a valószínűsége az $A + B$ és az $A \cdot B$ esemény bekövetkezésének?

135. (K) Az 5 - ös lottón az $1; 2; \ldots; 89; 90$ számok közül 5 - öt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van páratlan, a B pedig azt, hogy mindegyik szám osztható 5 - tel. Mennyi a valószínűsége az $\overline{A} + B$ és az $\overline{A} \cdot B$ esemény bekövetkezésének?

136. (K) A 6 - os lottóban mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ találatunk lesz?

137. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 6 - os lottón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy szelvénnyel játszunk? (A 6 - os lottón legalább 3 találat kell elérni, hogy kifizetés történjen.)

138. (K) Kitöltünk egymástól függetlenül egy 5 - ös és egy 6 - os lottószelvényt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyik szelvényen sem nyerünk? (Az 5 - ös lottón a nyeréshez minimum 2, a 6 - oson legalább 3 találatot kell elérni.)

139. (K) A Bingo játék során az 1 és 100 közé eső számok közül húznak egyenként. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott szám osztható 3 – mal, vagy 5 – tel?

140. (K) Valaki találomra kitölt 1 totószelvényt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 6 mérkőzés közül legalább 4 helyre hazait választ?

141. (K) A totón a fogadási tételből néhánynak már ismerjük az eredményét és még van esélyünk a telitalálatra. Mennyi tippünk jött be, ha ebben a pillanatban nyerési esélyünk $\frac{1}{243}$?

142. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a totón nem lesz találatunk?

143. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy telitalálatunk lesz a totón?

144. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 10 találatunk lesz a totón?

145. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy csak 1 tippet hibázunk el a totón?

146. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy csak az utolsó tippet hibázzuk el a totón?

147. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 12 találatunk lesz a totón?

148. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 12 találatunk lesz a totón?

149. (K) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a totón nyereményt fizetnek ki nekünk, ha egy tipposzlopot kitöltünk? (A totón legalább 10 találatot kell elérni, hogy kifizetés történjen. A 14. sort csak az első 13 sor helyes kitöltése esetén veszik figyelembe.)

150. (E) A skandináv lottón minden sorsoláskor 35 számból 2 - szer húznak ki 7 darab számot. Egy kitöltött szelvény mindkét húzásnál részt vesz a játékban. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel játszva legalább az egyik húzásnál pontosan 4 találatunk lesz?

Független események

151. (E) Egy kockával dobunk. Független - e a következő két esemény?

a) **A = {A dobott szám páros.} és B = {A dobott szám 3 - mal osztható.}**

b) **C = {A dobott szám páros.} és D = {A dobott szám 4 - gyel osztható.}**

c) **E = {A dobott szám prím.} és F = {A dobott szám legalább 5.}**

152. (E) Két kockával dobunk. Legyen az A esemény az, hogy a dobott számok összege páros, a B pedig az, hogy a dobott számok összege 3 - mal osztható. Független - e a két esemény?

153. (E) Egy piros és egy kék kockával dobunk. Bizonyítsd be, hogy a piros kockával való 2 – es dobás független a kék kockával való 5 – ös dobástól!

154. (E) Egy szabályos pénzérmét 3 - szor feldobunk. Legyen az A esemény az, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, a B pedig az, hogy legfeljebb 1 írás lesz. Független - e a két esemény?

155. (E) Egy szabályos pénzérmét 2 - szer feldobunk. Legyen az A esemény az, hogy az első dobás fej, a B az, hogy a második dobás fej, a C pedig az, hogy pontosan 1 fej lesz. Az A; B; C események közül melyik 2 független? Fennáll – e a függetlenség a 3 esemény esetén?

156. (E) Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 1 lapot.

a) **Legyen az A esemény az, hogy ászt húztunk, a B pedig az, hogy a kihúzott lap zöld. Független – e a két esemény?**

b) **Legyen a C esemény az, hogy vagy ászt, vagy zöldet húztunk, a D pedig az, hogy a kihúzott lap alsó. Független - e a két esemény?**

157. (E) Egy csomag magyar kártyából kiválasztunk 4 lapot. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott lapok között van ász, a B az, hogy van piros és a C pedig az, hogy köztük van a piros ász. Az A, a B és a C események közül melyek közöt áll fenn, hogy az egyik maga után vonja a másikat? Függetlenek – e az A és a B események?

158. (E) Legyen az A esemény az, hogy holnap nyerek a Tipp – Mixen, a B pedig az, hogy nem nyerek. Független - e a két esemény?

159. (E) Adott egy 4 gyerekes család. Legyen az A esemény az, hogy fiú és lány is van a családban, a B pedig az, hogy legfeljebb 1 lány van. Független – e a két esemény? Változik – e a függetlenségi viszony, ha a családban csak 3 gyerek van?

160. (E) Egy urnában 8 fehér és 5 piros golyó van. Kiveszünk egyszerre 2 golyót. Legyen az A esemény az, hogy van közöttük piros golyó, a B pedig az, hogy van közöttük fehér golyó. Független - e a két esemény?

161. (E) Egy dobozban 5 piros és 7 zöld golyó van. Egymás után véletlenszerűen kihúzunk 2 golyót. Legyen az A esemény az, hogy elsőre piros golyót húzunk, a B pedig az, hogy másodikra zöld golyót húzunk. Független – e a két esemény, ha az elsőnek kihúzott golyót visszatesszük, illetve ha nem tesszük vissza?

162. (E) Egy 8 fős társaságnak a fele gyűjt mogyorót, 3 gyűjt diót, illetve 1 pedig diót és mogyorót is. Legyen az M esemény az, hogy kiválasztva 1 tagot, az mogyorót, a D pedig az, hogy diót gyűjt. Független – e a két esemény? Változik - e a függetlenségi viszony, ha csak 2 gyűjt diót, és az egyik mogyorót is?

163. (E) Egy iskolába 600 diák jár, ebből 100 – an hordanak szemüveget. A $10.a$ – ba 30 tanuló jár közöttük 5 – en szemüvegesek. Véletlenszerűen kisorsolnak 1 diákot, aki ingyen vehet részt a sítáborban. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott diák szemüveges, a B pedig az, hogy a $10.a$ – ba jár. Független – e a két esemény?

164. (E) Egy hűtőkamionban 50 láda export alma, 50 láda I. osztályú alma, 50 láda export körte és 50 láda I. osztályú körte van. Legyen az A esemény az, hogy a gyümölcs I. osztályú, a B pedig az, hogy a kiválasztott gyümölcs alma. Bizonyítsd be, hogy a két esemény független!

165. (E) Legyen $P(A) = 0,5$ annak a valószínűsége, hogy Anna 16 és 17 óra között elmegy sétálni, $P(B) = 0,6$ annak, hogy Béla ebben az időben sétál, $P(A \cdot B) = 0,4$ annak, hogy mindketten sétálnak.

a) **Független eseményeknek tekinthetjük – e Anna, illetve Béla délutáni sétáját?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik fiatal sétál délután 16 és 17 óra között?**

166. (E) Egy országos felmérésben $0,1$ volt annak a valószínűsége, hogy valaki jelest írt matematikából, $0,15$ annak, hogy jelest írt szövegértésből. Mindkét felmérő feladatsort jelesre $0,07$ valószínűséggel írták meg a tanulók.

a) **Függetlennek tekinthetjük – e a szövegértést és a matematika tudást?**

b) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy megkérdezve 1 tanulót, legalább az egyik felmérőt jelesre írta meg?**

167. (E) Egy gyártósor 2 futószalagból és 1 gépből áll. Ezek egymástól függetlenül működnek, ha a gép és legalább az egyik futószalag jó, akkor a gyártósor működőképes. Egy bizonyos időtartamban a futószalagok működésének valószínűsége $0,8$; a gép működésének valószínűsége $0,94$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gyártósor működik, illetve nem működik?

168. (E) Egy játékkockáról megállapították, hogy nem homogén (azaz cinkelt), s így az 1 – es dobásának valószínűsége $\frac{1}{4}$, míg a vele szemben lévő 6 – os dobásé pedig $\frac{1}{12}$. A többi szám dobásának valószínűsége egyenlő. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezzel a kockával páros számot dobunk?

169. (E) Egy szabálytalan dobókockával dobva az alábbi megfigyelés történik: prímszám dobásának valószínűsége $\frac{3}{10}$, páros szám dobásának valószínűsége $\frac{2}{5}$, az 1 - es dobásé pedig $0,4$. Mennyi annak a valószínűség, hogy 2 – t dobunk?

170. (E) Azt tapasztaljuk, hogy a dobókockánk nem ugyanakkora eséllyel esik mindegyik lapjára: páros számot $\frac{13}{20}$ valószínűséggel lehet dobni, prímszámot pedig $\frac{3}{8}$ valószínűséggel. Összetett számot ugyanakkora, $\frac{21}{40}$ valószínűséggel dobhatunk, mint 3 - mal osztható számot. Ha a dobókockánkkal a 6 – os dobásának esélye $\frac{2}{5}$, akkor mennyi a többi szám dobásának a valószínűsége?

171. (E) Egy vizsgálat szerint az üzem 750 dolgozója közül 360 – an dohányoznak. Az üzemben dolgozók $20\,\%$ - ának van valamilyen allergiás panasza úgy, hogy a dohányosok közül 90 – en szenvednek ilyen jellegű panaszok miatt.

a) **Az üzemben végzett vizsgálatok alapján függetlennek tekinthető – e egymástól az, hogy valaki dohányzik, illetve az, hogy valakinek allergiás panaszai vannak?**

b) **Megszólítva 1 dolgozót, mennyi annak a valószínűsége, hogy dohányost szólítunk meg, illetve, hogy olyan dohányost, akinek allergiás panaszai vannak?**

c) **Az üzemben 2 havonta kisorsolnak a dolgozók között 1 jutalomüdülést. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az év során kisorsolt 6 nyertes között pontosan 3 olyan dolgozó volt, akinek allergiás panaszai vannak?**

172. (E) Függetlenek - e az A és B események, ha $P\,(A+B)=0,76; P(A)=0,6$ és $P(B)=0,4$?

173. (E) Függetlenek - e az A és B események, ha $P\,(A)=0,5; P(B)=0,3$ és $P(A\cdot B)=0,015$? Mennyi a $P\,(A+B)$ értéke?

174. (E) Annak az esélye, hogy holnap esni fog $0,3$, míg a viharos szélé pedig $0,2$. Mekkora intervallumba eshet a holnapi viharos szeles és esős idő esélye? Mit feltételez az, aki azt állítja, hogy az esély pontosan $0,06$?

175. (E) Az A esemény valószínűsége $0,7$, a B eseményé pedig $0,8$. Annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik esemény bekövetkezik $0,94$. Független - e a két esemény? Mennyi annak a valószínűsége, hogy az *A* esemény a *B* komplementere feltétellel következik be?

176. (E) Az *A* és *B* események függetlenek. Annak a valószínűsége, hogy közülük legalább az egyik bekövetkezik $0,58$. Annak a valószínűsége, hogy mindkettő bekövetkezik $0,12$. Ismert, hogy $P(A)\geq P(B)$. Add meg az *A* és *B* események valószínűségét!

177. (E) Lehet – e 2 esemény független, ha az események egymást kizárók?

178. (E) Tudjuk, hogy 2 esemény független egymástól. Lehetnek – e egymást kizáróak?

179. (E) Bizonyítsd be, hogy ha A és B független események, akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$, illetve $\overline{A}$ és B is függetlenek egymástól!

180. (E) Bizonyítsd be, hogy ha az $A; B$ és C események páronként függetlenek, és A független a $B + C$ eseménytől, akkor $A; B$ és C teljesen független események!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 − 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok