Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Valószínűségi változó

DEFINÍCIÓ: (Valószínűségi változó)
Ha egy valószínűségi kísérlet minden kimeneteléhez (az eseménytér elemi eseményeihez) $1-1$ számértéket rendelünk, akkor az így kapott függvényt valószínűségi változónak nevezzük. Jele: ξ. (ejtsd: kszí)

Megjegyzés:

- *A valószínűségi változó egy olyan változó mennyiség, amelynek értékei a véletlentől függnek, s a függvény értelmezési tartománya az elemi események halmaza, értékkészlete pedig a valós számok egy részhalmaza.*

- *Ha a ξ valószínűségi változó értékkészlete véges x_1, x_2, ..., x_k, vagy megszámlálhatóan végtelen x_1, x_2, ..., x_k, ... halmaz, akkor diszkrét (elkülönülő) valószínűségi változóról beszélünk. Amennyiben egy intervallum minden értékét felveheti, akkor pedig folytonos valószínűségi változónak nevezzük.*

- *Ha valamely kísérlet során az A_i esemény bekövetkezett és a valószínűségi változó szerint ehhez az x_i értéket rendeltük, akkor azt mondjuk, hogy a valószínűségi változó az x_i értéket vette fel. A $\xi = x_i$ esemény valószínűségének jele: $P\ (\xi = x_i)$. $(i = 1; 2; \ldots)$*

DEFINÍCIÓ: (Valószínűségi változó eloszlása)
Legyen az A_i esemény azoknak az elemi eseményeknek az összessége, amelyekhez a ξ valószínűségi változó az x_i értéket rendeli. Ekkor a $P\ (\xi = x_i) = P\ (A_i)$ valószínűségek halmazát a ξ eloszlásának nevezzük.

Megjegyzés:
A valószínűségi változó eloszlása megmutatja, hogy a valószínűségi változó a lehetséges értékeit milyen valószínűséggel veszi fel.

Példa:
Kockával dobva, írd fel a dobott szám értékét felvevő ξ valószínűségi változó eloszlását!

Megoldás:
Írjuk fel a ξ valószínűségi változó eloszlását, vagyis a lehetséges értékeinek valószínűségeit.

$P\ (\xi = 1) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P\ (\xi = 2) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P\ (\xi = 3) = \frac{1}{6}$

$P\ (\xi = 4) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P\ (\xi = 5) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P\ (\xi = 6) = \frac{1}{6}$

DEFINÍCIÓ: (Várható érték)
Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $x_1; x_2; \ldots; x_n$, a hozzájuk tartozó valószínűségek pedig $P_1; P_2; \ldots; P_n$, vagyis $P\,(\xi = x_i) = P_i$. Ekkor a ξ valószínűségi változó várható értéke az $M\,(\xi) = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \cdots + P_n \cdot x_n$ súlyozott számtani közép.

Megjegyzés:

- *Ha egy kísérletet nagy számban megismétlünk, akkor a ξ valószínűségi változó megfigyelt értékeinek az átlaga egy szám körül ingadozik, s ezt a számot várható értéknek nevezzük.*
- *A várható érték nem szó szerint értendő: ez az az érték, amely körül a tapasztalati értékek ingadoznak, vagyis megadja a valószínűségi változó által felvett értékek „középpontját”.*
- *Léteznek olyan valószínűségi változók, amelyeknek nincs várható érétke.*

TÉTEL:
Ha ξ és η ugyanazon véges eseménytéren értelmezett valószínűségi változók, akkor $\xi + \eta$ is valószínűségi változó, és a várható értéke: $M\,(\xi + \eta) = M\,(\xi) + M\,(\eta)$.

Példa:
Kockával dobva, határozd meg a dobott szám értékét felvevő ξ valószínűségi változó várható értékét!

Megoldás:
A ξ valószínűségi változó várható értéke a következő:

$$M\,(\xi) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5.$$

DEFINÍCIÓ: (Szórás)
Ha ξ valószínűségi változó, akkor $\xi - M\,(\xi)$ is az, és így a négyzete is. A ξ valószínűségi változó szórásnégyzete a $\xi - M\,(\xi)$ valószínűségi változó négyzetének várható értéke: $D^2\,(\xi) = M\,([\xi - M(\xi)]^2) = P_1 \cdot \left(x_1 - M(\xi)\right)^2 + \cdots + P_n \cdot \left(x_n - M(\xi)\right)^2 = M\,(\xi^2) - M^2\,(\xi)$.
Ekkor a $D\,(\xi) = \sqrt{\mathrm{M}\,([\xi - M(\xi)]^2)}$ - t pedig a ξ valószínűségi változó szórásának nevezzük.

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *A valószínűségi változó a várható értéke körül ingadozik, amelynek mértékéről a szórás ad információt: azt fejezi ki, hogy a valószínűségi változó lehetséges értékeinek a várható értéktől vett eltérésének mennyi a várható értéke.*
- *A szórásnégyzet a várható értéktől való négyzetes eltérés várható értéke.*

TÉTEL:
Ha ξ és η ugyanazon véges eseménytéren értelmezett független valószínűségi változók, akkor $\xi + \eta$ is valószínűségi változó, és összegük szórásnégyzete: $D^2\,(\xi + \eta) = D^2\,(\xi) + D^2\,(\eta)$.

<u>**Példa:**</u>
Kockával dobva, add meg a dobott szám értékét felvevő ξ valószínűségi változó szórását!

<u>Megoldás:</u>

Első módszer:

A ξ valószínűségi változó szórása:

$$D\,(\xi) = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot (1-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-3{,}5)^2 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot (5-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \cdot (6-3{,}5)^2} \approx 1{,}71$$

Második módszer:

A ξ^2 valószínűségi változó várható értéke:

$$M\,(\xi^2) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 25 + \frac{1}{6} \cdot 36 = \frac{91}{6}$$

A ξ valószínűségi változó szórása:

$$D\,(\xi) = \sqrt{\frac{91}{6} - 3{,}5^2} \approx 1{,}71$$

<u>Nevezetes eloszlások</u>

DEFINÍCIÓ: (Egyenletes eloszlás)
Ha a ξ valószínűségi változó minden lehetséges értékét ugyanakkora valószínűséggel veszi fel, akkor egyenletes eloszlásúnak nevezzük.

<u>Megjegyzés:</u>
Az egyenletes eloszlás a klasszikus valószínűség esete: az eseménytér minden elemi eseményének ugyanakkora a valószínűsége.

TÉTEL:
Ha a ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1; x_2; \ldots; x_n$, akkor a várható értéke: $M\,(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

TÉTEL:
Ha a ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1; x_2; \ldots; x_n$, akkor a szórása: $D\,(\xi) = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2}$.

DEFINÍCIÓ: (Binomiális eloszlás)
Legyen adott N elem, amelyek közül K számú elem rendelkezik valamilyen tulajdonsággal, a többi elem nem. Visszatevéssel kiválasztunk n számú elemet. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a kiválasztott elemek között a megkülönböztetett tulajdonsággal rendelkező elemek k száma. Az így kapott valószínűségi változó eloszlását binomiális eloszlásnak nevezzük. Ekkor a következő adódik: $P\,(A_k) = P\,(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-k}$. $(k = 0; 1; \ldots; n)$

<u>Megjegyzés:</u>
Ha a $p = P\,(A)$ és $q = P\,(\overline{A}) = 1 - p$ jelölést alkalmazzuk, akkor a binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó a lehetséges értékeit $P\,(A_k) = P\,(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ valószínűséggel veszi fel.

TÉTEL:
Az n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke: $M(\xi) = n \cdot p$.

TÉTEL:
Az n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó szórása: $D\,(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

DEFINÍCIÓ: (Hipergeometrikus eloszlás)
Legyen adott N elem, amelyek közül K számú elem rendelkezik valamilyen tulajdonsággal, a többi elem nem. Visszatevés nélkül kiválasztunk n számú elemet. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a kiválasztott elemek között a megkülönböztetett tulajdonsággal rendelkező elemek k száma. Az így kapott valószínűségi változó eloszlását hipergeometrikus eloszlásnak nevezzük. Ekkor a következő adódik: $P\ (A_k) = P\ (\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. $(k = 0; 1; \dots; n)$

Megjegyzés:
Ha az adott paraméterek elég nagyok, akkor a binomiális és a hipergeometrikus eloszlás (visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel) közel azonos értéket ad eredményül.

TÉTEL:
Az n, K és N paraméterű hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó várható értéke: $M\ (\xi) = \frac{n \cdot K}{N}$.

TÉTEL:
Az n, K és N paraméterű hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó szórása: $D\ (\xi) = \sqrt{\frac{n \cdot K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}}$.

Játékok vizsgálata:

- Akkor mondjuk, hogy egy játék igazságos, ha a nyeremény várható értéke 0. Ekkor két játékos esetén a másik játékos nyereményének is 0 a várható értéke, vagyis a két érték egymásnak éppen az ellentettje.

- Egy játék során a nyereség várható értékét úgy kaphatjuk meg, hogy a nyeremény várható értékéből levonjuk a játék árát, vagy minden lehetséges kimenetelből levonjuk a befizetett összeget és ezeknek számítjuk ki a várható értékét.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Add meg a pénzfeldobás várható értékét, ha a ξ valószínűségi változó a fejhez 3, az íráshoz pedig -1 értéket rendel!**

2. **(E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!**

3. **(K) Egy szabályos érmét egyszer feldobunk. A ξ valószínűségi változó a fejhez 0, az íráshoz 1 értéket rendel. Add meg a ξ valószínűségi változó várható értékét!**

4. **(E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!**

5. **(K) Egymás után dobunk 3 pénzérmével. Legyen a ξ valószínűségi változó értékei azon pénzérmék száma, amelyekkel fejet dobunk. Add meg a valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!**

6. **(E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!**

7. **(K) Feldobva 4 darab pénzérmét a ξ valószínűségi változó jelentse a dobott írások számát. Add meg a valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!**

8. **(E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!**

9. **(K) Egy érmét egymás után 5 – ször feldobunk. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott fejek számát. Add meg a valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!**

10. **(E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!**

11. (E) Egy szabályos érmét 5 - ször feldobunk. A ξ valószínűségi változó jelentse azon jelek (fejek vagy írások) számát, amelyből több van a sorozatban. Add meg a valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

12. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

13. (E) Egy hamis érmét 10 - szer feldobunk. Az érme tömegeloszlása úgy van meghatározva, hogy a fej valószínűsége $\frac{5}{8}$, az írás valószínűsége pedig $\frac{3}{8}$. Add meg a fej dobások számának várható értékét!

14. (E) Egy érmével addig dobunk, amíg 2 egymás utáni dobás eredménye azonos nem lesz. Mennyi a szükséges dobások számának eloszlása és várható értéke?

15. (K) A dobókockával dobott számhoz, mint eseményhez annak négyzetét rendeljük. Add meg a ξ valószínűségi változó várható értékét!

16. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

17. (K) Két dobókockát feldobva a ξ valószínűségi változó jelentse a 2 dobott szám összegét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

18. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

19. (K) Dobjunk fel 2 dobókockát, egy kéket és egy sárgát. Annyi forintot nyerünk, amennyi a kéken és a sárgán adódó számok különbsége. (Negatív különbség esetén mi fizetünk.) Add meg az ξ valószínűségi változó eloszlását és a várható értéket!

20. (K) Két dobókockát feldobva a ξ valószínűségi változó jelentse a dobott számok különbségének abszolútértékét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

21. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

22. (K) Egy kockával 3 - szor dobunk egymás után. A ξ valószínűségi változó értéke jelentse a 6 - os dobások számát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét! Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a ξ értéke legalább annyi, mint a várható értéke!

23. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

24. (K) Feldobunk egyszerre 6 szabályos dobókockát. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott 6 – osok számát. Add meg a ξ valószínűségi változó várható értékét!

25. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

26. (K) Egy társasjátékban a szabályos kockával dobva 3 pontot kapunk, ha prímet dobunk, 2 pontot kapunk, ha összetett számot dobunk, és -5 pontot kapunk, ha mást dobunk. A ξ valószínűségi változó jelentse a szerzett pontok számát. Add meg a ξ valószínűségi változó várható értékét!

27. (K) Két olyan dobókockával dobunk egyszerre, amelyek mindegyikének 1 oldalára a 0 – s, 2 oldalára a 3 – s és 3 oldalára a 6 – os számjegy van írva. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott számok összegét. Add meg a a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

28. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

29. (K) Egy dobótetraéder lapjaira az $1; 2; 3; 4$ számokat írjuk. Kétszer egymás után dobva a testtel a dobott számokat összeszorozzuk. Add meg a szorzat várható érékét!

30. (K) Egy dobótetraéder lapjaira a $-1; 0; 0; 1$ számokat írjuk. Kétszer egymás után dobva a ξ valószínűségi változó jelentse a dobott számok szorzatát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

31. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

32. (E) Egy kockával addig dobunk, amíg valamelyik korábban dobott szám ismételten előfordul. Mennyi a szükséges dobások számának eloszlása és várható értéke?

33. (E) Aladár és Barnabás kockával játszanak. Az nyer, aki eltalálja, hogy a következő dobássorozatban hányadikra jön ki először 6 - os. Aladár elhatározta, hogy mindig 6 - ot fog tippelni, hiszen ez a várható érték, Barnabás szimulációval próbálkozik. Először elvégez egy dobássorozatot, és az ott kapott eredményt fogja tippelni. Kinek van nagyobb esélye a nyerésre?

34. (E) A kocka helyett szabályos tetraéder, szabályos oktaéder, szabályos dodekaéder, szabályos ikozaéder alakú „dobókockákat”, 1 – től addig terjedő számokkal megjelölve, ahány lapja van a testnek. Mennyi az egyes testek esetén az eredmények várható értéke?

35. (K) Egy csomag magyar kártyából kiosztunk egyszerre 6 lapot. Mennyi a 6 kiosztott lap között lévő királyok számának várható értéke?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

36. (K) A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. A ξ valószínűségi változó jelentse a kihúzott 6 lapban levő piros lapok számát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

37. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

38. (K) A 32 lapos magyar kártyacsomagból 6 - szor húzunk egy – egy lapot úgy, hogy a kihúzott lapot mindig visszakeverjük. A ξ valószínűségi változó jelentse a kihúzott piros lapok számát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

39. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

40. (E) Egy 32 lapos magyarkártya – csomagból véletlenszerűen kiválasztott 4 lap között várhatóan hány szín fog előfordulni?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

41. (K) Egy csomag kártyából kiválogatjuk a 4 ászt és a 4 királyt. A 8 lapot megkeverjük, és egyesével húzunk közülük. A kihúzott lapot megnézzük; ha ászt húztunk, akkor nem húzunk többet, ha királyt, akkor tovább folytatjuk a lapok húzását.
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tök, zöld - mindegyikéből $8-8$ darab van: VII; $VIII$; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

a) **Számítsd ki az első ászhoz szükséges húzások számának valószínűségét!**

b) **Add meg a húzások számának várható értékét!**

c) **A leírt kísérletet 5000 – szer elvégezve körülbelül hány esetben várható, hogy az első ászt az első, második, …, nyolcadik húzásra kapjuk? Számtsd ki az első ászhoz szükséges húzások számának átlagát is!**

42. (K) Tekintsük a hagyományos 5 - ös lottót. (90 számból húznak ki 5 számot.)

a) **Mennyi az 5 - ös lottón a lottótalálatok számának várható értéke?**

b) **Az egyik héten $1145\ Ft$ – ot fizettek ki a kettesekre, $17\ 690\ Ft$ – ot a hármasokra, $2\ 127\ 600\ Ft$ – ot a négyesekre és 675 millió volt a főnyeremény. Megérte – e ezen a héten lottózni, ha egy szelvény ára $225\ Ft$ volt?**

43. (K) A ξ valószínűségi változó jelentse azt, hogy az 5 - ös lottó sorsolásánál kihúzott 5 nyerőszámból hány osztható 5 - tel. (90 számból húznak ki 5 számot.) Add meg ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

44. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

45. (E) Határozd meg a $13+1$ – es totójáték várható nyereményét, ha egy szelvénnyel játszunk és a telitalálatra 13 millió Ft - ot, a 13 - asra 1 millió Ft - ot, a 12 - esre $500\ 000$ Ft - ot, a 11 – esre $10\ 000$ Ft - ot, a 10 - esre 1000 Ft – ot fizet! (A többi lehetséges kimenetel esetén nem fizet semmit.)

46. (K) Egy urnában 5 cédulán 1 - es, 3 cédulán 2 - es, 1 cédulán pedig 3 - as szerepel. Kihúzva egy cédulát, a ξ valószínűségi változó jelentse a kihúzott szám értékét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

47. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

48. (K) Egy urnában 4 cetli található, a cetliken az $1; 2; 3; 4$ számok. Kihúzunk 3 cetlit visszatevés nélkül. Határozd meg a húzott számok átlagának várható értékét!

49. (K) Egy urnában 5 cetli található, a cetliken a $0; 1; 2; 3; 4$ számok. Kihúzunk 3 cetlit visszatevés nélkül. Határozd meg a húzott számok átlagának várható értékét!

50. (K) Egy urnában 4 golyó van, amelyek 1 – től 4 – ig vannak számozva. Visszatevés nélkül kihúzunk 2 golyót. A ξ valószínűségi változó jelentse a kihúzott golyókra írt számok összegét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

51. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

52. (E) Egy dobozban 5 egyforma golyó található az $1; 2; 3; 4; 5$ számokkal megjelölve. A golyókat egymás után kihúzzuk a dobozból. Várhatóan hány golyót húzunk annyiadikra, mint amilyen szám rá van írva?

53. (K) Két kalapba számozott golyókat raktunk. Az elsőbe 6 darab pirosat 1 – től 6 – ig számozva, a másodikba 4 darab fehéret 1 – től 4 – ig számozva. Kihúzunk mindkét kalapból véletlenszerűen $1 - 1$ golyót. A ξ valószínűségi változó jelentse a kihúzott golyókon lévő számok szorzatát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

54. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

55. (K) Egy 5 kérdésből álló tesztben kérdésenként 3 válaszlehetőség van. A ξ valószínűségi változó jelentse a találatok számának értékét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

56. (K) Egy tétel áru harmadrésze elsőosztályú. Kiválasztunk a tételből 4 darabot találomra. A kiválasztás egyenként megy végbe, és a választott árut rögtön – a következő kiválasztás előtt – visszatesszük a többi közé. A ξ valószínűségi változó jelentse a kiválasztott elsőosztályú darabok számát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

57. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

58. (K) Egy dobozban 6 kék, 3 sárga és 1 zöld zseton található. A zsetonok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk, a színét följegyezzük, majd a következő húzás előtt visszatesszük a dobozba. 1 ezüst zsetonért lehet fogadást tenni a kihúzott zseton színére. Találat esetén a kék színű zsetont 2, a sárga zsetont 4, míg a zöld zsetont 7 ezüst zsetonnal jutalmazza a játékvezető. Ha a játékos a sárga színű zsetonra és 5 húzásra fogad, akkor mennyi a nyereség várható értéke?

59. (K) Egy dobozban 9 golyó van, ebből 4 barna. Találomra kiveszünk egyszerre 3 golyót. A ξ valószínűségi változó jelentse a kivett golyók között levő barnák számát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

60. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

61. (K) Egy zacskóban 10 péksütemény van: 4 csokis és 6 lekváros. Eszter belenyúl a zacskóba és kivesz 3 darabot. Így gondolkodik: „A tízes boldogságskálán 8, ha csak csokist vettem ki; 6, ha kettő csokist; 5, ha egy csokist, és 2, ha az összes kivett sütim lekváros". A ξ valószínűségi változó jelentse a boldogsága mértékét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

62. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

63. (K) Egy nem szabályos érmével $0,3$ valószínűséggel dobunk fejet.

***a)* Mennyi a várható nyeremény, ha fej esetén 3 eurót kapunk, írás esetén pedig 1 eurót fizetünk ki?**

***b)* Mennyi a várható bevételünk, ha a játék ára $0,5$ euró?**

64. (K) A rulettben 37 számra lehet tippelni $0 - 36$ – ig. Találat esetén a tét 36 – szorosát kapjuk. Nyerünk, vagy veszítünk, ha $1000\ Ft$ – os téttel sokáig játszunk?

65. (K) Fél euróba kerülő sorsjegyet vásároltunk, amelynek a határa a következőt írták:

500 sorsjegyből 1 nyer 1 eurót

1000 sorsjegyből 1 nyer 10 eurót

$10\ 000$ sorsjegyből 1 nyer 100 eurót

$50\ 000$ sorsjegyből 1 nyer 1000 eurót

Az is kiderült, hogy $50\ 000$ sorsjegyet nyomtattak.

Hány eurós „hasznot” várhatunk a sorsjegyből?

66. (K) Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége rendre a következő: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,2$ és $P(D) = 0,1$. Az egyes A; B; C; D esetekben a játékos nyereménye 1; -2; 3; -4.

***a)* Igazságos – e a játék?**

***b)* Ha az esélyek fordított sorrendben lennének, akkor érdemes – e a játékban részt venni?**

***c)* Hozzárendelhetjük – e úgy az egyes kimenetelekhez a nyereményeket úgy, hogy a játékosnak megérje játszani ezt a játékot?**

***d)* Mennyi lehet a legnagyobb várható nyeremény ebben a játékban?**

67. (K) Egy állítható dobókockával dobva az 1 - es, 2 - es dobás valószínűsége $0,1 - 0,1$; a 3 - as, 4 - es dobás valószínűsége $0,15 - 0,15$ értékre van beállítva, és az 5 - ös, 6 - os dobás valószínűsége is ugyanaz. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott szám értékét. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

68. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

69. (K) Egy játékot szabályos dobókockával játszanak. Ha a játékos páros számot dob, akkor a dobott számnak a 100 – szorosát nyeri, ha páratlan számot dob, akkor a dobott számnak a 110 – szeresét veszíti. Előnyös – e a játék a játékosnak?

70. (K) Egy vásárló $5000\ Ft$ – os zsebszámológépet akar venni. A zsebében van 1 darab $10\,000\ Ft$ – os és 5 darab $1000\ Ft$ – os bankjegy. Tegyük fel, hogy egyenlő valószínűséggel veszi ki a bankjegyeket a zsebéből.

a) **A vásárló megállapodik a kereskedővel, hogy 1 darab véletlenszerűen kivett bankjeggyel fizet a számológépért. Igazságos – e az ajánlat?**

b) **A vásárló megállapodik a kereskedővel, hogy 2 darab véletlenszerűen kivett bankjeggyel fizet a számológépért. Igazságos – e az ajánlat?**

71. (K) Egy kaszinó tulaja a következő játékot vezeti be. A játékmester 3 különböző színű kockával dob, és a játékosnak a dobott számok összegét fizeti ki euróban, de csak akkor, ha legalább 2 kockán legalább 5 - öst dobott. Hosszú távon ráfizet - e a tulajdonos, ha a játékosnak egy játékért 2 eurót kell fizetnie?

72. (K) Egy kaszinó tulaja a következő játékot vezeti be. A játékmester 3 különböző színű kockával dob, és a játékosnak a dobott számok összegét fizeti ki euróban, de csak akkor, ha legalább 2 kockán 6 - ost dobott.

a) **Mekkora annak a valószínűsége, hogy a játékos 3 játékból legfeljebb egyszer nyer?**

b) **Mekkora az esély nyerésre? Add meg a lehetséges nyereményösszegeket és a hozzájuk tartozó nyerési valószínűségeket!**

c) **Sok játék esetén ráfizet - e a tulajdonos, ha a játékosnak egy játékért 1 eurót? Add meg a nyeremény várható értékét!**

73. (E) Egy játékban két kockával dobunk, és a dobott számok szorzatát kapjuk meg nyereményként, illetve ezt az összeget csökkenti a játék díja.

a) **Határozd meg a nyeremény eloszlását!**

b) **Mennyi legyen a játék díja, ha azt akarjuk, hogy a játék igazságos legyen?**

c) **Igazságos játék esetén mennyi a haszon szórása?**

74. (K) Egy játékban két játékos játszik egy hagyományos érmét feldobva. Ha fej, akkor A fizet B – nek 10 eurót, ha írás, akkor B fizet A – nak 8 eurót. Mennyi a várható nyeremény A, illetve B szempontjából?

75. (K) Ketten a következő játékot játszák: két kockával dobnak, ha a dobott számok összege osztható 3 - mal, akkor a lány nyer a fiútól $100\ Ft$ – ot. Ha az összeg nem osztható 3 - mal, akkor a fiú nyer a lánytól $50\ Ft$ – ot. Igazságos – e a játék? Melyik játékosnak előnyösebb a játék?

76. (K) Kati és Pali egy szabályos dobókockával játszanak. Kati nyer, ha 2 – est, 3 – ast, 5 – öst, vagy 6 – ost dobnak, Peti nyer, ha 1 – est, vagy 4 – est dobnak. Ha Kati nyer, akkor Pali fizet neki 3 forintot, ha Pali nyer, akkor Kati fizet neki 4 forintot. Kinek előnyösebb a játék?

77. (K) Anna és Béla egy szabályos dobókockával játszanak. Anna minden dobás után annyi forintot fizet Bélának, amennyit dobtak, Béla pedig minden dobáskor $3\ Ft$ – ot fizet Annának. Kinek előnyösebb a játék?

78. (K) Jótékony célú szerencsesorsjegyet bocsátottak ki $100\,000$ példányban. A szelvények között 1 darab $500\,000\ Ft$ – os, 100 darab $5\,000\ Ft$ – os és 9000 darab $1000\ Ft$ – os nyereménysorsjegy található. Úgy tervezték, hogy a kifizetett nyereményösszeg a jegyek árának a harmadával legyen egyenlő, a bevétel többi része jótékonysági célokat szolgáljon. Mennyi legyen egy sorsjegy ára?

79. (E) Egy kalapba betettük az $1; 2; \ldots; 9; 10$ számokat. Egyet véletlenszerűen kihúzunk. $10\ Ft$ - ért lehet fogadni arra, hogy a kihúzott szám páros, 3 - mal osztható, vagy 5 - tel osztható. Ha párosra tippelünk és eltaláltuk, akkor $18\ Ft$ - ot nyerünk, ha 3 - mal oszthatóra tippeltünk és eltaláltuk, akkor $40\ Ft$ - ot nyerünk, ha 5 - tel oszthatóra tippeltünk és eltaláltuk, akkor 50 Ft - ot nyerünk. Mire érdemes tippelni?

80. (E) Egy lóversenyen 3 ló győzelmére lehet fogadni. Tornádó győzelme esetén a tét másfélszeresét fizeti a fogadóiroda. Villám győzelme esetén a tízszeresét, Szélvész győzelme esetén a háromszorosát. Titkos belső információ szerint Tornádó $60\ \%$ eséllyel nyer, Villám $10\ \%$ eséllyel, Szélvész pedig $30\ \%$ eséllyel. Melyik lóra érdemes fogadni $10\,000\ Ft$ – tal és mennyi lesz a nyeremény várható értéke?

81. (K) Egy sorsjátékon 1 darab $5000\ Ft$ – os, 10 darab $500\ Ft$ – os és 50 darab $100\ Ft$ – os nyeremény van. A játékhoz $10\,000$ darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen egy jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzen meg?

82. (K) Egy igazságos fogadáson az 1 eurós tétre 3 eurót fizetnek ki a fogadó győzelme esetén. Mekkora valószínűséggel nyer a fogadó?

83. (K) Az autóversenyen $0,2$ annak a valószínűsége, hogy Homér nyer. Valaki 300 dollárt tesz Homér győzelmére. Mennyi pénzt fizessen ki a fogadóiroda a fogadó győzelme esetén, hogy igazságos legyen a fogadás?

84. (K) Egy focicsapat idei formája alapján $0,1$ annak az esélye, hogy a jövő héten győzni fog a meccsen. Pisti mégis a győzelmükre fogad.

a) **Mennyi pénzt fizessen a fogadóiroda a 10 eurós téttel fogadó Pistinek, ha nyer?**

b) **Mekkora téttel fogadott Pisti, ha 117 eurót nyert a fogadással?**

85. (K) Egy különleges hatoldalú dobókockán az egyes dobások valószínűsége külön – külön állítható (természetesen a valószínűségek összege mindig 1). Jelenleg az 1 – es, 2 – es, 3 – as, 4 – es dobás valószínűsége egyaránt $0,1$ – re van állítva. Mire állítsuk az 5 – ös dobás valószínűségét, ha azt akarjuk, hogy ezzel a kockával a dobás várható értéke $4,2$ legyen?

86. (K) Évi és Krisztián egy olyan dobókockával játszik, amelynek 1 lapján 1 – es, 2 lapján 2 – es és 3 lapján 3 – as van. Krisztián dob a kockával. Ha a dobás eredménye 1, akkor Évi fizet Krisztiánnak x forintot, ha a kidobott szám a 2 – es, akkor Krisztián fizet Évinek $2x - 450$ forintot, amennyiben a dobott szám a 3, akkor szintén Krisztián fizet Évinek $x - 200$ forintot. Mennyit fizetnek külön - külön, ha a játék igazságos, vagyis mindkét játékos nyereményének várható értéke 0?

87. (K) Attila és Blanka feldob 2 szabályos dobókockát. Attila arra tippel, hogy a dobott számok szorzata páros lesz, Blanka arra, hogy páratlan. Ha Attila veszít, akkor fizet Blankának $1\,200\ Ft$ – ot. Mennyit fizessen Blanka Attilának, ha Attila nyer, hogy igazságos legyen a játék?

88. (K) Ildi a diáknapra egy egyszerű játékot talált ki. A játékos dob egyet a hagyományos kockával. Ha 5 – öt, vagy 6 - ot dob, akkor Ildi fizet neki 6 játékeurót. Mennyiért árulja Ildi a játékot, ha csak a játék kedvéért csinálja? (Hosszú távon nem akar sem veszteséget, sem nyereséget.)

89. (E) Ketten felváltva dobnak egy dobókockával. Az nyer, akinek hamarabb sikerül 6 - ost dobnia. Ha a kezdő nyer, ő $20\ Ft$ – ot kap a társától; ha veszít, akkor $25\ Ft$ – ot fizet. Érdemes – e kezdőnek lenni? Ha nem igazságos a játék, akkor hogyan tegyék azzá?

90. (E) András és Baltazár egy pénzérmével játszanak. András háromszor dobja fel egymás után az érmét. Ha sikerül két egyformát dobni egymás után, akkor ő nyer Baltazártól $10\ Ft$ – ot. Ellenkező esetben Baltazár nyer Andrástól $40\ Ft$ – ot. Igazságos – e a játék? Ha nem, akkor hogyan változtassunk a szabályokon, hogy igazságossá váljon?

91. (E) Egy edzőnek kétféle labdarúgó áll a rendelkezésére: tapasztalt és rutintalan játékosok. Közülük kell összeválogatnia 10 főt a csapatba. Biztosra veszi, hogy a meccs végén tizenegyesrúgások lesznek és azt is, hogy minden játékosára szüksége lesz. A tapasztalt játékosok az esetek $80\ \%$ - ában rúgják be a büntetőket, míg a fiatalok csupán minden negyediket értékesítik. Legalább hány rutinos játékos legyen a csapatban, ha az edző azt szeretné, hogy 10 büntetőből 5 - nél többet rúgjanak majd bevárhatóan a játékosok?

92. (K) Azonos fajtájú hűtőgépek X élettartama véletlentől függő valószínűségi változó. Az ellenőrzés során azt tapasztalták, hogy a 6 éves élettartamúak aránya $5\ \%$ körül, a 7 éves élettartamúak aránya $30\ \%$ körül, a 8 éves élettartamúak aránya $45\ \%$ körül, a 9 éves élettartamúak aránya $10\ \%$ körül, a 10 éves élettartamúak aránya $10\ \%$ körül ingadozik. Mekkora a hűtőgépek élettartamának módusza és várható értéke? Mekkora annak a valószínűsége, hogy az élettartam legalább $7,5$ év?

93. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő X valószínűségi változó szórását!

94. (K) Egy irodaház januári átadásakor az összes izzó új volt. Az izzókra a gyártó cég a következő hivatalos adatokat adta meg: egy izzó az 1. év során $0,05$; a 2. év során $0,2$; a 3. év során $0,6$; a 4. év során $0,15$ valószínűséggel megy tönkre. Az izzók élettartama 4 év. Mikorra ütemezze az épület üzemeltetője az izzók cseréjét?

95. (E) Számítsd ki az előző feladatban szereplő izzók élettartamának szórását!

96. (K) Egy elektromos építőelem élettartama véletlenszerű. Az élettartam valószínűség – eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

élettartam (évben):	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
valószínűség:	$0,16$	$0,42$	$0,28$	$0,07$	$0,05$	$0,01$	$0,01$

Határozd meg az építőelem várható élettartamát!

97. (K) Egy energiatakarékos égőket gyártó cégnél úgy osztályozzák a minőségellenőrök a termékeket, hogy azok hány százaléka megy tönkre 1; 2; 3; 4 és 5 vagy több év alatt. Eredményeik a táblázatban láthatók.

élettartam (évben):	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
valószínűség:	$0,02$	$0,03$	$0,24$	$0,60$	$0,11$

Mennyi egy véletlenszerűen kiválasztott termék várható élettartama?

98. (K) Az íjászok céltáblája olyan $60\ cm$ oldalhosszúságú négyzet, amelynek közepén 3 koncentrikus kör található, amelynek sugarai $10\ cm$, $20\ cm$ és $30\ cm$. Az egyes körgyűrűkben a találatok pontértéke 10; 8 és 5 pont. Egy íjászversenyen egy sorozat három lövésből áll.

a) **Mennyi annak a valószínűsége, hogy a játékos, aki vaktában lő a táblára, legalább 23 pontot elér egy sorozatban?**

b) **Várhatóan hány pontot ér el egy versenyző egy lövéssel?**

99. (E) Legyen adott egy $20\ cm$ oldalú négyzet alakú céltábla a közepén egy $5\ cm$ sugarú körrel. Ha véletlenszerűen lövünk, s mindig a céltáblába találunk, akkor 10 lövés esetén mennyi a lövések várható értéke és szórása?

100. (K) Egy szerencsekerék 5 részre van osztva úgy, hogy az 1000 ponthoz tartozó körcikk középponti szöge $30°$ - os. Ez a többi ($500; 100; 10; -750$ értékeket tartalmazó) körcikk középponti szögeivel együtt számtani sorozatot alkot. Egy pörgetéssel annyi pont szerezhető, amennyi a kipörgetett mezőn látható. Mennyi az egy pörgetésből szerezhető pontok várható értéke?

101. (K) Egy szerencsekeréken a következő „nyeremények” találhatók: nullázó, negyedelő, felező, -1000; 1000; 2000; 3000, duplázó. Mindegyik egy $45°$ - os középponti szögű körcikken található. A játékosnak a játék kezdetekor 2000 pontja van. A játék során nullánál kevesebb pontja nem lehet a játékosnak.

a) **Maximum hány pontja lehet 3 pörgetés után a játékosnak?**

b) **Az első pörgetés után hány pontra számíthat a játékos?**

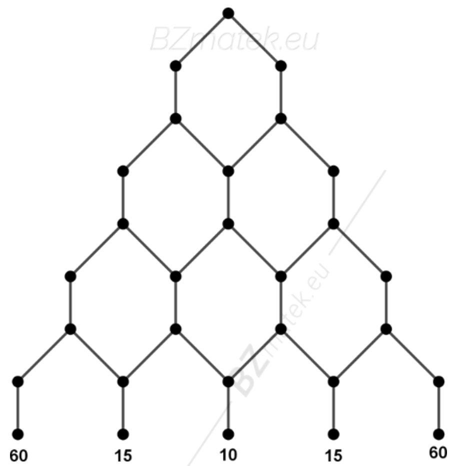
c) **Mennyi a játékos pontszámának várható értéke a pörgetés után, ha előtte lenullázta magát?**

d) **Hány pontra számíthat a pörgetés után a játékos, ha $10\,000$ ponton áll?**

102. (K) Egy 10 egybevágó körcikkre osztott szerencsekerék 3 mezőjén az 5, $2-2$ mezőjén a 10 és a -7, további mezőkön a 15, a 0 és a -20 érték van feltüntetve. Egy pörgetés után a játékosnak annyival változik a pontszáma, amennyit a kerék mutat. Mennyi egy pörgetés várható értéke?

103. (E) Számítsd ki az előző feladatban szereplő pörgetett pontok szórását!

104. (K) Az ábrán látható játékautomata pályáján egy golyó gurul lefelé. Minden akadálynál ugyanakkora valószínűséggel megy jobbra vagy balra, ezért minden út egyformán valószínű. A pályán 4 szinten vannak akadályok, és a végén 5 rekeszbe érkezhet a golyó. Egy golyó elindításáért $20\ Ft$ – ot kell fizetni, és minden rekeszhez odaírtuk, hogy a játékos mennyit nyer, ha odaér a golyó. Mennyi a játékos nyereségének várható értéke?



105. (E) Egy játékautomatának 3 tárcsája, és mindegyik tárcsának 5 állása van. A tárcsákat megpörgetjük, és mindegyik véletlenszerűen áll meg az 5 állás valamelyikében. Az első tárcsának 2 állásában narancs, 2 - ben alma és 1 - ben körte látszik, a másodikon 1 narancs, 1 alma és 3 körte, a harmadikon megint 2 narancs, 2 alma és 1 körte. $50\ Ft$ – ért lehet egyet játszani, és a játékos akkor nyer, ha mind a három tárcsán ugyanaz a gyümölcs látszik. Mennyi a játékos nyereségének várható értéke, ha egy nyert játék estén $500\ Ft$ – ot kap a géptől?

106. (K) Egy gazdaság almatermésének $30\,\%$ - a elsőosztályú. Az össztermésből véletlenszerűen visszatevéssel kiválasztunk egy 6 elemű mintát. A ξ valószínűségi változó értékei legyenek $0; 1; \ldots; 5; 6$ annak megfelelően, hogy a mintában hány első osztályú alma van. Add meg a valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

107. (K) Egy árukészlet ötöde hibás. Találomra kiválasztunk 4 darabot úgy, hogy a kihúzott árut visszatesszük, mielőtt a következőt kihúznánk. A ξ valószínűségi változó jelentse a kiválasztott hibás darabok számát. Add meg a ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

108. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

109. (K) Zsófi zenelejátszóján sokszor használja az EVL funkciót. (Az „egyes véletlen lejátszás” – t bekapcsolva, a lejátszó találomra lejátszik egy számot, majd alaphelyzetbe áll.) A lejátszóra Zsófi 18, testvére pedig 32 számot töltött fel. Az EVL funkciót 7 - szer használva, várhatóan hány olyan zeneszámot fog hallani Zsófi, amelyet ő maga töltött fel?

110. (K) Egy csavargyárban az egyik gép meghibásodása miatt az elkészült csavarok $15\,\%$ - a selejt. Visszatevéssel kiveszünk 4 - et. Jelölje az ξ valószínűségi változó a hibátlan csavarok számát a mintában. Add meg ξ valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

111. (K) Egy tantárgyból a sikertelen vizsga valószínűsége $0,3$. A vizsgát legfeljebb 3 - szor lehet megismételni. A ξ valószínűségi változó jelentse egy véletlenszerűen kiválasztott vizsgázó lehetséges vizsgáinak számát. Add meg a vizsgák számának várható értékét!

112. (K) Egy réten három szarvas legelészik. Három vadász figyeli őket egymásról mit sem tudva. A vadászok egyszerre tüzelnek, és minden lövésük halálos. Mennyi a lövések után a rétről elfutó szarvasok számának várható értéke? (Mivel a vadászok nem tudnak egymásról, többen is lőhetnek ugyanarra az állatra.)

113. (E) Számítsd ki az előző feladatban szereplő túlélő szarvasok számának szórását!

114. (K) Zoli fiókjában 3 kék sál mellett 1 sárga, 1 szürke és 2 zöld sál van. Kék sálat keres, de sietségében véletlenszerűen húzgálja ki a fiókból a sálakat, amíg kéket nem talál. Mennyi a szükséges húzások számának várható értéke?

115. (E) Határozd meg az előző feladatban szereplő ξ valószínűségi változó szórását!

116. (E) Számítsd ki az $n = 6$ és $p = 0,3$ számokkal jellemzett binomiális eloszlás várható értékét és szórását!

117. (E) Számítsd ki az $n = 6$; $K = 20$ és $N = 30$ számokkal jellemzett hipergeometrikus eloszlás várható értékét és szórását!

118. (E) Egy vállalkozás 10 szakembernek hirdetett meg álláshelyet. Tapasztalatok alapján a jelentkezők $40\,\%$ - a nem felel meg a meghirdetett feltételeknek. A rangsoroltak közül 16 főt hívtak be a munkaszerződés megkötésére. Várhatóan hány ember felel meg a meghirdetett feltételeknek a behívott 16 ember közül?

119. (E) Egy hamis pénzérme feldobásakor $0,4$ annak a valószínűsége, hogy fejet kapunk. Határozd meg, hogy átlagosan hány fejet kapunk, ha az érmét feldobjuk 1000 – szer!

120. (E) Egy szerepjátékhoz használt 12 oldalú dobókocka oldalai 1 – től 12 – ig vannak számozva. A „kocka” szabályos, minden oldala egyenlő valószínűséggel kerül felülre. A kockával egy játék során 136 – szor dobtak. Add meg a prím dobás előfordulásának várható értékét és szórását!

121. (E) Egy gyufagyárban gyártott napi $10\,000$ gyufaszál közül 231 darab általában elreped. Visszatevéssel kiválasztunk egy 1000 darabos mintát. Add meg a repedt gyufák mintabeli darabszámának várható értékét és szórását! Mit javaslunk, ilyen mintavétel esetén hány repedt gyufa megtalálásakor gyanakodjunk a gyufagyár gyártósorának hibás működésére?

122. (E) Egy áruház a beérkezett árut visszatevéses mintavétellel vizsgálja meg, mielőtt átvenné. A legutóbbi 500 darabos szállítmányból is ellenőriztek 40 darabot (tapasztalatból tudják, hogy az érkezett áruból minden 25. hibás). Várhatóan mennyi hibás lesz a kiválasztott mintában? Mennyi a hibás darabok számának szórása?

123. (E) Az egyik cég a naponta elkészített $1\,500$ darab memórikártyából 250 darabot tesztel visszatevéses mintavétellel. Normál üzemben a gép 120 darab hibás memóriát állít elő naponta. Számítsd ki az egy nap alatt legyártott hibás alkatrészek számának várható értékét és szórását!

124. (E) Sokéves átlagban elmondható, hogy egy ló 100 lóversenyből 1 – et nyer meg. Határozd meg, hogy a jövő évi 223 futamból ez a ló várhatóan hányszor fog győzni! Számítsd ki a jövő évi futamgyőzelmek számának szórását is!

125. (E) Valaki egy 100 kérdésből álló, 4 választásos tesztet teljesen véletlenszerűen tölt ki. Várhatóan hány találata lesz?

126. (E) Egy hamis érmét 20 - szor feldobunk. Az érme tömegeloszlása úgy van meghatározva, hogy a fej valószínűsége $\frac{4}{9}$, az írás valószínűsége pedig $\frac{5}{9}$. Határozd meg az írás dobások számának várható értékét és szórását!

127. (E) Egy városban a teljes felnőtt lakosság lélekszáma $132\,546$. Ebből $19\,540$ fő nyugdíjas. A városi tanácsba véletlenszerűen választanak 11 főt. Várhatón hány nyugdíjas lesz közöttük? Mekkora a szórás?

128. (E) Egy 100 elemű halmazból, amelyben 15 kitüntett elem van, kiválasztunk visszatevés nélkül egy 10 elemű mintát. A ξ valószínűségi változó jelentse a mintában lévő kitüntettek számát. Add meg a ξ várható értékét és szórását!

129. (E) Bridzsjátékhoz az 52 – lapos kártyacsomagot a 4 játékos között egyenlően osztják szét. (Az 52 lapos csomag négyfajta – pikk, kör, káró, treff – lapot tartalamz, mindegyik fajtából 13 darabot.) Legyen a ξ valószínűségi változó értéke az egyik előre kiszemelt játékoshoz kerülő pikk lapok száma, ha a kártyákat találomra osztják szét. Írd fel a ξ valószínűségi változó eloszlását! Számítsd ki a várható értékét és szórását!

130. (E) Egy véges sok értéket felvevő, diszkrét valószínűségi változó várható értéke és szórása egyaránt 0. Mit jelent ez a valószínűség változóra vonatkozóan?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 − 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok