

Deriválás alkalmazása: érintő egyenlete

A $P(x_0; y_0)$ pontra illeszkedő érintő egyenletének felírása:

1. Határozzuk meg az adott függvény deriváltfüggvényét.
2. Számítsuk ki az érintő meredekségét, a deriváltfüggvény helyettesítési értékét: $m = f'(x_0)$.
3. Ekkor az érintő egyenletét felírhatjuk a következőképpen: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Gyakorló feladatok

1. Határozd meg az alábbi függvények megadott pontokon átmenő szelőinek meredekségét!

A: $f(x) = x^2 - 1$ $x_1 = -1$ $x_2 = 3$

B: $g(x) = \sqrt{x+1}$ $x_1 = 0$ $x_2 = 3$

C: $h(x) = \cos x + 2$ $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{\pi}{6}$

D: $i(x) = 2^{-x}$ $x_1 = -2$ $x_2 = 1$

2. Add meg az alábbi függvények megadott pontokon átmenő szelőinek egyenletét!

A: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$

B: $g(x) = \frac{1}{x}$ $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 1$

C: $h(x) = \operatorname{tg} x$ $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{\pi}{4}$

D: $i(x) = \log_3(x-2) + 1$ $x_1 = 5$ $x_2 = 7$

3. Határozd meg az $f(x) = x^2$ függvény $-2; -1; 0; 2; 4; 6$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő iránytangensét!

4. Határozd meg az $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ függvény $1; 2; 3; 4$ abszcisszájú pontjaiban húzott érintők iránytangensét!

5. Határozd meg a szinuszfüggvény grafikonjához a $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}$ abszcisszájú pontjaiba húzható érintő iránytangensét!

6. Van-e az $f(x) = x^3 - 10$ függvénynek olyan érintője, amelynek az iránytangense $-3; 0; 300$? Ha van ilyen érintő, akkor add meg az érintési pont koordinátáit!

7. Határozd meg az $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ függvénynek azokat a pontjait, amelyekben az érintő iránytangense $-\frac{3}{2}$, illetve 0!
8. Határozd meg az $f(x) = x^2$ parabola $P(2; 4)$ pontjában húzott érintő egyenletét!
9. Határozd meg az $f(x) = x^2 - x$ függvény $P(1; 0)$ pontján átmenő érintő egyenletét!
10. Határozd meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonján lévő $P\left(2; \frac{1}{2}\right)$ ponthoz tartozó érintő egyenes egyenletét!
11. Határozd meg az $f(x) = x^3 - 2x + 2$ függvény grafikonján lévő $P(1; 1)$ ponton átmenő érintő egyenes egyenletét!
12. Írd fel az $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ függvény $P(-2; 5)$ pontjában húzott érintő egyenletét!
13. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$ függvény grafikonját az $E(1; 0)$ pontban érinti!
14. Írd fel az $y = x \cdot \sin x$ egyenletű görbéhez az origóban húzott érintő egyenletét!
15. Határozd meg az $f(x) = \cos(3x - \pi)$ függvény grafikonjának $P\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$ pontjában húzott érintő egyenletét!
16. Mi az egyenlete annak az egyenesnek, amely az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 \cdot \sin x$ függvény grafikonját a $P(\pi; 0)$ pontban érinti?

17. Írd fel az alábbi függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét!

A: $a(x) = 2x^2$ $x_0 = 1$

B: $b(x) = -0,2x^2 + 6x + 3$ $x_0 = 5$

C: $c(x) = -(x + 3)^2 + 3$ $x_0 = -1$

D: $d(x) = x^2 - x^3$ $x_0 = 0$

E: $e(x) = 0,1x^2$ $x_0 = 2$

F: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ $x_0 = \frac{\sqrt{10}}{2}$

18. Írd fel az alábbi függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét!

A: $a(x) = \frac{2}{x} - 2$ $x_0 = 4$

B: $b(x) = \frac{8}{4 + x^2}$ $x_0 = 2$

C: $c(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$ $x_0 = -2$

D: $d(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$

E: $e(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ $x_0 = 4$

F: $f(x) = x^7 + \sqrt{x}$ $x_0 = 1$

19. Írd fel az alábbi függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét!

A: $a(x) = x^3$ $x_0 = 2$

B: $b(x) = 16 - x^2$ $x_0 = 2$

C: $c(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ $x_0 = -1$

D: $d(x) = \sin x$ $x_0 = 0$

E: $e(x) = 4 \cdot \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{6}$

F: $f(x) = 2 \cdot \cos x$ $x_0 = \pi$

20. Írd fel az alábbi függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét!

A: $a(x) = \sin(2x)$ $x_0 = 3$

B: $b(x) = \cos(2x + \pi)$ $x_0 = \frac{\pi}{6}$

C: $c(x) = \sin x \cdot \cos x$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$

D: $d(x) = 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$ $x_0 = -\frac{\pi}{3}$

E: $e(x) = x \cdot \sin x$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$

F: $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ $x_0 = \pi$

21. Írd fel az alábbi függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét!

A: $a(x) = e^{\cos x}$ $x_0 = \frac{\pi}{3}$

B: $b(x) = x^{2x}$ $x_0 = 1$

22. Írd fel az $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 2$ függvény grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét!

23. Mi annak az egyenesnek az egyenlete, amely az $x^3 - 3x + 2y - 5 = 0$ egyenletű görbét a -2 abszcisszájú pontjában érinti?

24. Írd fel az $f(x) = x \cdot \cos x$ függvény görbéjéhez a 0 abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét!

25. Írd fel az $f(x) = 3 \cdot \cos x$ függvény grafikonjához a $\frac{\pi}{3}$ abszcisszájú pontjában húzható érintő egyenletét!

26. Írd fel az $f + g^2$ függvény grafikonjához az $\frac{5\pi}{4}$ abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét, ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin^2 x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \cos x$!

27. Mekkora szöget zár be az x – tengellyel az $f(x) = x^{10} - 3x^8 + 4x^7 + 6$ függvény grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzott érintő? Írd fel az érintő egyenletét!
28. Írd fel az $x = y^2$ egyenletű görbéhez a 4 abszcisszájú pontjaiban húzható érintők egyenletét!
29. Írd fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek az $y = x^2 - 5x$ egyenletű görbét a 6 ordinátájú pontjaiban érintik!
30. Határozd meg az $y = \frac{2}{1-x}$ egyenletű hiperbolához a 2 ordinátájú pontjában húzott érintő egyenletét!
31. Határozd meg az $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ függvény $P(x; 9)$ pontjához tartozó érintőjének egyenletét!
32. Határozd meg az $f(x) = x^3$ függvény azon érintőinek az egyenletét, amelyek párhuzamosak az $y = x - 1$ egyenletű egyenessel!
33. Határozd meg az $f(x) = x^2 - 7x + 3$ görbének az $5x + y = 3$ egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét!
34. Van – e olyan pontja az $f(x) = 2x^2 - x^3$ görbének, amelyhez tartozó érintő párhuzamos az $y = x$ egyenletű egyenessel?
35. Határozd meg az $f(x) = \frac{5x^2 + 4}{x}$ görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos az $y = x$ egyenessel!
36. Határozd meg az $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ görbe azon pontjait, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az x – tengellyel!

37. Határozd meg az $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ görbének azokat a pontjait, amelyekhez az x – tengellyel párhuzamos érintő tartozik!
38. Határozd meg az $f(x) = 2x - x^2$ egyenletű parabolának azt a pontját, amelyhez tartozó érintő párhuzamos az $A(1; 1)$ és a $B(3; -3)$ pontokra illeszkedő szelővel!
39. Milyen x helyen lesz párhuzamos az $f(x) = -x^2 + x + 2$ görbe érintője a második síknegyed szögfelezőjével?
40. Adj meg az $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 8$ görbéhez olyan x_0 számot, hogy a görbe x_0 abszcisszájú pontjában az érintő párhuzamos legyen az x – tengellyel!
41. Az $f(x) = x^2$ egyenletű parabola mely pontjában húzott érintő lesz merőleges az $y = \frac{2}{3}x + 5$ egyenletű egyenesre? Add meg az érintő egyenletét!
42. Adj meg az $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$ görbéhez olyan x_0 számot, hogy a görbe x_0 abszcisszájú pontjában az érintő merőleges legyen az y – tengellyel! Add meg az érintő egyenletét is!
43. Határozd meg az $f(x) = 3x - x^2$ parabola P és Q pontját úgy, hogy a görbe P – beli érintője párhuzamos legyen a $2x + y = 3$ egyenletű egyenessel, a Q – beli érintő pedig merőleges legyen rá!
44. Határozd meg az x - tengelynek azt a P pontját, ahonnan olyan érintő húzható az $f(x) = x^2$ egyenletű parabolához, amelyik 45° - os szöget zár be az x – tengellyel!
45. Add meg az $f(x) = x^3$ függvény grafikonjának azon érintőjének egyenletét, amelynek irányszöge 45° !
46. Add meg az $f(x) = x^3 - x^2$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbéhez húzott érintő az x – tengellyel 45° - os szöget alkot!

47. Határozd meg α értékét úgy, hogy az $f(x) = \frac{\alpha}{x^2 - 1}$ görbe $x = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő az x - tengellyel 60° - os szöget alkosson!
48. Az $f(x) = 7x^{13} - \sqrt{5} \cdot x^8 + 2x + 3$ görbe a P pontban metszi az ordinátatengelyt. Írd fel a görbe P - beli érintőjének egyenletét!
49. Határozd meg az $f(x) = x^3 - 5x^2$ görbének az abszcisszatengelyre illeszkedő pontjait és a görbét ezekben a pontokban érintő egyenesek egyenletét!
50. Az $f(x) = x^3 - 8x^2 - 4x + 32$ függvény görbéjéhez az x - tengely pozitív felével közös pontjaiban érintőket húzunk. Határozd meg az érintők metszéspontjának koordinátáit!
51. Határozd meg az $f(x) = x^3 - 9x$ görbének az x - tengelyre illeszkedő pontjait és a görbét ezekben a pontokban érintő egyenesek meredekségét!
52. Határozd meg az $f(x) = 2x^2 - 2x$ parabola és az $y = 1 - x$ egyenletű egyenes metszéspontját! Írd fel ezekhez a pontokhoz a parabola érintőinek az egyenletét!
53. Tekintsük az $f(x) = x^3 - x^2$ és $g(x) = x^2 - 2x + 4$ függvények grafikonját! Igazold, hogy a grafikonoknak pontosan egy közös pontjuk van és határozd meg ezt a pontot! Határozd meg a grafikonok metszéspontján átmenő érintők egyenletét!
54. Melyik pontban érinti az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ egyenletű görbét a $9x - y = 26$ egyenletű egyenes?
55. Adj meg olyan p valós számot úgy, hogy az $f(x) = x^2 + p \cdot x + 10$ görbe 2 abszcisszájú pontjába húzható érintő párhuzamos legyen az $y = 12x - 1$ egyenessel!
56. Határozd meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = x^2 \cdot \cos x + p \cdot x$ görbe 2π abszcisszájú pontjához tartozó érintő meredeksége 4π legyen!

57. Határozd meg k értékét úgy, hogy az $f(x) = k \cdot x^2 - \ln x$ ($x > 0$) függvény $x = 3$ koordinátájú pontjába húzott érintőjének meredeksége 2 legyen! Írd fel az érintő egyenletét!
58. Határozd meg a p értékét úgy, hogy az $y = -2x + p$ egyenes érintse a következő függvényt: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$!
59. Számítsd ki a p azon értékeit, amelyekre az $y = p \cdot x + \frac{1}{2}$ egyenes érinti az $f(x) = -\sqrt{-x+1} + 2$ függvényt!
60. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - 4x^2 + 4a \cdot x + b$ függvényt ($a; b \in \mathbb{R}$). Határozd meg az a és a b paraméter értékét úgy, hogy az $y = x$ egyenletű egyenes érintse az f grafikonját a görbe 0 abszcisszájú pontjában!
61. Határozd meg p és q értékét úgy, hogy az $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$ parabola érintse az $y = x$ egyenest az $x_0 = 2$ abszcisszájú pontban!
62. Határozd meg a, b és c értékét úgy, hogy az $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ parabola átmenjen a $P(2; 4)$ ponton, az $y = 2x - 1$ egyenes pedig érintse ezt a parabolát az $x = 1$ abszcisszájú pontjában!
63. Az $f(x) = x^2 + 4x - 3$ parabola melyik pontjához tartozó érintő illeszkedik a $P(3; 2)$ pontra? Add meg az érintő egyenletét!
64. Határozd meg az $f(x) = x^2$ parabolának a $P(2; 3)$ ponton áthaladó érintőit!
65. Jelöljük az $f(x) = 4x - x^2$ parabola és az x – tengely metszéspontjait A – val és B – vel, a parabola tengelypontját T – vel. Mekkora annak a trapéznek a területe, amelyet az x – tengely megfelelő szakasza, valamint a parabolához az A , a B és a T pontban húzott érintő fog közre?

66. Bizonyítsd be, hogy az $y = x^2$ egyenletű parabolának a $P \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ ponton áthaladó érintői merőlegesek egymásra!
67. Tekintsük az $f(x) = x^2 + a \cdot x + 1$ görbékhez az 1 abszcisszájú pontjukban húzott érintőket! Bizonyítsd be, hogy ezek az egyenesek áthaladnak egy közös ponton!
68. Tekintsük az $f(x) = x^3 - x$ görbét. Bizonyítsd be, hogy e görbe egyetlen pontját kivéve tetszőleges pontjába húzott érintővel van párhuzamos érintője az adott görbének! Melyik az az egy pont, amelynél nincs ilyen?
69. Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ hiperbola tetszőleges pontjában húzott érintő állandó területű háromszögeket metsz ki a koordináta – tengelyekből!
70. Igazold, hogy az $y = \cos^2 x + \sin(2x)$ és az $y = -5x^2 + 2x + 1$ egyenletű görbék $x = 0$ abszcisszájú pontjukban érintik egymást! (Ezen azt értjük, hogy ebben a pontban érintőjük is azonos!)
71. Igazold, hogy ha $m \in \mathbb{R}$, akkor az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^4$ függvény grafikonjának van az $y = m \cdot x + 2$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintője!
72. Igaz - e, hogy bármely valós m esetén az $y = 8 - x^2$ egyenletű görbének van az $y = m \cdot x + 3$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintője?
73. Igaz - e, hogy ha m tetszőleges valós szám, akkor az $y = 2x^2 - 5x + 3$ egyenletű parabolának van az $y = m \cdot x - 1$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintője?
74. Add meg az \mathbb{R} halmaznak azt a legbővebb D részhalmazát, amelyre igaz az állítás!
„Ha $m \in D$, akkor az $f(x) = x^3 - x$ görbének van m iránytangensű érintője.”

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Schlegl István; 2015.; Sokszínű matematika - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Trembeczki Csaba; 2016.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 1.; Mozaik Kiadó; Szeged
- (6) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 3. feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged
- (7) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Gerőcs László; 2011.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (12) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (13) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (14) Saját anyagok