

Esemény algebra

DEFINÍCIÓ: (Véletlen jelenség)

Véletlen jelenség alatt olyan jelenséget értünk, amely lefolyását a körülmények (figyelembe vehető okok) nem határoznak meg egyértelműen.

DEFINÍCIÓ: (Véletlen tömegjelenség)

Véletlen tömegjelenség alatt olyan véletlen jelenséget értünk, amely meghatározott (azonos) körülmények között nagyszámban megismételhető.

DEFINÍCIÓ: (Kísérlet)

Kísérletnek nevezünk minden olyan vizsgálatot, amely egy véletlen jelenségre vonatkozik.

DEFINÍCIÓ: (Valószínűségi kísérlet)

Valószínűségi kísérletnek nevezzük a kísérletet, ha teljesíti a következő tulajdonságokat:

- A valószínűségi kísérlet lefolyása (eredménye) véletlenszerű, nem megjósolható.
- A valószínűségi kísérlet azonos körülmények között akárhányszor megismételhető.

Megjegyzés:

Minden valószínűségszámítási probléma egy kísérlethez kapcsolódik, amely során egy véletlen jelenséget megfigyelünk.

DEFINÍCIÓ: (Elemi esemény)

A kísérlet egy lehetséges kimenetelét elemi eseménynek nevezzük.

Megjegyzés:

Az elemi eseményeknek rendelkezniük kell a következő tulajdonságokkal:

- minden elemi eseményről egyértelműen el kell tudnunk döntenünk, hogy bekövetkezett - e , vagy sem
- egyszerre két elemi esemény nem következhet be
- valamelyik elemi eseménynek be kell következnie.

DEFINÍCIÓ: (Eseménytér)

Minden kísérlethez hozzárendelünk egy nem üres halmazt, melynek egyelemű részhalmazai az elemi események. Ezt az összes elemi eseményekből álló halmazt eseménytérnek nevezzük. Jele: H .

Megjegyzés:

Ha az eseménytér halmaza megszámlálható, akkor diszkrét valószínűségről, amennyiben pedig nem megszámlálható, akkor folytonos valószínűségről beszélünk.

DEFINÍCIÓ: (Esemény)

Az elemi események egy halmazát, vagyis az eseménytér egy részhalmazát eseménynek nevezzük. Jele: A, B, \dots

Megjegyzés:

Az esemény akkor következik be, ha valamelyik hozzá tartozó elemi esemény megvalósul, vagyis egy esemény többféleképpen is bekövetkezhet.

DEFINÍCIÓ: (Összetett esemény)

Összetett eseménynek nevezzük azokat az eseményeket, amelyek több elemi esemény megvalósulása esetén következnek be.

Megjegyzés:

Példa: $A = \{2 - \text{est dobunk dobókockával}\}; B = \{\text{prímszámot dobunk}\}$, ekkor az A esemény egy elemi esemény, a B esemény pedig összetett esemény.

DEFINÍCIÓ: (Biztos esemény)

Biztos esemény alatt olyan eseményt értünk, amely mindig bekövetkezik. Jele: I .

Megjegyzés:

A biztos esemény valószínűsége: $P(I) = 1$.

DEFINÍCIÓ: (Lehetetlen esemény)

Lehetetlen esemény alatt olyan eseményt értünk, amely sosem következik be. Jele: \emptyset .

Megjegyzés:

A lehetetlen esemény valószínűsége: $P(\emptyset) = 0$.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlő események)

Két esemény egyenlő, ha a kísérlet bármely kimenetele esetén mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem teljesül. Jele: $A = B$.

DEFINÍCIÓ: (Ellentett esemény)

Az A esemény ellentettje (komplementere) az az esemény, amely akkor következik be, amikor az A esemény nem valósul meg. Jele: \bar{A} .

Megjegyzés:

Ha az A esemény ellentettje a B esemény, akkor a B esemény ellentettje az A esemény.

Műveletek eseményekkel:

DEFINÍCIÓ: (Események összege)

Az A és B esemény összege (egyesítése) az az esemény, amely akkor következik be, ha az A és B esemény közül legalább az egyik bekövetkezik. Jele: $A + B$; $A \cup B$.

DEFINÍCIÓ: (Események szorzata)

Az A és B esemény szorzata (közös része) az az esemény, amely akkor következik be, ha mindkét esemény egyszerre bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$; $A \cap B$.

DEFINÍCIÓ: (Események különbsége)

Az A és B esemény különbsége az az esemény, amely akkor következik be, ha az A esemény megvalósul, de a B nem. Jele: $A - B$; $A \setminus B$.

Megjegyzés:

Két esemény különbsége megegyezik az egyik esemény és a másik ellentettjének közös részével.

Jelöléssel: $A - B = A \cdot \bar{B}$.

DEFINÍCIÓ: (Kizáró események)

Az A és B egymást kizáró (diszjunkt) események, ha egyszerre nem következhetnek be.

Megjegyzés:

Ha az A és B esemény egymást kizáró események, akkor $A \cdot B = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ: (Részalmaz reláció)

Ha az A esemény bekövetkezése esetén a B esemény mindig bekövetkezik, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény maga után vonja (megelőzi) a B eseményt. Jele: $A \subseteq B$.

Megjegyzés:

- Ha az $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
- Ha az $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

Műveleti tulajdonságok:

Legyenek A, B és C tetszőleges események az T eseménytéren. Ekkor teljesülnek a következők:

- Idempotencia (azonos hatványúság): $A + A = A$.
- Kommutativitás (felcserélhetőség): $A \cdot B = B \cdot A$.
- Asszociativitás (csoportosíthatóság, társíthatóság): $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- Disztributivitás (széttagolhatóság): $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- Egy esemény komplementerének komplementere önmaga: $\overline{\overline{A}} = A$.
- A lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény (és fordítva). Jelöléssel: $\overline{\emptyset} = I$.
- Egy esemény és komplementerének összege a biztos esemény. Jelöléssel: $A + \overline{A} = I$.
- Egy esemény és komplementerének szorzata a lehetetlen esemény. Jelöléssel: $A \cdot \overline{A} = \emptyset$.
- De Morgan – azonosságok: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ és $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.
- Speciális események esetén: $A + I = I$; $A \cdot I = A$; $A + \emptyset = A$; $A \cdot \emptyset = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ: (Teljes eseményrendszer)

Az A_1, A_2, \dots, A_n események véges vagy végtelen sorozatát teljes eseményrendszernek nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- $A_1 + A_2 + \dots + A_n = H$, vagyis összegük a biztos esemény,
- $A_i \cdot A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), vagyis páronként kizárják egymást,
- egyik sem a lehetetlen esemény, s pontosan az egyik biztosan bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: (Eseményalgebra)

Az események összességét (az eseménytér részhalmazainak halmazát) a rajtuk értelmezett műveletekkel együtt eseményalgebrának nevezzük.

TÉTEL: (Eseményalgebra alaptétele)

Véges eseményalgebrában minden összetett esemény a sorrendtől eltekintve egyértelműen felbontható elemi események összegére.

TÉTEL:

Véges eseményalgebrában n elemi esemény esetén az összes lehetséges esemény száma 2^n .

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. **(K)** Az alábbi kísérletek közül melyek tekinthetőek valószínűségi kísérleteknek?

A: Feldobunk egy érmét.

B: Leejtünk egy *i. e.* 6. századi kínai vázát.

C: Eldobunk egy hatoldalú dobókockát.

D: Kihúzzunk egy lapot a pakli kártyából.

E: Világbajnokként dobunk egy darts táblára.

F: Tekegolyót gurítunk a bábuk felé, de előtte még soha nem játszottunk ilyet.

G: Egy puzzle dobozt megborítva megszámloljuk, mennyi darab maradt benne.

2. **(K)** Határozd meg, hogy az alábbi valószínűségi kísérleteknek milyen elemi eseményei lehetnek, illetve milyen eseménytér tartozik hozzájuk!

A: Feldobunk két érmét.

B: Eldobunk egy hatoldalú dobókockát.

C: Dobunk egy beosztás nélküli táblára, feltételezve, hogy a táblát eltaláljuk.

3. **(K)** Tekintsd azt a kísérletet, amikor kockával dobunk egy számot. Ehhez kapcsolódóan adj példát a következő fogalmakra: eseménytér, biztos esemény, lehetetlen esemény, elemi esemény, összetett esemény, egymást kizáró események, egymást maga után vonó események, egyenlő események!

4. **(K)** Igaz - e, hogy 2 egymást kizáró esemény összege a biztos esemény?

5. **(K)** Három kártyát húztunk a csomag francia kártyából. Az *A* esemény legyen az, hogy a húzott lapok azonos színűek, a *B* esemény pedig, hogy páronként különböző figurák. Igaz - e, hogy a szorzatuk a lehetetlen esemény?

(A francia kártyacsomag 52 lapból áll, ahol a 4 szín – káró; kör; pikk; treff - mindegyikéből 13 – 13 darab van: 2; 3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; bubí; dáma; király; ász.)

6. (E) Adj meg 3 olyan valószínűségi kísérletet egy kocka segítségével, amelynek eseménytere véges / megszámlálhatóan végtelen / kontinuum végtelen!
7. (K) Feldobunk egy érmét, illetve egy dobókockát. Add meg az összes elemi eseményt, ha a kísérlet kimenetelének a következőt tekintjük:
- a) a kockával dobott szám 5 – tel vett osztási maradékát!
 - b) fej dobás esetén a dobott számot, írás esetén a dobott szám ellentettjét!
8. (K) Feldobunk egy kék és egy piros dobókockát.
- a) Add meg a véletlen jelenség lehetséges kimeneteleinek halmazát!
 - b) Add meg a lehetséges kimenetek közül azoknak a halmazát, amelyek esetén a dobott számok szorzata 6 – nál nem nagyobb!
9. (K) Egy csomag francia kártyából addig húzunk visszatevés nélkül, míg a húzott lap király nem lesz. Az esemény kimenetelének azt a sorszámot tekintjük, ahányadikra a királyt kihúzzuk. Sorold fel a következő események elemi eseményeit!
(A francia kártyacsomag 52 lapból áll, ahol a 4 szín – káró; kör; pikk; treff - mindegyikéből 13 – 13 darab van: 2; 3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; bubi; dáma; király; ász.)
- A: Legfeljebb harmadikra húzunk királyt.
- B: Legalább 40. – re húzunk királyt.
10. (K) Egy szabályos pénzérmét négyszer egymás után feldobunk. Jelentse *A* azt az eseményt, hogy a négy dobás között legfeljebb egy fej van, *B* azt, hogy legalább három írás, *C* azt, hogy pontosan három írás, és *D* azt, hogy legalább két fej!
- a) Add meg a kísérlethez tartozó elemi események halmazát!
 - b) Add meg az *A*; *B*; *C* és *D* eseményekhez tartozó elemi események halmazát!
11. (K) Dobjunk fel egy piros és egy zöld dobókockát.
- a) Add meg a kísérlethez tartozó eseményteret!
 - b) Add meg azt az *A* eseményt, ahol a két kockán dobott számok szorzata páratlan!

12. (K) Add meg a következő kísérletek eseményterét!

A: Egy urnában 3 kék, 4 piros és 8 zöld golyó van. Visszatevés nélkül kétszer egymás után húzunk egy – egy golyót.

B: Egy dobókockával négyszer dobunk, s a kísérlet kimenetele a számok összege.

C: Öt kártyára felírjuk az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyeket, majd betesszük azokat egy dobozba. Ezután kihúzunk belőlük kettőt egymás után, majd a húzás sorrendjében letesszük azokat az asztalra.

13. (K) Add meg az alábbi eseményekhez tartozó elemi események halmazát és az események komplementerét!

A: Egy érmét háromszor egymás után feldobunk, és lesz legalább két fej.

B: Az 1; 2; 3 számok véletlen sorrendje esetén az 1 – es és a 2 – es egymás mellé kerül.

14. (K) Add meg az alábbi eseményekhez tartozó elemi események halmazát és az események komplementerét!

A: Egy szabályos dobókockával prímszámot dobunk.

B: Egy szabályos dobókockával 3 – nál kisebb számot dobunk.

C: Egy szabályos dobókockával köbszámot dobunk.

15. (K) Egy 20 oldalú dobóikozaéder oldalaira 1 – től 20 – ig vannak felírva az egész számok. Ezzel dobva a kidobott számot vizsgálva, tekintsük a következő eseményeket:

A: Legfelejbb 15 – öt dobtunk.

B: Páros számot dobtunk.

C: Összetett számot dobtunk.

D: Prímszámot dobtunk.

E: Legalább 8 – at dobtunk.

a) Vannak - e közöttük egymást kizáró események?

b) Add meg a fenti események komplementer eseményeit!

16. (K) Egy szabályos dobókockát egyszer feldobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy páros számot, B azt, hogy prímszámot, C azt, hogy 1 – nél nagyobb páratlan számot és D azt, hogy 5 – tel osztható számot dobunk!

a) Ad meg a kísérlethez tartozó eseményteret!

b) Add meg az \bar{A} eseményt!

c) A felsorolt események közül melyek között áll fenn, hogy az egyik maga után vonja a másikat?

17. (K) Döntsd el, hogy az alább leírt eseményterek közül melyik diszkrét és melyik folytonos! Add meg a kísérlet egy konkrét lehetséges kimenetelét és az eseményteret!

Ejtőernyősök egy 40×40 méteres négyzet alakú területen gyakorolják a landolást 300 méter magasból.

a) A négyzetet középvonalaival felosztjuk $I.$; $II.$; $III.$; $IV.$ részekre. A kísérlet kimenetelének azt tekintjük, hogy melyik részen landolt az ugró.

b) A mezőre egy képzeletbeli rácsot fektetünk (a rácsvonalak 5 m – re vannak egymástól). Az ejtőernyősök ezen rácspontra ugranak véletlenszerűen. A kísérlet kimenetele az, hogy melyik rácspontra landolt az ugró.

c) A négyzetet egy koordináta – rendszer egységnyezetének tekintjük. A kísérlet kimenetele az a pont, ahol földet ért az ugró.

18. (K) Kockát vetünk. Az A esemény legyen az, hogy a dobott szám értéke páros, a B esemény pedig azt, hogy a dobott szám értéke páratlan. Határozd meg az események összegét, szorzatát és különbségét!

19. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy kockával prímszámot dobunk, a B pedig azt, hogy 3 – nál nem nagyobbat. Mít jelentenek a következő események?

$A + B$

$A \cdot B$

$A - B$

$B - A$

20. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy kockával 4 – nél nem nagyobbat dobunk, a B pedig azt, hogy 4 – nél nem kisebbet. Mít jelentenek a következő események?

$A + B$

$A \cdot B$

$A - B$

$B - A$

21. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy dobókockával páros számot dobunk, B jelentse azt, hogy 3 – nál nagyobbat. Mit jelentenek a következő események?

$$\begin{array}{cccc} A + B & A \cdot B & A - B & B - A \\ \bar{A} & A + \bar{B} & B - \bar{A} & B \cdot \bar{A} \end{array}$$

22. (K) Két szabályos játékkockával egyszerre dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy az egyik kockával páros számot dobtunk, a B pedig azt, hogy mindkét kockával ugyanazt a számot dobtuk. Mit jelentenek a következő események?

$$A + B \quad A \cdot B \quad A - B \quad B - A \quad (A + B) \cdot B$$

23. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy kockával kétszer egymás után dobva és a kapott számokat egymás mellé írva a keletkező kétjegyű szám 3 – mal osztható. Jelentse B azt az eseményt, hogy egy kockával kétszer egymás után dobva és a kapott számokat egymás mellé írva a keletkező kétjegyű szám 2 – vel osztható. Mit jelentenek a következő események?

$$\begin{array}{cccc} A + B & A \cdot B & A - B & B - A \\ \bar{A} & \overline{A + B} & \overline{A \cdot B} & \overline{A - B} \end{array}$$

24. (K) Három szabályos játékkockával egyszerre dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy az összeg prímszám, a B pedig azt, hogy legalább egy 2 – es szerepel a számok között. Mit jelentenek a következő események?

$$A + B \quad A \cdot B \quad A - B \quad B - A$$

25. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy 32 lapos magyar kártyából zöldet húzunk, a B pedig azt, hogy 9 – est. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$A + B \quad A \cdot B \quad A - B \quad B - A$$

26. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy csomag magyar kártyából kihúzott lap zöld, a B azt, hogy figura, a C azt, hogy alsó. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$A + B \quad A \cdot B \quad A - B \quad B + C \quad B \cdot C \quad A \cdot C$$

27. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy 32 lapos magyar kártyából makkot húzunk, a B azt, hogy 8 – ast, a C azt, hogy királyt. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$(A - B) - C$$

$$(A - B) \cdot C$$

$$(A \cdot B) + C$$

28. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy 32 lapos magyar kártyából zöldet húzunk, a B azt, hogy makkot, a C azt, hogy figurát. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$(A + B) + C$$

$$(A \cdot B) \cdot C$$

$$(A - B) - C$$

29. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy 32 lapos magyar kártyából ászt húzunk, a B azt, hogy királyt, a C azt, hogy pirosat. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$A - B$$

$$A - C$$

$$(B - A) \cdot C$$

$$\bar{A} \cdot B$$

30. (K) Az A jelentse azt az eseményt, hogy egy csomag magyar kártyából kihúzott lap piros, a B azt, hogy zöld, a C azt, hogy 7 - es. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$A + B + C$$

$$(A + B) - C$$

$$(A \cdot B) - C$$

$$(C - A) - B$$

31. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy csomag magyar kártyából kihúzott lap piros, a B azt, hogy figura, a C azt, hogy ász. Mit jelentenek a következő események?
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$A + B$$

$$A \cdot B$$

$$A + C$$

$$A \cdot C$$

$$B + C$$

$$B \cdot C$$

$$A + B + C$$

$$A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C$$

$$A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot (B + C)$$

$$A \cdot B + C$$

32. (K) Legyen A az az esemény, hogy egy pakli magyar kártyából kihúzott lap piros, a B az, hogy zöld, a C pedig az, hogy figura. Mit jelentenek a következő események? (A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld – mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$\begin{array}{cccc} (A + B) \cdot C & A + B \cdot C & A \cdot B + C & A \cdot (B + C) \\ A \cdot B \cdot C & \overline{A + B} \cdot C & \overline{A \cdot B} \cdot C & \overline{A - B} - C \end{array}$$

33. (K) Egy csomag magyar kártyából véletlenszerűen kihúzzunk egy lapot. Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott lap piros, a B az, hogy a kihúzott lap figura, a C az, hogy a kihúzott lap király, a D pedig az, hogy a kihúzott lap makk. Mit jelentenek a következő események?

(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld – mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

$$\begin{array}{cccc} A + B & A \cdot B & B + C + D & A \cdot B \cdot C \\ (B + D) \cdot C & B \cdot D + C & A - (B - C) & \overline{A} \cdot B \\ A \cdot D & \overline{A} \cdot \overline{D} & \overline{A} + \overline{D} & \overline{B} - \overline{C} \end{array}$$

34. (K) A lottón az 1; 2; ...; 89; 90 számok közül ötöt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelöljük A – val azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van a 14; 37; 42; 51, a B pedig azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van a 37; 41; 68. Mit jelentenek a következő események?

$$\begin{array}{cccc} A + B & A \cdot B & A - B & B - A \end{array}$$

35. (K) A lottón az 1; 2; ...; 89; 90 számok közül ötöt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok mind párosak, a B pedig azt, hogy a kihúzott számok páratlanok. Mit jelentenek a következő események?

$$\begin{array}{cccc} A + B & A - B & B - A & \overline{A} \cdot B \end{array}$$

36. (K) A lottón az 1; 2; ...; 89; 90 számok közül ötöt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között van egyjegyű, a B azt, hogy a kihúzott számok között van 3 – mal osztható, a C azt, hogy a kihúzott számok mindegyike 5 – re végződik, a D pedig azt, hogy a kihúzott számok mindegyike kisebb 20 – nál. Mit jelentenek a következő események?

$$\begin{array}{cccc} A - B & B \cdot C & D - A & A \cdot D \end{array}$$

37. (K) A lottón az 1; 2; ...; 89; 90 számok közül ötöt húznak ki. A számok kihúzásának sorrendje nem számít. Jelentse A azt az eseményt, hogy a kihúzott számok között szerepel a 7; 49. A B azt, hogy közöttük van az 1; 11. A C pedig azt, hogy a következő öt számot húzták ki: 1; 7; 11; 49; 64. Mit jelentenek a következő események?

$$(A + B) \cdot C$$

$$(A + B) \cdot \bar{C}$$

$$(A + B) - C$$

38. (K) A 0; 1; ...; 8; 9 számjegyek közül válasszunk ki négy számjegyet úgy, hogy egy – egy számjegy ismétlődhet is. Jelöljük A – val azt az eseményt, hogy a kiválasztott számjegyek között nem szerepel a 0; B – vel pedig azt, hogy pontosan egy 1 – es van közöttük. Mit jelentenek a következő események?

$$A - B$$

$$B - A$$

$$A \cdot B$$

$$\bar{A} \cdot B$$

39. (K) Találomra felírunk egy kétjegyű számot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a szám páratlan, a B azt, hogy a szám osztható 3 – mal, a C azt, hogy a szám osztható 4 – gyel. Mit jelentenek a következő események?

$$A + B$$

$$A \cdot B$$

$$\bar{A} \cdot B$$

$$A - B$$

$$A \cdot C$$

$$\bar{A} \cdot C$$

$$A - C$$

$$B \cdot C - \bar{A}$$

40. (K) Két távoli város között vasúton és légi úton szállítanak árut. Az A esemény jelentse azt, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, a B esemény pedig azt, hogy van légi szállítás. Mit jelentenek a következő események?

$$A + B$$

$$A - B$$

$$\bar{A} + \bar{B}$$

$$A + \bar{B}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$B + (\bar{B} \cdot A)$$

41. (K) Egy raktárból lehet vasúton is és közúton is árut szállítani. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, a B pedig azt, hogy aznap van közúti szállítás. Mit jelentenek a következő események?

$$A + B$$

$$B - A$$

$$\bar{A} + \bar{B}$$

$$\bar{A} + B$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$A + \bar{A} \cdot B$$

42. (K) Egy áruházban két személyszállító liftet és egy mozgólépcsőt építettek. Jelentse A_1 azt az eseményt, hogy az első lift működik, A_2 azt, hogy a második, M pedig azt, hogy a mozgólépcső üzemképes. Mit jelentenek a következő események?

$$A_1 + A_2 + M$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot M$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{M}$$

$$A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot M + A_2 \cdot M$$

$$\overline{A_1 + M}$$

$$\overline{A_2 \cdot M}$$

43. (K) Az A jelentse azt az eseményt, hogy osztályunkban legalább 3 tanulónak lesz minden tárgyból jelese, a B azt, hogy legalább 3 tanulónak lesz matematikából jelese. Mit jelentenek az $A + B$ és az $A \cdot B$ események?

44. (K) Legyen a B az az esemény, hogy osztályunk legidősebb tanulója betöltötte a 18. életévét, az A az, hogy a legidősebb tanuló betöltötte a 17. életévét. Mit jelent az $A - B$ esemény?

45. (K) Az A jelentse azt az eseményt, hogy egy gyár 4% - nál alacsonyabb selejtszázalékkal dolgozik, a B azt, hogy 2% - nál alacsonyabb a selejtszázalék. Mit jelentenek a következő események?

$$A - B$$

$$B - A$$

$$A \cdot B$$

$$A + B$$

46. (K) Egy mobiltelefon – szervízben 3 készüléket ellenőriznek. Az A esemény jelentse azt, hogy legalább 1 készülék hibás, a B pedig azt, hogy mindhárom készülék működik. Mit jelentenek a következő események?

$$A - B$$

$$B - A$$

$$A \cdot B$$

$$A + B$$

47. (K) Egy kör alakú céltáblára célba lövünk. Az A jelentse azt az eseményt, hogy lövésünk a céltábla bal oldali részébe esik, a B azt, hogy az alsó részébe. Mit jelentenek a következő események?

$$A - B$$

$$B - A$$

$$B \cdot \overline{A}$$

$$\overline{A \cdot B}$$

48. (E) Egy pizzériában 3 asztalhoz lehet leülni. Legyen az A esemény az, hogy az elsőtől; a B esemény az, hogy a másodiktól; a C esemény pedig az, hogy a harmadiktól fut be rendelés. Mit jelentenek a következő események?

$$A \cdot \overline{B} \cdot C$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C}$$

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C$$

49. (E) Egy cégnél adott időpontban 3 helyről várnak telefonhívást. Bevezetjük a következő eseményeket: A_1 az első helyről; A_2 a második helyről; A_3 a harmadik helyről befut a telefonhívás. Mit jelentenek a következő események?

$$A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \quad \overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3} \quad A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

50. (E) Egy gyártósor két futószalagból és egy szeletelőből áll. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első futószalag működik, a B azt, hogy a második futószalag üzemképes, a C pedig azt, hogy a szeletelő működik. Mit jelentenek a következő események?

$$A + B + C \quad A \cdot B \cdot C \quad \overline{B} \cdot C \quad \overline{A + B} \quad (A - B) \cdot C$$

51. (E) Egy család kirándulni megy a hétvégén. Legyen A az az esemény, hogy a család fogaskerekű vasúttal utazik, B pedig jelentse azt, hogy libegőznek. Mit jelentenek a következő események?

$$A \cdot B \quad A + B \quad B \cdot \overline{A}$$

$$\overline{A \cdot B} \quad A + \overline{A} \cdot B \quad \overline{A} \cdot \overline{B}$$

52. (K) Jelentse $A_1; \dots; A_6$ azokat az eseményeket, hogy egy dobókockával egyest, ..., hatost dobunk. Írd le a következő eseményeket az előző események segítségével!

A: A dobott szám osztható 2 – vel.

B: A dobott szám osztható 3 – mal.

C: A dobott szám osztható 2 – vel vagy 3 – mal.

D: A dobott szám osztható 2 – vel és 3 – mal.

E: A dobott szám sem 2 – vel, sem 3 – mal nem osztható.

F: A dobott szám osztható 2 – vel, de 3 – mal nem.

G: A dobott szám nem osztható 2 – vel.

H: A dobott szám legalább 4.

I: A dobott szám legfeljebb 4.

53. (K) Két dobókockával dobunk egyszerre, és a dobott számok összegét vizsgáljuk. Legyen az A esemény az, hogy az összeg páratlan, a B esemény az, hogy az összeg 3 – mal osztható és a C pedig az, hogy az összeg nagyobb, mint 6. Add meg az alábbi eseményeket az A ; B és C események segítségével!

D: Az összeg 6 – tal osztható.

E: Az összeg hétnél kisebb, vagy páratlan szám.

F: Az összeg 6 – nál nagyobb páros szám.

G: Az összeg 3 – mal nem osztható páros szám vagy 6 – nál nagyobb.

H: Az összeg éppen 6.

54. (K) Egy szabályos dobókockát egymás után négyszer feldobunk. Legyen A_i az az esemény, hogy az i – edik dobás hatos. Írd fel eseményalgebrai jelölésekkel a következő eseményeket!

A: Csak a harmadik dobás hatos.

B: Legalább egyszer hatost dobunk.

C: Pontosan kétszer dobunk hatost.

55. (K) Három hallgató vizsgázott és tekintsük a következő eseményeket:

A: Anna a vizsgán átment.

B: Béla megbukott.

C: Csaba átment.

Írd fel eseményalgebrai kifejezésekkel a következő eseményeket!

D: A két fiú megbukott, de Anna átment a vizsgán.

E: Mindhárman átmentek

F: Csak egyikük bukott meg.

56. (K) Tekintsük a következő eseményeket: A jelenti azt, hogy Anasztázia megbukott; B azt, hogy Balázs átment; C pedig azt, hogy Csongor megbukott matematikából. Írd fel eseményalgebrai kifejezéssel a következő eseményeket!

D: Anasztázia és Balázs megbukott, de Csongor átment a vizsgán.

E: Csak egyikük bukott meg év végén.

F: Mindhárman átmentek év végén.

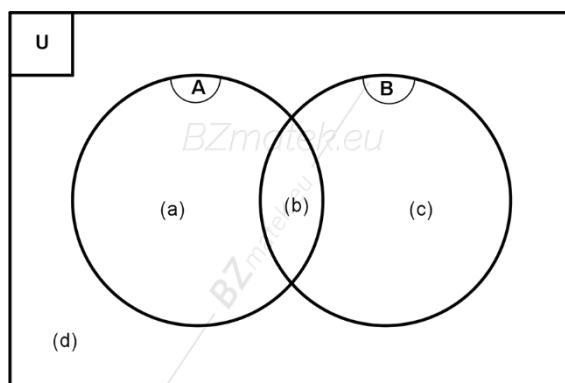
57. (K) Egy csomag magyar kártyából véletlenszerűen kihúzzunk egy lapot. Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott lap piros, a B az, hogy a kihúzott lap figura, a C az, hogy a kihúzott lap király, a D pedig az, hogy a kihúzott lap makk. Add meg a következő eseményeket az $A; B; C; D$ eseményekkel végzett műveletek segítségével!
(A magyar kártyacsomag 32 lapból áll, ahol a 4 szín – makk, piros, tők, zöld - mindegyikéből 8 – 8 darab van: VII; VIII; IX; X; alsó; felső; király; ász.)

E : A kihúzott lap piros király.

F : A kihúzott lap piros figura vagy makk király.

G : A kihúzott lap zöld király, vagy tők király.

58. (K) Jelentse U azt az eseményt, hogy egy szám kétjegyű; A azt az eseményt, hogy egy kétjegyű szám páros, B pedig azt, hogy egy kétjegyű szám 5 – tel osztható. Az alábbi ábrán $a; b; c; d$ eseményeket jelölnek.



a) Írd le az $a; b; c; d$ és $(a + c)$ eseményeket $A; B; U$ segítségével!

b) Fejezd ki A és B eseményekkel azt, hogy egy kétjegyű szám nem 0 – ra végződik!

59. (K) Jelentse A azt az eseményt, hogy az x valós számra igaz: $0 < x < 3$, a B esemény pedig azt, hogy az x a 2 és 7 közötti nyílt intervallum eleme. Mit jelentenek a következő események?

$A + B$

$A \cdot B$

$B - A$

$\bar{A} + \bar{B}$

Fejezd ki A és B eseményekkel a következőket!

$C: x \leq 0$, vagy $x \geq 7$

$D: 0 < x \leq 2$

60. (K) Egy számítógép monitorján egy számegyenes $[-5; 15]$ intervalluma látható. Véletlenszerűen felvillannak a szakaszon egyes pontok. Jelentse A azt az eseményt, hogy a felvillanó pont a $]0; 5[$ intervallumba esik, B pedig azt, hogy a $]3; 10[$ -be. Mit jelentenek a következő események?

$$A \cdot B$$

$$A + B$$

$$A \cdot \bar{B}$$

$$\bar{A} + B$$

61. (K) Egy számegyenesen véletlenszerűen felvillannak a $[-3; 13]$ intervallumban egyes pontok. Jelentse A azt az eseményt, hogy a felvillanó pont a $[-1; 6]$ intervallumba esik, a B esemény pedig azt, hogy a $]2; 9[$ intervallumba. Mit jelentenek a következő események: $A \cdot B; A + B; A - B; B - A; \bar{B}; \bar{A} + B$?

62. (E) Egy számítógép monitorján egy koordináta – rendszer részlete látható: azon pontok, amelyek mindkét koordinátájára igaz, hogy a $[-5; 5]$ intervallumba esnek. Véletlenszerűen felvillannak a monitoron egyes pontok. Jelentse A, B és C a következő eseményeket a felvillanó pont koordinátáitól függően: $A: x^2 + (y - 1)^2 \leq 9; B: x > 2$ és $C: y > x + 1$. Ábrázold koordináta – rendszerben a következő eseményeket: $\bar{C}; A \cdot B; A + C; B - C$!

63. (E) Egy számítógép monitorján egy koordináta – rendszer részlete látható: azon pontok, amelyek mindkét koordinátájára igaz, hogy a $[-4; 4]$ intervallumba esnek. Véletlenszerűen felvillannak a monitoron egyes pontok. Jelentse A, B és C a következő eseményeket a felvillanó pont koordinátáitól függően: $A: x^2 + y^2 < 16; B: x > 0$ és $C: y > 0$. Ábrázold koordináta – rendszerben a következő eseményeket: $A \cdot B; B \cdot C; \bar{A} \cdot B; A \cdot B \cdot C; \bar{A} \cdot B \cdot C; A + B; A + B + C$!

64. (E) Legyenek A és B nem lehetetlen események. Adottak az $A \cdot \bar{B}; \bar{A} \cdot B$ és $\overline{A + B}$ események. Milyen negyedik eseményt kell felvennünk, hogy a 4 esemény teljes eseményrendszert alkosson?

65. (E) Az A és B nem lehetetlen események. Teljes eseményrendszert alkot – e a következő három esemény: $A + A \cdot B; \overline{A + B}; \overline{\bar{B} + A}$?

66. (E) Milyen A és B eseményekre állhat fenn az $A + B = \bar{A}$ egyenlőség?

67. (E) Hozd egyszerűbb alakra következő kifejezést!

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) + (\overline{A} + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

68. (E) Bizonyítsd be az alábbi eseményalgebrai azonosságot!

$$\overline{A} + (A \cdot C - \overline{B}) + (B \cdot C - A) = \overline{\overline{B \cdot C} + \overline{B}} + \overline{A}$$

69. (E) Bizonyítsd be az alábbi eseményalgebrai azonosságot!

$$(A - A \cdot B) \cdot C = A \cdot \overline{B} \cdot C$$

70. (E) Bizonyítsd be az alábbi eseményalgebrai azonosságot!

$$A + \overline{I \cdot (A + B)} + \overline{A + \overline{B}} = I$$

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2011.; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

- (15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (21) Saját anyagok