Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Geometriai valószínűség

Geometriai valószínűség:
Ha egy valószínűségi kísérletben az események valamilyen geometriai alakzat részhalmazainak felelnek meg úgy, hogy az egyes események valószínűsége az eseménynek megfelelő rézhalmaz geometriai mértékével (pl.: hosszával, területével, térfogatával) arányos, akkor a valószínűségeket geometriai valószínűségeknek nevezzük.

Megjegyzés:

- *A geometriai valószínűség eseménytere egy geometriai alakzat, az események ezen pontok egy részhalmaza, az elemi események pedig egy – egy pontnak felelnek meg.*
- *Ezzel a módszerrel olyankor is tudunk valószínűséget meghatározni, ha az elemi események száma végtelen.*

DEFINÍCIÓ: (Geometriai valószínűségi mező)
Ha a H eseménytér mérhető (pl.: van hossza, területe, térfogata), az eseményei mérhetőek, és valószínűségük egyenesen arányos a mértékükkel, akkor ezt az eseményteret az eseményeivel és a köztük értelmezett műveletekkel (összeadás, kivonás, szorzás, komplementer) együtt geometriai valószínűségi mezőnek nevezzük.

TÉTEL:
Ha a H geometriai valószínűségi mező eseménytere, a rajta értelmezett mérték (pl.: hossz, terület, térfogat) μ, akkor bármely A eseményre teljesül a következő: $P\ (A) = \frac{\mu\ (A)}{\mu\ (H)}$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Egy $20\,m^2$ - es szobában leejtjük a lekvároskenyeret a padlóra. Mekkora valószínűséggel esik az $5\,m^2$ - es szőnyegre?**

2. **(K) Tegyük fel, hogy egy meteor véletlenszerűen érkezhet a Föd bármely helyére, és becsapódik. Mi a valószínűsége, hogy szárazföldre esik, ha a Föld felszínen a szárazföldek területe $148,6\ millió\ km^2$, míg a vizek területe $361,5\ millió\ km^2$?**

3. **(K) Egy $50\ cm$ oldalú négyzetben egy $10\ cm$ sugarú kör található. Mi a valószínűsége, hogy beletalálunk a körbe, ha a négyzetet biztosan eltaláljuk?**

4. **(K) Egy doboz teteje $15\ cm \times 35\ cm$ – es téglalap, a rajta levő nyílás pedig egy $5\ cm \times 7\ cm$ – es téglalap. Mekkora valószínűséggel találunk a nyílásba, ha a doboztetőt biztosan eltaláljuk?**

5. **(K) Egy $5\ cm \times 15\ cm$ – es fa téglalapból kivágunk kettő, egymást nem fedő $3\ cm$ oldalú négyzetet, és a „lyukas” téglalapot az ágyra tesszük. Magasról ráejtünk egy golyót a téglalapra. Mekkora valószínűséggel hallunk koppanást?**

6. **(K) Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala $10\ m$ hosszú és $6\ m$ magas. A házon két darab $2\ m \times 1,8\ m$ méretű ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy alabda eltalálja az egyik ablakot?**

7. **(K) Egy sündisznó találomra kóborol egy $40\ m$ hosszú, $20\ m$ széles téglalap alakú kertben. Mekkora a következő események valószínűsége?**

   a) **A süni a $8\ m$ hosszú, $5\ m$ széles virágágyásban van.**

   b) **A süni a kert területének egynegyedét kitevő málnában van.**

   c) **A süni a virágágyásban, vagy a málnásban van.**

8. (K) Egy kör középpontja a koordináta - rendszer $K\ (-5; 3)$ pontjában van, s a kör sugara 9 egység. Ha a kört céltáblának tekintjük, amelyre íjjal nyilazunk úgy, hogy a táblát egyenletes eloszlásban találjuk el a nyíllal, mennyi annak a valószínűsége, hogy 2 egységnél közelebb lövünk a középponthoz?

9. (K) A kör alakú céltáblát négy negyedkörre osztották fel. Kétszer célzunk. Mindegyik lövés talál. A négy negyedkör találati valószínűsége egyenlő. Mennyi annak a valószínűsége, hogy kétszer egymás után a céltábla bal alsó negyedébe találunk?

10. (K) Egy darts tábla kör alakú átmérője $45\ cm$. Közepén egy $4\ cm$ átmérőjű tartomány (bull's eye) található.

***a)* Mi a valószínűsége, hogy beletalálunk középre, ha feltesszük, hogy a táblát biztosan eltaláljuk?**

***b)* Ha háromszor dobunk a „bull's eye" – re, akkor mennyi az esélye, hogy legalább kétszer betalálunk a középső tartományba?**

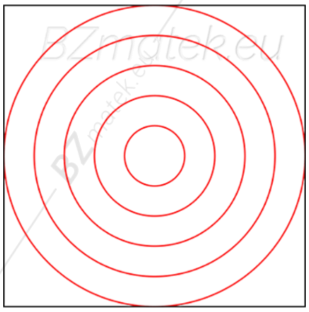
11. (K) A darts tábla $33,5\ cm$ átmérőjű kör. A közepén levő nagyobb (általában zöld) kört bullnak nevezik, átmérője $3\ cm$. Az ebben levő kis piros kör a bull's eye, átmérője $1,5\ cm$. Ottó dartsozni tanul, s már biztosan bedobja a táblába a nyilat, de azon belül még véletlenszerűen talál.

***a)* Mekkora valószínűséggel dob bull's eye – t?**

***b)* Mekkora valószínűséggel dob legalább bull - t?**

12. (K) A dartstábla $33,5\ cm$ átmérőjű kör, amely 20 egybevágó körcikkre van osztva. A külső, $1\ cm$ széles színes sáv a duplázó. A belső triplázó sáv ugyanolyan széles, külső széle $5\ cm$ – re van a duplázó belső szélétől. (A zöld bull átmérője $3\ cm$.) Zoli már sokat gyakorolt, biztosan megdobja a 20 – at. Azon belül azonban még véletlenszerűen talál. Mekkora valószínűséggel dob sima, dupla és tripla 20 – at, illetve két nyíllal 80 pontot, ha csak a 20 – as mezőbe érkeznek a dobónyilai?

13. (K) Az ábrán látható 10 egységnyi oldalú céltáblára véletlenszerűen érkeznek (pontszerű) lövések. A körök sugarai $1; 2; 3; 4$ és 5 egység. Ha a legnagyobb sugarú körön kívül esik a találat, akkor 0 pontot ér. Mennyi a valószínűsége az egyes találatoknak?



14. (K) Egy parkban van egy $5\ m$ sugarú, kör alakú virágágy, amelyet $1\ m, 2\ m, \dots$ sugarú koncentrikus körökkel 5 részre osztottak. Elered az eső. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a virágágyra hulló első esőcsepp a belülről számított $1.; 2.; \dots; 5.$ részre hull?

15. (K) Egy $5\ m$ sugarú héliummal töltött gömbbe bekerül egy nitrogénmolekula. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valamely időpontban ez a molekula a gömb középpontjától legfeljebb $1; 2; 3; 4; 5\ m$ távolságra helyezkedik el?

16. (K) Fürdőszobánk csempézése azonos, $30\ cm$ oldalhosszúságú négyzetekből áll. Egy kör alakú, $5\ cm$ sugarú kapcsolót szeretnénk elhelyezni véletlenszerűen a csempézett felületen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapcsoló teljes egészében egy csempében helyezkedik el?

17. (K) Egy $15\ cm$ oldalú négyzetlap pontjai közül egyet véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott pontnak a négyzet mindegyik oldalától mért távolsága legalább $5\ cm$?

18. (K) Egy $10\ cm$ sugarú körlap pontjai közül véletlenszerűen választva, mennyi annak a valószínűsége, hogy a választott pont legfeljebb $5\ cm$ távolsára van a kör középpontjától?

19. (K) Egy teraszon a négyzetátlósan lerakott csempe oldalai $50\ cm$ hosszúak. Egy $2\ cm$ átmérőjű érmét célzás nélkül leejtettünk a teraszra. Mi a valószínűsége annak, hogy az érme egy fugára (vonalra) esik?

20. (K) A múzeum padlóját egymástól $10\,cm$ – re futó derékszögű infravörös (láthatatlan) lézerrács védi, s ha valami a lézerfény útjába kerül, akkor riaszt. A betörő sejti ezt, ezért próbaképpen az erkélyről a padlóra ejt egy $3\,cm$ átmérőjű korongot. A korong leesik és tompa puffanással a padlón marad. Melyiknek nagyobb az esélye: megszólal a riasztó, vagy marad a csend?

21. (K) Egy téglalap alakú vízszintes hálós rács kör keresztmetszetű acélhuzalokból készült. A huzalok sugara $r = 2\,cm$. A szomszédos huzalok tengelyei között egyik irányban $a = 15\,cm$, a másik irányban $b = 10\,cm$ a távolság. A rácsra merőlegesen egy $d = 1\,cm$ átmérőjű golyót ejtünk véletlenszerűen a hálóra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a golyó a rács valamelyik huzaljába ütközik?

22. (K) Egy $4\,mm$ – es átmérőjű drótból készített kerítésen a szomszédos vízszintes és függőleges merevítő drótok tengelyeinek távolsága $10\,cm$.

a) **Mekkora valószínűséggel ütközik valamelyik drótdarabnak egy véletlenszerűen kilőtt $4\,mm$ – es sörétszem?**

b) **Egy sörétes patron 10, vagy 20 darabot tartalmaz a $4\,mm$ – es átmérőjű sörétszemekből. Mekkora valószínűséggel halad át mind a 10, illetve mind a 20 sörétszem a kerítésen?**

23. (K) Egy $40\,cm$ átmérőjű kör alakú táblába a lehető legnagyobb szabályos háromszög alakú céltáblát rajzoljuk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a lövésünkkel eltaláljuk a céltáblát? (Feltesszük, hogy a kör alakú táblát biztosan eltaláljuk.)

24. (K) Egy $8\,cm$ átmérőjű körbe rajzolunk egy szabályos 10 – szöget. Mennyi az esélye, hogy véletlenszerűen bejelölve egy pontot a körben, az a sokszögön kívülre esik?

25. (K) Egy $30\,cm$ átmérőjű kör köré rajzolunk egy szabályos 20 – szöget. Mennyi az esélye, hogy ha egy toll ráesik a rajzra, akkor a toll hegye a körön belülre esik?

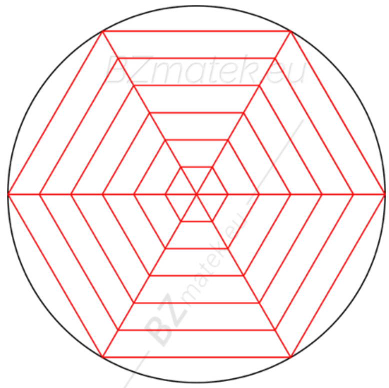
26. (K) Három város távolsága páronként: $10\,km$; $13\,km$; $13\,km$. A városok köré olyan körpályát építenek, amely mindegyik városon áthalad. Ha egy meteor esik a pályán belüli területre, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy a városok alkotta háromszögön belülre ér földet?

27. (K) Három város távolsága páronként: $12\ km; 10\ km; 10\ km$. A városokat összekötő egyenes útszakaszokat belülről érinti egy kör alakú erdős rész. Ha eltűnik valaki a városok alkotta háromszög alakú területen belül, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy az erdőben találják meg?

28. (K) Egy pók beszőtt hálóval egy $6\ cm$ sugarú kör alakú nyílást az ábrán látható módon. A középpontból indulva sugárirányban $1\ cm$ – enként következnek a pókonalból készített szabályos hatszögek. A pók észrevette, hogy fennakadt egy muslinca a hálóban. Feltételezzük, hogy a muslinca pontszerű és bárhol a fonalon egyenlő valószínűséggel akadhatott fenn.

***a)* Mekkora a valószínűsége annak, hogy sugárirányú szálon akadt fenn?**

***b)* Mekkora a valószínűsége annak, hogy belülről a harmadik hatszögön, vagy attól befelé lévő szálon akadt fenn a muslinca?**



29. (K) Egy zsákban rudak vannak, amelyek $2; 3; 5; 7; 11; 13$ egység hosszúak. Véletlenszerűen kihúzunk 3 rudat. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezekből háromszöget lehet összerakni?

30. (K) Öt különböző hosszúságú szakasz hossza: $1; 3; 5; 7; 9\ cm$. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva közülük hármat, a szakaszokból háromszög szerkeszthető!

31. (K) Adott egy 2 méter hosszú szalag, amiből $60\ cm$ piros, $80\ cm$ kék és $60\ cm$ zöld színű, ebben a sorrendben. Véletlenszerűen kettévágjuk valahol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét darab kétszínű lesz?

32. (K) Egy $500\ m$ hosszúságú vezeték egyforma valószínűséggel hibásodik meg az egész vonalon. Mi a valószínűsége annak, hogy a hibát az első $100\ m$ – en megtalálják?

33. (K) Egy távbeszélőállomás és a központ közötti vezeték hossza $450\ m$. Mi annak a valószínűsége, hogy az első hiba a vezetéknek a központtól $180\ m$ – nél távolabbi helyén lép fel, ha a vezeték mentén bárhol azonos a meghibásodás veszélye?

34. (K) A Budapest – Kecskemét távolsági buszjárat menetideje 85 perc, ebből 15 percet Budapest, 5 percet Kecskemét belterületén megy a busz.

a) **Mennyi a valószínűsége egy véletlenszerű defekt esetén, hogy az Budapesten következik be?**

b) **Mennyi a valószínűsége, hogy a defekt Kecskeméthez (időben) közelebb lesz?**

35. (K) Zsuzsa minden reggel fél 9 és 9 óra között véletlenszerűen érkezik a buszmegállóba. Neki két busz is megfelel, az egyik 15, a másik 20 percenként indul 5 órától kezdve. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell 5 percnél többet várnia?

36. (K) Egy liftes, a földszinttel együtt hatszintes házban a szintek 5 méter távolságra vannak egymástól. Ha a liftajtó (és persze a lift is) minden szinten 2 méter magas, és az alsó széle a szint alsó szélével van azonos magasságban, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlen elakadás során (aminek a helye egyenletes eloszlású a ház teljes magasságán) a liftajtót teljes egészében fal takarja?

37. (K) Egy ismeretlen városban metróra várakozunk. Befut a szerelvény. A metróajtók szélessége $1,3\ m$, két szomszédos ajtó között $3,5\ m$ a távolság, mi pedig $50\ cm$ szélesek vagyunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem kell se jobbra, se balra elmozdulnunk, hanem egyenesen beszállhatunk a szerelvénybe?

38. (K) Egy HÉV – átjáróban 15 percenként megy át a HÉV, s ilyenkor a sorompót 3 percre lezárják. Az átjáróhoz közelítő autós látja, hogy a fényjelzés szabad áthaladást biztosít. Mennyi a valószínűsége, hogy átér megállás nélkül, ha az átjárótól még 2 percnyi útra van?

39. (K) A $[0; 1[$ intervallumból véletlenszerűen kiválasztunk egy számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám első tizedesjegye legalább 3?

40. (K) Válasszunk a $[2; 15[$ intervallumból véletlenszerűen egy valós számot. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a szám egész része 3 - mal osztható!

41. (K) Az $A = [8; 15]$ intervallumon belül úgy szeretnénk kijelölni a B intervallumot, hogy ha véletlenül ráejtünk A – ra egy pontot, akkor $0,7$ valószínűséggel B – be essen. Adj meg ilyen B intervallumot!

42. (K) Az $A =]-3; 7[$ intervallumra véletlenszerűen ejtünk egy P pontot. Az 1 ponttól melyik irányba mérjük fel azt a nyitott B intervallumot, amelyre $0,5$ valószínűséggel esik P? Írd fel B – t!

43. (K) Egy számegyenesen kijelöltük az $A = [0; 10]$ intervallumot és annak $B = [2; 6]$ részhalmazát. Véletlenszerűen rádobunk egy pontot A – ra.

a) **Mekkora valószínűséggel esik a pont a B intervallumba?**

b) **Csökken – e a találat valószínűsége, ha B – t a nyitott intervallumra cseréljük?**

44. (K) Egy pálcát véletlenszerűen kettétörünk. Mi a valószínűsége, hogy a töréspont közelebb lesz a pálca valamelyik végéhez, mint a középpontjához?

45. (K) Egy pálcát véletlenszerűen kettétörünk. Jelöljük a pálca végpontjait A – val és B – vel, a töréspontot P – vel.

a) **Mekkora a valószínűsége annak, hogy a P pont közelebb lesz A – hoz, mint B – hez?**

b) **Mekkora a valószínűsége annak, hogy a törés után az egyik szakasz legalább kétszer akkora lesz, mint a másik?**

46. (K) Egy $5\ cm$ oldalú négyzetlapra érmét dobunk bizonyos távolságról. Mekkora az érme átmérője, ha annak valószínűsége, hogy az érme teljes terjedelmében a négyzet belsejébe essen $0,39$?

47. (K) Hány százaléka legyen a céltábla sugarának a középső kör (maximális pontszámot érő kör) sugara, ha azt akarjuk, hogy a céltáblát érő véletlen találatok esetén a maximális pontszám valószínűsége $0,01$ legyen?

48. (K) Egy kör alakú céltáblára véletlenszerűen lövés érkezik. Mi a valószínűsége, hogy a lövés helye közelebb lesz a kör középpontjához, mint a határvonalához?

49. (K) Egy négyzet alakú képkeret széleit érinti a kör alakú üveg. Az üveg mögött van egy kép Ildiről. Mekkora valószínűséggel találjuk el az üveget, ha célba vesszük a képtartót és azt biztosan el is találjuk?

50. (K) Egy négyzet alakú céltáblába a négyzet oldalainak felezőpontjait összekötve egy kisebb négyzetet rajzolunk. Ha a lövésünk találati helye a kiindulási négyzeten egyenletes eloszlású, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a találat a kisebb négyzetbe fog esni?

51. (K) Egy egység négyzetben kiválasztunk egy pontot véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy a pont közelebb van a négyzet középpontjához, mint valamelyik csúcsához?

52. (K) Egy négyzet alakú céltáblára lövünk. Tekintsük a következő eseményeket.

A: A tábla bal oldali felét találjuk el.

B: A tábla felső felét találjuk el.

Mit jelentenek a következő események? Határozd meg a valószínűségeket!

$C: A \cdot B$ $\quad$ $D: A + B$ $\quad$ $E: \overline{A}$ $\quad$ $F: A - B$

$G: B - A$ $\quad$ $H: \overline{A + B}$ $\quad$ $I: \overline{A} \cdot \overline{B}$ $\quad$ $J: \overline{A \cdot B}$

53. (K) Adott egy koordináta – rendszer, amelyben a következőképpen kijelölünk egy négyzetet: $-5 \leq x \leq 5$ és $-5 \leq y \leq 5$. Ebben a négyzetben találomra kiválasztunk egy pontot. Mekkora a valószínűsége a következő esemlényeknek?

$A: x \leq y$ $\quad$ $B: 0 \leq x$ $\quad$ $C: x^2 + y^2 \leq 25$

$D: A \cdot B$ $\quad$ $E: A + B$ $\quad$ $F: A \cdot B \cdot C$

54. (K) A koordináta – rendszerben egy pontot véletlenszerűen választunk abból a téglalapból, amelynek csúcsai $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; 3)$ és $(0; 3)$. Mi a valószínűsége, hogy a pont x koordinátája kisebb, mint az y koordinátája?

55. (K) A sík $A\ (0; 0); B\ (3; 2); C\ (3; -2)$ pontjai mint középpontok köré rajzoljunk egy – egy egységsugarú kört, jelentsenek ezek a körök urániumtömböket. Számítsd ki annak valószínűségét, hogy egy, a $P\ (2; 0)$ pontból találomra választott irányban haladó neutron nem ütközik bele egyik tömbbe sem!

56. (K) Legyen adott az egység sugarú kör K középpontjából induló $\vec{v}$ vektor és egy, a kör kerületén tetszőlegesen kiválasztott P pontba mutató $\overrightarrow{KP}$ vektor. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két vektor hajlásszöge nagyobb, mint $60°$?

57. (K) Adott egy egységnyi élű kocka és annak egy csúcsa. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kocka egy véletlenszerűen választott belső pontja legfeljebb $0,4$ egységnyi távolságra van a kocka adott csúcsától?

58. (E) Egy háromszög oldalai $3\ cm, 4\ cm$ és $5\ cm$. Mekkora a valószínűsége, hogy egy tetszőleges pontot véletlenszerűen kiválasztva a háromszög belsejében, az a leghosszabb oldalához lesz a legközelebb?

59. (E) Egy $12\ cm$ sugarú körben kiszíneztünk egy olyan körcikket, amelynek területe a kör területének $25\ \%$ - a. A színes körcikkre egy $4,5\ cm$ sugarú korongot dobunk.

***a)* Mekkora a körcikkhez tartozó középponti szög és a körcikk kerülete?**

***b)* Előfordulhat – e, hogy a korong sehol sem lóg ki a körcikkből?**

***c)* Mekkora a valószínűsége, hogy a korong nem lóg ki a körcikkből, ha a korongot ráejtjük a körre és arról nem lóg ki?**

60. (E) Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja K, egyik oldalának felezőpontja F. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy a KF egyenesére nem illeszkedő P pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az $KFP\ \Delta$ derékszögű, illetve tompaszögű lesz?

61. (E) Egy O középpontú körvonal egy adott pontja A. A körvonal által meghatározott körlapon véletlenszerűen választunk egy $P \neq A$ pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $AOP\ \Delta$ derékszögű, hegyesszögű, vagy tompaszögű lesz?

62. (E) Egy r sugarú kör kerületén megjelölünk egy P pontot. ezutáén a körlapon találomra választunk egy pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $r \cdot \sqrt{2}$?

63. (E) Egy téglalap alakú $5\ m \times 4\ m$ – es üres szobában leejtünk egy golyót. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a golyó egy olyan pontban áll meg, amelyik közelebb van a szoba egy sarkához, mint a középpontjához?

64. (E) Egy félköríven adott két véletlenszerűen választott pont. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága nem nagyobb a félkör sugaránál?

65. (E) Két ember megbeszéli, hogy 16 és 17 óra között találkoznak. Mennyi a valószínűsége, hogy egyikük sem vár 10 percnél többet?

66. (E) Két barát megbeszéli, hogy adott helyen találkoznak 12 óra és 13 óra között. Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyikük több mint fél órával a másik előtt ér oda, ha feltételezzük, hogy érkezésük az óra minden pillanatában egyformán valószínű?

67. (E) Anita és Csilla barátnők, ugyanazon a napon szeretnének bevásárolni a kedvenc boltjukban, mindketten 2 órát töltenek az üzletben. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy időben tartózkodnak a boltban, ha az üzlet 10 órától 20 óráig tart nyitva?

68. (E) Egy pár összeköltözik. Mindketten $6:30$ – kor kelnek és $7:40$ – ig be kell fejezniük a reggeli készülődést, hogy odaérjenek a munkahelyükre. A lánynak 30 perc, a fiúnak 10 perc a fürdőszobai elfoglaltsága. A ház kicsi, így egyszerre csak egyikük fér el a fürdőben. Mekkora valószínűséggel fognak reggelente elkészülni, ha véletlenszerűen mennek be a fürdőbe?

69. (E) Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban két hajó érkezik. Az előbb érkezőn rögtön megkezdik a rakodást, amely az egyiken 1 órát, a másikon 2 órát vesz igénybe. Ha a második hajó akkor érkezik, amikor a másikon még rakodnak, úgy várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell a rakodásra?

70. (E) Egy repülőtérre 10 és 11 óra között egy – egy véletlenszerű időpontban két repülőgép érkezik. A repülőtér 3 percenként tud fogadni gépeket. Mi a valószínűsége annak, hogy a repülőtér mindkét gépet azonnal tudja fogadni?

71. (E) Marcinak az uszodában megtetszik egy lány, akiről csak annyit tud, hogy minden délután kiszámíthatatlan érkezéssel pontosan egy órát úszik. Marci jegyet vált két óra hosszára, az uszoda délután 14 óra és 20 óra közötti nyitvatartási idejére. Számítsd ki a következő események valószínűségét!

a) $\boldsymbol{A}$: **Marci találkozik az uszodában a lánnyal.**

b) $\boldsymbol{B}$: **Marci egy óra hosszát együtt úszik a lánnyal.**

c) $\boldsymbol{C}$: **Marci $\boldsymbol{t}$ percet együtt úszhat a lánnyal.** $(\boldsymbol{0 \le t \le 60})$

72. (E) Az $\boldsymbol{y = m \cdot x + b}$ egyenletű egyenes $\boldsymbol{m}$ és $\boldsymbol{b}$ paramétereit a $[\boldsymbol{-2; 2}]$ intervallumból válaszhatjuk meg véletlenszerűen. Mekkora a valósznűsége, hogy ekkor az egyenes az $\boldsymbol{x}$ – tengelyt a $[\boldsymbol{-3; 3}]$ intervallumon kívül metszi?

73. (E) Tekintsük az $\boldsymbol{A\,(-4; -3); B(4; -3); C(4; 3); D(-4; 3)}$ csúcsokkal adott téglalapot. Válasszunk véletlenszerűen egy $\boldsymbol{P\,(x; y)}$ pontot az $\boldsymbol{ABCD}$ téglalapból. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor a pont koordinátáira az $\boldsymbol{|x| + |y| \le 2}$ egyenlőtlenség teljesül?

74. (E) Az $\boldsymbol{(0; 0); (1; 0); (0; 1); (1; 1)}$ egységnégyzetben kiválasztunk egy $\boldsymbol{P\,(x; y)}$ pontot véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy a pont koordinátáinak összege nagyobb, mint 1?

75. (E) Valaki választ két véletlen valós számot a $\boldsymbol{]0; 1[}$ intervallumból. Mekkora eséllyel lesz az összegük nagyobb, mint 1?

76. (E) Véletlenszerűen választunk két 0 és 1 közé eső számot. Mi a valószínűsége, hogy összegük legfeljebb 1?

77. (E) Véletlenszerűen kiválasztunk két számot 0 és 1 között. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az egyik szám négyezet sem haladja meg a másik számot?

78. (E) Ábel és Bence felírnak egy – egy 0 és 1 közé eső számot egy – egy kis papírlapra úgy, hogy a másik ne lássa. Ezután a lapokat összekeverik, majd húznak egyet - egyet. Aki a nagyobbat húzza, az nyer. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Ábel nyer?

79. (E) Valaki véletlenszerűen választ a $]0; 1[$ intervallumban egymástól függetlenül két számot, x – et és y – t, és ábrázold is a két pontot számegyenesen. Mekkora eséllyel lehet a $[0; 1]$ intervallumon így létrejött három szakaszból háromszöget szerkeszteni?

80. (E) Egy 10 egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kijelölünk 2 pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a köztük lévő távolság kisebb, mint 3?

81. (E) Egy 1 egység hosszúságú pálcát véletlenszerűen három darabra törünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a darabokból háromszög állítható össze?

82. (E) Egy egységnyi hosszú szakaszon véletlenszerűen választunk két – a végpontoktól különböző – pontot. Ezek az adott szakaszt három szakaszra bontják. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett részekből mint oldalakból egyenlő szárú háromszög szerkeszthető?

83. (E) Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy közelebb vannak egymáshoz, mint az egységszakasz végpontjaihoz?

84. (E) Válasszunk ki találomra a kocka 8 csúcsa közül hármat. Mi a valószínűsége annak, hogy az így kiválasztott 3 csúcs között nincs 2, amelyik egy él végpontja lenne?

85. (E) Válasszunk ki találomra a kocka 8 csúcsa közül hármat. Mi a valószínűsége annak, hogy az így kiválasztott 3 csúcsra fektethető sík nem illeszkedik a kocka egy negyedik csúcspontjára?

86. (E) Az $x^2 + b \cdot x + 1 = 0$ egyenletben b – t véletlenszerűen választjuk a $[-5; 5]$ intervallumról. Mi a valószínűsége, hogy az egyenletnek van valós gyöke?

87. (E) Az $x^2 + b \cdot x + 4 = 0$ egyenletben a b parméter értékét véletlenszerűen választjuk a $[-6; 6]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy valós gyöke lesz az egyenletnek?

88. (E) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $x^2 - 4x + c = 0$ egyenlet mindkét megoldása 1 – nél nagyobb, ha c – t a $[-2; 4]$ intervallumból választjuk véletlenszerűen?

89. (E) Tekintsük az $x^2 + p \cdot x + q = 0$ másodfokú egyenletet, melyben a p és q paramétereknek a $[-1; 1]$ intervallumból véletlenszerűen választva adunk értéket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy lesz valós gyöke a másodfokú egyenletnek?

90. (E) Az $a \cdot |x| + b = 0$ egyenletben szereplő a és b együtthatókat véletlenszerűen választjuk a $[-2; 2]$ intervallumból. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyenletnek van valós megoldása?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok