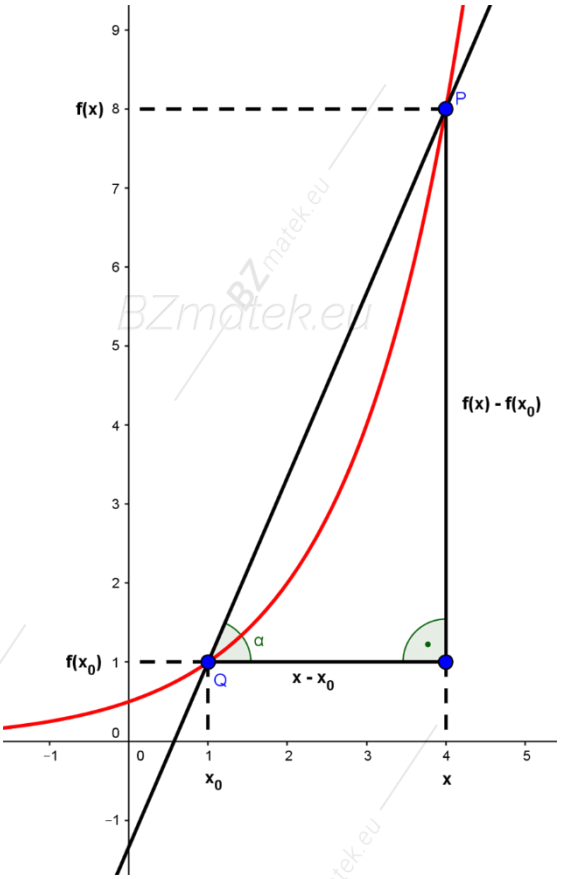
Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Differenciahányados-, differenciálhányados függvény

DEFINÍCIÓ: (Differenciahányados)
Ha egy f függvény értelmezve van x_0 – ban és annak egy $]a;b[$ környezetében, akkor a $d\,(x) = \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0}$ $(x \in\,]a;b[, x \neq x_0)$ függvényt az f függvény x_0 – hoz tartozó differenciahányadosának (különbségihányados - függvényének) nevezzük.

Megjegyzés:
A differenciahányados minden x helyen a $P\,(x; f\,(x))$ és a $Q\,(x_0; f\,(x_0))$ pontokon átmenő húr (szelő) meredekségét (iránytangensét) adja meg: $m = tg\,\alpha = \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0}$.

Szemléletesen:

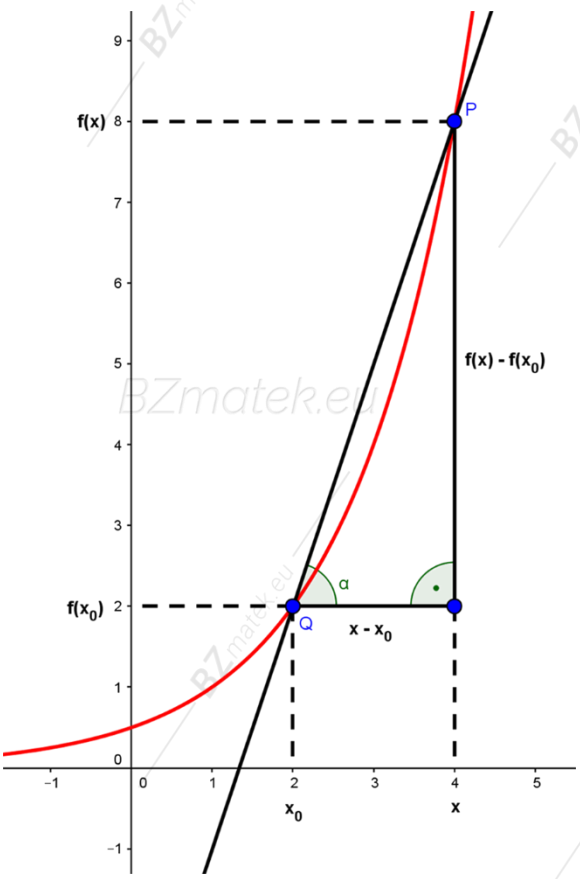


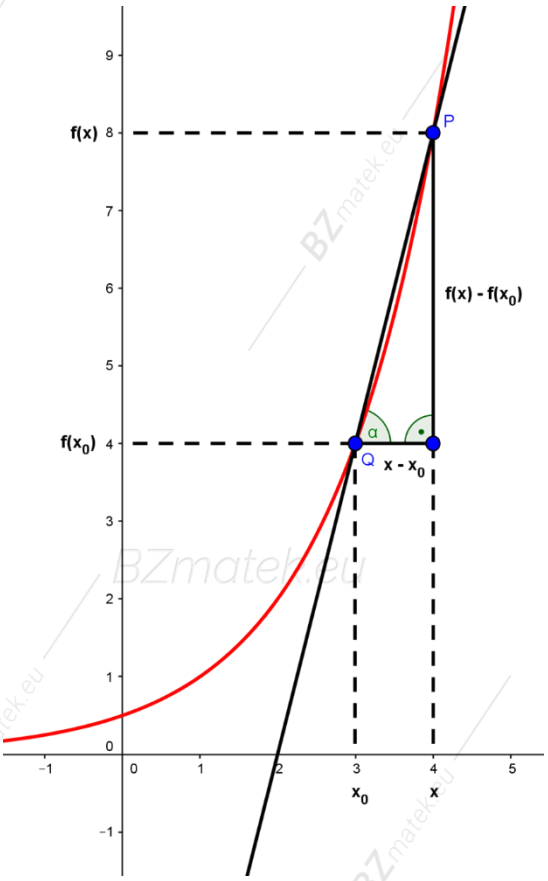
DEFINÍCIÓ: (Differenciálhányados)
Az f függvény x_0 – hoz tartozó differenciahányadosának x_0 – ban vett határértékét, amennyiben az létezik és véges, a függvény x_0 helyén vett differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A = f'(x_0)$.

Megjegyzés:

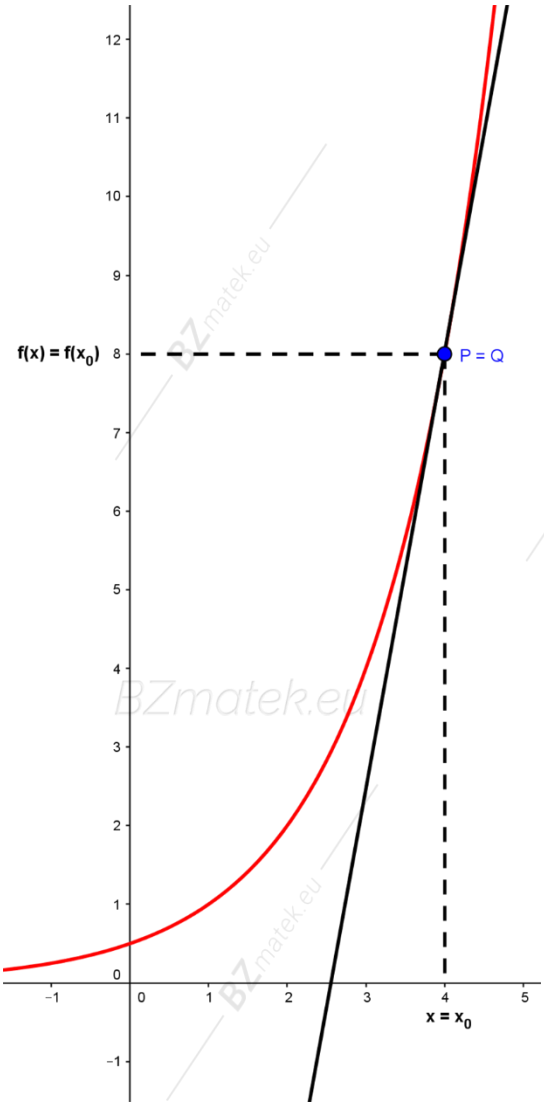
- *Azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban differenciálható (deriválható), ha az adott pontban van deriváltja.*
- *Ha a differenciálhatóság az értelmezési tartomány egy adott intervallumának minden x_0 pontjára teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az adott intervallumon differenciálható függvény.*
- *Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor a $P\left(x_0; f(x_0)\right)$ pontban van érintője, továbbá az érintő meredeksége éppen az $f'(x_0)$ differenciálhányados értéke.*

Szemléletesen:





Ahogyan a Q ponttal közelítünk a P pont felé, úgy változik a húr meredeksége.



A határértékkel éppen az érintő meredekségét kapjuk meg.

DEFINÍCIÓ: (Érintő)
Ha az f függvény az értelmezési tartományának egy x_0 belső pontjában differenciálható, akkor az f görbe $P\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ pontjához tartozó érintője az az egyenes, amely illeszkedik a P pontra és irányvektora a $\vec{v}\left(1; f'\left(x_0\right)\right)$ vektor.

Megjegyzés:

- *A* $P\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ *pontra illeszkedő érintő egyenlete:* $f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

- *Az érintő menetéből következtethetünk a függvény bizonyos tulajdonságaira: monotonitás, szélsőérték, konvexitás.*

TÉTEL:
Ha az f függvénynek egy x_0 pontjában van deriváltja és $f'(x_0) = \pm\infty$, akkor a függvény $P\left(x_0; f(x_0)\right)$ pontjába húzott érintője párhuzamos az y - tengellyel és egyenlete $x = x_0$.

TÉTEL:
Ha az f függvény differenciálható az x_0 – ban, akkor f folytonos is x_0 – ban.

Megjegyzés:
A tétel megfordítása nem igaz: Egy adott pontban folytonos függvény nem feltétlenül differenciálható ebben a pontban.

DEFINÍCIÓ: (Differenciálható függvény)
Egy f függvényt differenciálhatónak (deriválhatónak) nevezünk, ha az f függvény értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Jelölés: $f'; \frac{df}{dx}$.

DEFINÍCIÓ: (Derivált függvény)
Legyen az f függvény az $]a; b[$ intervallumon differenciálható. Azt a függvényt, amely az $]a; b[$ intervallum minden x pontjához hozzárendeli az f – nek az x pontbeli differenciálhányadosát, az f differenciálhányados – függvényének (derivált függvényének) nevezzük. Jelölés: $f'(x)$.

Megjegyzés:

- *Az $f'(x)$ derivált függvény értelmezési tartománya az f függvény értelmezési tartományának az a részhalmaza, ahol az f differenciálható, és értékkészlete pedig az x helyekhez tartozó differenciálhányadosok értékeinek halmaza.*
- *Ha az f függvény értelmezési tartományának minden x_0 pontjában deriválható, akkor az $x_0 \longmapsto f'(x_0)$ függvényt az f függvény derivált függvényének nevezzük.*
- *Egy függvény derivált függvényének meghatározását a függvény deriválásának nevezzük.*
- *Szemléletesen: A derivált függvény minden x értékhez hozzárendeli a függvény grafikonjához húzható, a $P\left(x; f(x)\right)$ pontjára illeszkedő érintőjének a meredekségét.*

TÉTEL: (Deriválási szabályok)
Ha $f(x)$ és $g(x)$ függvények deriválhatóak x_0 helyen, akkor a következő függvények is deriválhatóak x_0 – ban:

1. Konstansszoros függvény: $[c \cdot f\ (x_0)]' = c \cdot f'(x_0)$ $\qquad c \in \mathbb{R}$
2. Összegfüggvény: $[f\ (x_0) + g\ (x_0)]' = f'(x_0) + g'(x_0)$.
3. Különbségfüggvény: $[f\ (x_0) - g\ (x_0)]' = f'(x_0) - g'(x_0)$.
4. Szorzatfüggvény: $[f\ (x_0) \cdot g\ (x_0)]' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f\ (x_0) \cdot g'(x_0)$.
5. Függvények hányadosa: $\left[\frac{f\ (x_0)}{g\ (x_0)}\right]' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ $\qquad g\ (x_0) \neq 0$

TÉTEL:
Ha $g\ (x)$ deriválható x_0 helyen, és $f\ (x)$ deriválható a $g\ (x_0)$ helyen, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is deriválható x_0 - ban, és deriváltja: $\left[f\big(g(x_0)\big)\right]' = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$.

TÉTEL: (Alapfüggvények deriváltjai)

1. Konstans függvény: Ha $f\ (x) = c$, akkor $f'(x) = 0$, ahol $c \in \mathbb{R}$.
2. Lineáris függvény: Ha $f\ (x) = m \cdot x + b$, akkor $f'(x) = m$, ahol $m, b \in \mathbb{R}$
3. Hatványfüggvény: Ha $f\ (x) = x^n$, ahol $n \neq 0$, akkor $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
4. Szinusz függvény: Ha $f\ (x) = \sin x$, akkor $f'(x) = \cos x$.
5. Koszinusz függvény: Ha $f\ (x) = \cos x$, akkor $f'(x) = -\sin x$.
6. Tangens függvény: Ha $f\ (x) = \operatorname{tg} x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{cos^2\, x}$, ahol $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
7. Kotangens függévny: Ha $f\ (x) = \operatorname{ctg} x$, akkor $f'(x) = -\frac{1}{sin^2\, x}$, ahol $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
8. Exponenciális függvény: Ha $f(x) = a^x$, akkor $f'(x) = a^x \cdot \ln a$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$.
9. Logaritmus függvény: Ha $f(x) = \log_a x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$.
10. Ha $f(x) = e^x$, akkor $f'(x) = e^x$.
11. Ha $f(x) = \ln x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$, ahol $x > 0$.

Gyakorló feladatok

1. Írd fel a megadott x_0 pontban az alábbi függvények differenciahányadosát!

A: $f(x) = -2x + 1$ $\qquad x_0 = 7$

B: $g(x) = 3x^2 - 5$ $\qquad x_0 = 2$

C: $h(x) = \sqrt{x+3}$ $\qquad x_0 = -2$

D: $i(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ $\qquad x_0 = -5$

E: $j(x) = 2 \cdot tg\, x$ $\qquad x_0 = 0$

2. Írd fel a következő függvények differenciahányados függvényét és számítsd ki a differenciálhányados értékét az adott x_0 pontban!

A: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ $\qquad x_0 = -2$

B: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ $\qquad x_0 = 2$

C: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^4$ $\qquad x_0 = 1$

D: $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 + 2x$ $\qquad x_0 = 3$

3. Számítsd ki a következő függvények adott x_0 pontbeli differenciálhányadosát!

A: $f(x) = \sin x$ $\qquad x_0 = \pi$

B: $g(x) = \sqrt{x}$ $\qquad x_0 = 5$

C: $h(x) = \frac{1}{x+2}$ $\qquad x_0 = 0$

D: $i(x) = x^2 + 1$ $\qquad x_0 = 3$

4. Számítsd ki a következő függvények adott x_0 pontbeli differenciálhányadosát!

A: $f(x) = 6x^2 + 2x - 4$ $\quad x_0 = 1$

B: $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ $\quad x_0 = -2$

C: $h(x) = \frac{1}{2x}$ $\quad x_0 = 1$

D: $i(x) = 2x$ $\quad x_0 = -1$

5. Definíció alapján határozd meg a következő függvények differenciálhányadosát az adott x_0 pontban!

A: $f(x) = 3x - 2$ $\quad x_0 = -8$

B: $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 3$

C: $h(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ $\quad x_0 = -3$

D: $i(x) = x^3 - 2x^2$ $\quad x_0 = 1$

6. Definíció alapján határozd meg a következő függvények differenciálhányadosát az adott x_0 pontban!

A: $f\,(x) = 3x^2$ $\quad x_0 = -1$

B: $g\,(x) = 2x^3 + 1$ $\quad x_0 = 0$

C: $h\,(x) = x^4$ $\quad x_0 = 3$

D: $i\,(x) = \sqrt{x}$ $\quad x_0 = 1$

7. Írd fel az $f(x) = \sin x$ függvény $x_0 = a$ ponthoz tartozó differenciahányados - függvényét és differenciálhányadosát! Számítsd ki a differenciálhányados (a – tól függő) értékét!

8. Határozd meg a következő függvények tetszőleges x_0 pontbeli differenciálhányadosát és deriváltfüggvényét!

A: $f(x) = 3x$ $\quad$ **B:** $g(x) = 0,1x^2$ $\quad$ **C:** $h(x) = x^2 - 3x + 3$

9. Add meg a differenciálhányados definíciója szerint a függvény deriváltfüggvényét az értelmezési tartományon!

A: $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 1$ **B:** $g(x) = \frac{2}{x+2} + 2$ **C:** $h(x) = \sqrt{x-1} + 1$

10. Differenciálható-e az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto |1-x|$ függvény az $x_0 = 1$ pontban?

11. Differenciálható – e az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto |2x-8|$ függvény az $x_0 = 4$ pontban?

12. Differenciálható - e az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x \cdot |x|$ függvény az $x = 0$ helyen?

13. Az $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ pontban folytonos. Differenciálható is?

14. Igaz – e mindig, hogy ha egy függvény folytonos valamely pontban, akkor ott differenciálható is?

15. Írj fel példát olyan $\mathbb{R}$ - en értelmezett, mindenhol folytonos függvényre, amely az értelmezési tartomány pontosan 3 pontjában nem differenciálható!

16. Adj meg olyan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely csak az $x_1 = 0$, az $x_2 = 1$ és az $x_3 = 2$ pontokban nem differenciálható!

17. Sorold fel az összes x értéket, amely x pontokban az $f(x) = \big||x-2|-2\big|-2\big|$ függvény nem differenciálható!

18. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = 5x^6 + 4x^4 - 3x^3$

B: $f(x) = (2x)^3$

C: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x + 4$

D: $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x + 60$

E: $f(x) = 2x^5 - x^3 - 5$

F: $f(x) = 5x^4 - x^3 + \frac{1}{4}$

G: $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1$

H: $f(x) = 7x^{81} - 9x^{25}$

I: $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$

J: $f(x) = \sqrt{3} \cdot x$

K: $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 6x - 5$

L: $f(x) = 5 - 6x + 17x^4$

M: $f(x) = 0,3x^5 - \frac{x^3}{2} + 2x^2 - x + 1$

N: $f(x) = 2\pi + \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 7$

O: $f(x) = 3x^7 - 6x^6 - 4x^3 + 5x^2 - 8$

P: $f(x) = 5x^{2,4} + 2x^{1,9}$

Q: $f(x) = 4x^7 - \sqrt{2} \cdot x^5 + \frac{3}{5}x^3 - x^2 + \frac{\sqrt{7}}{10}x - 7$

R: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

S: $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 5$

T: $f(x) = 9x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

U: $f(x) = -3x^2 + 7x + 9$

V: $f(x) = x^{\frac{5}{4}} + 6x^{\frac{2}{3}}$

W: $f(x) = 6x^7 + (7x)^2 + 8x^9 + (9x)^3$

Z: $f(x) = 3x^{\frac{1}{6}} - 4x^{\frac{7}{2}} + 2,5x^{\frac{2}{5}}$

19. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = 7$

B: $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

C: $f(x) = x^{11}$

D: $f(x) = 2x^3$

E: $f(x) = -3x^5$

F: $f(x) = \frac{3}{4}x^9$

G: $f(x) = 7x^4$

H: $f(x) = 5x$

I: $f(x) = x^3 + 2x^2$

J: $f(x) = x^2 + 5x$

K: $f(x) = 3x + 2$

L: $f(x) = 4x^3 + 3x + 1$

M: $f(x) = 2x^3 - x + 2$

N: $f(x) = -3x^8 + 2x^5 - x^2$

O: $f(x) = -10x^{0,8} + 3x^{0,4}$

P: $f(x) = x^{-4}$

Q: $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

R: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

S: $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

T: $f(x) = \sqrt{7} \cdot x^2 - \frac{3}{5}x + \pi$

U: $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x^2 + x + 1$

V: $f(x) = 4x^{-3} - 5x^{-2}$

W: $f(x) = 5x^{-1,6} + 7x^{-\frac{4}{9}}$

Z: $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^6 - \frac{1}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{2} \cdot x^4$

20. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = x^{-n}$

B: $f(x) = 6x^n$

C: $f(x) = 2x^{n+5}$

D: $f(x) = \left(6 + \sqrt{3}\right) \cdot x^{6-\sqrt{3}}$

21. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = \frac{1}{x}$ **B:** $f(x) = \frac{2}{3x}$ **C:** $f(x) = \frac{1}{x^6}$

D: $f(x) = 5 \cdot \sqrt{x}$ **E:** $f(x) = \sqrt[100]{x^7}$ **F:** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

G: $f(x) = \frac{5}{x^4}$ **H:** $f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$ **I:** $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt[3]{x}}$

J: $f(x) = \frac{5}{3}x \cdot \sqrt{x^3}$ **K:** $f(x) = x \cdot \sqrt[4]{x}$ **L:** $f(x) = x^4 \cdot \sqrt[5]{x}$

M: $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$ **N:** $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ **O:** $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

P: $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$ **Q:** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}}$ **R:** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

S: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **T:** $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ **U:** $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

V: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ **W:** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **X:** $f(x) = \frac{3x^2}{2x^3}$

Y: $f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} - \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{4}{9} \cdot \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x}} + \sqrt{79}$ **Z:** $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{12}{x} + \frac{1}{60}$

22. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = \frac{1}{x^5}$ **B:** $f(x) = \sqrt{x}$ **C:** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

D: $f(x) = \frac{1}{5x^6}$ **E:** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **F:** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

G: $f(x) = 10 \cdot \sqrt[5]{x}$ **H:** $f(x) = \sqrt{x} - 3$ **I:** $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^8} - \sqrt{x^7}$

J: $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt[7]{x^3}}$ **K:** $f(x) = \sqrt[7]{\sqrt[5]{x^6}}$ **L:** $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 7 \cdot \sqrt{x^5}}{x}$

M: $f(x) = \frac{1}{x} + 5$ **N:** $f(x) = \frac{5}{x}$ **O:** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

P: $f(x) = \frac{x+3}{x}$ **Q:** $f(x) = -\frac{x^4 - 2}{x^3}$ **R:** $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}$

S: $f(x) = 4x^7 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ **T:** $f(x) = 3x \cdot \sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[6]{x}} + 2$ **U:** $f(x) = \frac{7}{x} + 5 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2x}\right)$

V: $f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **W:** $f(x) = \frac{3x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$ **X:** $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x}$

Y: $f(x) = \frac{3x^2 + 2x^3}{\sqrt{x}}$ **Z:** $f(x) = \frac{5 \cdot \sqrt{x} - 6 \cdot \sqrt[3]{x}}{x^2}$ **ZS:** $f(x) = \frac{\sqrt[7]{x^2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}}}$

23. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = 12 \cdot ctg\, x$

B: $f(x) = \frac{\sin x}{4}$

C: $f(x) = 5 \cdot \cos x$

D: $f(x) = x^2 + \sin x$

E: $f(x) = \cos x - x$

F: $f(x) = 2 \cdot \sin x + x^3$

G: $f(x) = tg\, x + x$

H: $f(x) = ctg\, x - x^2$

I: $f(x) = 4 \cdot \sin x - 5 \cdot \cos x$

J: $f(x) = 5 \cdot \mathrm{tg}\, x - 2 \cdot \mathrm{ctg}\, x$

K: $f(x) = -\sin x + 7 \cdot \cos x$

L: $f(x) = -\cos x - \pi \cdot \sin x$

M: $f(x) = 2 \cdot \sin x + 5 \cdot \cos x - 6$

N: $f(x) = 2 \cdot \cos x - \sqrt{x}$

O: $f(x) = 3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x - \sqrt{2} \cdot \sin x$

P: $f(x) = 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x$

Q: $f(x) = 3 \cdot tg\, x - \frac{1}{2} \cdot \cos x - \sqrt{10}$

R: $f(x) = \frac{x^5}{120} + ctg\, x - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + 7$

S: $f(x) = 5 \cdot \cos x - \sqrt{2} \cdot \sin x + 7$

T: $f(x) = \sin(-x) - 2 \cdot \cos(-x)$

24. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = (x^4 - 3) \cdot (5 + x^2)$

B: $f(x) = (2x + 1) \cdot (x^2 - 3)$

C: $f(x) = \sqrt{x} \cdot (5x - x^3)$

D: $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

E: $f(x) = (3x + 1) \cdot (2x^3 - 5x^2)$

F: $f(x) = x^2 \cdot (1 - x^2)$

G: $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (3 - 5x^2)$

H: $f(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

I: $f(x) = (x^3 + 2x) \cdot \left(x^7 - 3x^5 + 5x^2\right)$

J: $f(x) = (x^3 - 2x^2) \cdot \left(3x^2 + \sqrt{x} - 2\right)$

25. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = (3x^2 - x + 2) \cdot (2x^5 - 6x^2 + 1)$

B: $f(x) = (8x^5 - 2x^4 + 5) \cdot (1 - x^4)$

C: $f(x) = (1 - 3x + 7x^2) \cdot (-5x^2 - 2)$

D: $f(x) = (x^3 - 3x) \cdot (1 - 2x^2)$

E: $f(x) = (x^3 + 4x^2 - 6) \cdot (2x^2 + 3x + 2)$

F: $f(x) = 5x^2 \cdot (x - x^2)$

G: $f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$

H: $f(x) = (2x^2 - x) \cdot (x^3 + 5x - 1)$

I: $f(x) = (2x + 5) \cdot (3x^2 + 6x + 7)$

J: $f(x) = (x + 5) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

26. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = \sqrt{x} \cdot tg\, x$

B: $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

C: $f(x) = x \cdot \sin x$

D: $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

E: $f(x) = x^2 \cdot tg\, x$

F: $f(x) = 3x^2 \cdot ctg\, x$

G: $f(x) = 10 \cdot \sin x \cdot tg\, x$

H: $f(x) = (3x^2 + 6x) \cdot \sin x$

I: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

J: $f(x) = \sqrt[5]{x^4} \cdot ctg\, x$

K: $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

L: $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

M: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin x + 4$

N: $f(x) = 5 \cdot \sin x \cdot \cos x$

27. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 2}$ **B:** $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + x}$ **C:** $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$

D: $f(x) = \frac{x^3}{\sin x}$ **E:** $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^7 + 3}$ **F:** $f(x) = \frac{4x^5 + 5x^{3,6} - 2x^2}{5x^{10} - 3x^6 - 9x^2}$

G: $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x - 4}$ **H:** $f(x) = \frac{x^2}{2x - 8}$ **I:** $f(x) = \frac{6x + 7}{7x - 6}$

J: $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 + 8x + 12}$ **K:** $f(x) = \frac{x^3 - 6x + 10}{x^4 + 5x^2}$ **L:** $f(x) = \frac{-7x}{3 - 10x}$

M: $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ **N:** $f(x) = \frac{-2x^3}{\cos x}$ **O:** $f(x) = \frac{x^5 - 3x^2}{x^2 + x}$

P: $f(x) = \frac{4 - x^2}{4 - 4x + x^2}$ **Q:** $f(x) = \frac{5}{6x - 4}$ **R:** $f(x) = \frac{4x^2 + x^{0,6}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x^5}}$

28. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ **B:** $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{4x - 6}$ **C:** $f(x) = \frac{x - \sqrt[5]{x}}{x + \sqrt[5]{x}}$

D: $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ **E:** $f(x) = \frac{x + 2x^2}{3x^3 - 2x}$ **F:** $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \cos x}$

G: $f(x) = \frac{2x - x^2}{2x^2 - 8}$ **H:** $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ **I:** $f(x) = \frac{3}{x^3 + 4x + 1}$

J: $f(x) = \frac{5}{6 - x}$ **K:** $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ **L:** $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2}$

M: $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}$ **N:** $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ **O:** $f(x) = \frac{4x + 5}{3x - 6}$

P: $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ **Q:** $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + \cos x}$ **R:** $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x} + 2}$

29. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{7x}$

B: $f(x) = \sqrt[7]{ctg\, x}$

C: $f(x) = (5x+3)^2$

D: $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - 3x^2 + 5x + 7}$

E: $f(x) = (5x^4 + 2)^3$

F: $f(x) = sin^3 x$

G: $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}}$

H: $f(x) = \sin(x^3)$

I: $f(x) = (1 + 2x - x^2)^3$

J: $f(x) = \sin(x^2 - 7x + 2)$

K: $f(x) = (5x^3 + 4x^2 + 1)^{-3}$

L: $f(x) = \sqrt{7x^6 - 4}$

M: $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 7x}$

N: $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x)^{10}$

O: $f(x) = \sin(x^2 + x)$

P: $f(x) = x^4 - 2 \cdot \cos x + \mathrm{ctg}(3x)$

Q: $f(x) = (x^2 - 2x + 5)^4$

R: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 5}$

30. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f\,(x) = sin^2 x$

B: $f\,(x) = (3x - 5)^3$

C: $f\,(x) = \sqrt{1 - 2x}$

D: $f\,(x) = 10 \cdot \sqrt[5]{x^4 - 2x^2 + 6x}$

E: $f\,(x) = tg\,\sqrt{x}$

F: $f\,(x) = (x^2 - 1)^5$

G: $f\,(x) = \sin(2x + 3)$

H: $f\,(x) = 2 \cdot \sqrt[4]{5x}$

I: $f\,(x) = (x - 5x^3)^6$

J: $f\,(x) = \sqrt[3]{\cos x}$

K: $f\,(x) = (2x - 3)^4$

L: $f\,(x) = (\mathrm{tg}\, x)^{-1}$

M: $f\,(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

N: $f\,(x) = (x^3 + 4x - 1)^3$

O: $f\,(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

P: $f\,(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Q: $f\,(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

R: $f\,(x) = (x + 3)^2 - 5$

31. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 2x)^2}$

B: $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

C: $f(x) = (5x + 1)^6$

D: $f(x) = \sin(6x^2 - 3x + 2)$

E: $f(x) = (2x + 1)^3$

F: $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

G: $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$

H: $f(x) = (3x + 7)^2$

I: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$

J: $f(x) = \cos(2x) - 2 \cdot \sin x$

K: $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

L: $f(x) = cos^2 x$

M: $f(x) = 3x^4 + \sin(2x)$

N: $f(x) = \cos(3x) - \sin x$

O: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

P: $f(x) = 2 \cdot (6 - 4x^2)^{-3}$

Q: $f(x) = 5 \cdot \sin(2x) - 6 \cdot \cos x$

R: $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

32. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = tg^2\,(3x)$

B: $f(x) = cos^3(x^4 - 5)$

C: $f(x) = tg\,[sin\,(5x)]$

D: $f(x) = \sqrt{\sin(5x + \pi)}$

E: $f(x) = sin^2(2x)$

F: $f(x) = \sqrt[3]{\sin\sqrt{x}}$

G: $f(x) = cos^3\,(2x)$

H: $f(x) = \sin[\cos(x^2)]$

I: $f(x) = tg\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

J: $f(x) = \sqrt{\frac{6}{x^2} + 2x}$

K: $f(x) = \sin\sqrt{5x}$

L: $f(x) = 7 \cdot cos^7(7x)$

M: $f(x) = cos^{-4}\sqrt{2x}$

N: $f(x) = \sin[\sin(\sin x)]$

O: $f(x) = tg\,[ctg\,(5x)]$

P: $f(x) = \frac{1}{ctg\,(8x)}$

Q: $f(x) = \sqrt{\cos[\sin(6x^2)]}$

R: $f(x) = \sqrt[5]{ctg\,\left(\frac{x^2 + 3}{2x^5}\right)}$

33. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = (5x^2 - 3)^4 \cdot tg\,(7x)$

B: $f(x) = \sqrt[6]{ctg\,\left(\frac{x^3 - 1}{8x^4}\right)}$

C: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(6x^2 + 5x)^2}}$

D: $f(x) = \sin(2x) \cdot cos^4 x$

E: $f(x) = tg\,\left(\frac{x}{2}\right) - ctg\,\left(\frac{x}{2}\right)$

F: $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{sin^2 x}$

G: $f(x) = \cos(2x) \cdot \sin(x + \pi)$

H: $f(x) = sin^2 x + cos^2 x$

I: $f(x) = tg^2\,\frac{3x}{\sqrt{6x^2 - 4}}$

J: $f(x) = \sin(tg\,x) \cdot \sqrt[3]{\cos x}$

K: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} \cdot cos^2(6x)$

L: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{6x^2 + 2x}}$

M: $f(x) = (5x^3 - 2) \cdot tg\,(3x)$

N: $f(x) = \sin(3x) \cdot \cos(5x)$

O: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(6x)}}$

P: $f(x) = (5x^2 - 3)^4 \cdot \sqrt{4x + 6}$

Q: $f(x) = sin^2\,x + 3 \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x + cos^2 x$

R: $f(x) = tg\,x - \frac{1}{3} \cdot tg^3 x + \frac{1}{5} \cdot tg^5 x$

S: $f(x) = sin^{-3}(4x) \cdot tg(\pi - x) + \sin x \cdot ctg\,x$

34. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = e^x + 3x^2$

B: $f(x) = e^x + \sin x - \cos x$

C: $f(x) = a^x + e^x$

D: $f(x) = 2x^2 - e^x$

E: $f(x) = a^x - tg\, x + x^2 - \sin x$

F: $f(x) = \frac{1}{e^x}$

G: $f(x) = 5e^x - 3e^{2x}$

H: $f(x) = 8x \cdot 2^{x^2 - 3}$

I: $f(x) = 6^{5x + \sqrt{x}}$

J: $f(x) = 3^{\frac{x^2}{\cos x}}$

K: $f(x) = 5 \cdot \ln x - 9 \cdot \ln(2x^6)$

L: $f(x) = \log_2(3x + 4)$

M: $f(x) = 2^{x^2 - 3}$

N: $f(x) = 5^{sin^2 x + cos^3 x}$

O: $f(x) = \ln(3x + 4)$

P: $f(x) = 5e^{-x} + 3e^{5x} + 2e^{x^2}$

Q: $f(x) = x \cdot \log_2(x^2 - 3)$

R: $f(x) = \ln(7x^2)$

S: $f(x) = e^{x^2} + e^{\cos x} - e^{2x+3}$

T: $f(x) = \ln(3x^2 + 2x + 6)$

U: $f(x) = \ln(sin^2 x)$

V: $f(x) = 12^{2x^2} + 3^{-x^2} + 2 \cdot 5^{\sin x}$

W: $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

Z: $f(x) = \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$

35. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = x^5 \cdot e^x$

B: $f(x) = e^x \cdot \cos x$

C: $f(x) = a^x \cdot tg\, x$

D: $f(x) = e^{2x^3} \cdot e^5$

E: $f(x) = \frac{\sin x}{a^x}$

F: $f(x) = \frac{-a^x}{\sin x}$

G: $f(x) = 2e^x + x \cdot \ln x$

H: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

I: $f(x) = (\sin x)^x$

J: $f(x) = \log_3(3x)$

K: $f(x) = 16^x \cdot x^{16}$

L: $f(x) = 7 \cdot \log_5 x$

M: $f(x) = 2^x \cdot \sin\sqrt{x}$

N: $f(x) = tg^3\sqrt{\ln x}$

O: $f(x) = \ln\sqrt{x}$

P: $f(x) = \sin(e^x)$

Q: $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$

R: $f(x) = \ln[\cos(3x)]$

S: $f(x) = e^{x^3-1} \cdot 3^{x+1}$

T: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

U: $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

V: $f(x) = \sqrt[3]{\log_7(2x-2)}$

W: $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

Z: $f(x) = 5 \cdot \lg x$

36. Deriváld az alábbi függvényeket a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, ahol a függvények értelmezhetők!

A: $f(x) = 4 \cdot 5^x$

B: $f(x) = e^{3x}$

C: $f(x) = \ln[(x^3 - 1)^4]$

D: $f(x) = 3 \cdot e^x$

E: $f(x) = e^{x^3}$

F: $f(x) = \ln(3x - 1)$

G: $f(x) = 4 \cdot \ln x$

H: $f(x) = \ln(x^2 + x)^5$

I: $f(x) = x \cdot 2^{x^2-3}$

J: $f(x) = 6 \cdot \ln x - 3 \cdot \log_3 x$

K: $f(x) = e^{\sin x}$

L: $f(x) = \ln\left(\frac{5x}{4x-3}\right)$

M: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - e^{x^2-3x+1}$

N: $f(x) = \ln\sqrt{tg\ x}$

O: $f(x) = x^x$

P: $f(x) = 7^x - (3x)^4 + 2^{2x} - 4^{3x}$

Q: $f(x) = [\sin(2x)]^{\cos x}$

R: $f(x) = 2^{(\sin 2x - \cos 2x)^2}$

S: $f(x) = 6x^2 - 7x + 5^x + e^x - 8 \cdot \cos x$

T: $f(x) = \ln[(x^2 + x + 1)^2]$

U: $f(x) = 5 \cdot \ln x + 3 \cdot \ln(2x)$

V: $f(x) = 3^x + \frac{1}{2} \cdot 3^{-x} + 3^{2x}$

37. Deriváld a következő függvényt!

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto \begin{cases} 0, ha\ x \in [1; 2] \\ (x-1)^2 \cdot (x-2)^2, ha\ x \notin [1; 2] \end{cases}$$

38. Deriváld, ha lehet, az $f:]2; 15[\to \mathbb{R}; x \longmapsto |x| + |x+1|$ függvényt!

39. Határozd meg a $]-5; 5[\to \mathbb{R}; x \longmapsto (x^4 - 3) \cdot (5 + x^2)$ függvény derivált függvényét!

40. Határozd meg az $f \cdot g$ függvény deriváltját!

$f: \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{x^2}{2x+6}$

$g: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{x^2-9}{x}$

41. Deriváld az $\frac{f}{g}$ függvényt!

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto 5x^4 - 3x^2$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x^3 - x$

42. Deriváld az $\frac{f}{g}$ függvényt!

$f:]0; +\infty[\to \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{5x + 15}{x^3 + 2x^2}$ $\qquad$ $g:]0; +\infty[\to \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + x}$

43. Deriváld kétszer az alábbi függvényeket!

A: $f(x) = 5x + 3$ $\qquad$ **B:** $f(x) = -3x^2 + 5x - 13$ $\qquad$ **C:** $f(x) = x^2 - 3x - 1$

D: $f(x) = x^{13} + 3x^7$ $\qquad$ **E:** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 6$ $\qquad$ **F:** $f(x) = \frac{1}{x}$

G: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$ $\qquad$ **H:** $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ $\qquad$ **I:** $f(x) = \sin x + \cos x$

44. Deriváld háromszor az alábbi függvényeket!

A: $f(x) = -x^3 + 5x$ $\qquad$ **B:** $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2$

C: $f(x) = 15x^5 - 10x^4 + 20x^2 - 5x + \sqrt{30}$ $\qquad$ **D:** $f(x) = -4x^3 + 7x^2 - 10x + 7$

E: $f(x) = tg\, x$ $\qquad$ **F:** $f(x) = \cos(8x)$

45. Deriváld ötször a következő függvényeket!

A: $f(x) = 3x^3 - 6$ $\qquad$ **B:** $f(x) = 2x^4 + 4x - 10$

C: $f(x) = 6x^5 + 4x^2$ $\qquad$ **D:** $f(x) = 2x^8 - 3x^6 + x^4$

46. Deriváld ahányszor csak lehet a következő függvényeket!

A: $f(x) = 15x^3 - 2x^2 + 1$ $\qquad$ **B:** $g(x) = e^x$ $\qquad$ **C:** $h(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

47. Hányszor kell deriválni a szinusz - és koszinuszfüggvényt ahhoz, hogy visszakapjuk az eredeti függvényt?

48. Deriváld párszor az $f(x) = x \cdot e^x$ és a $g(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvényt! Adj formulát az n – edik deriváltra!

49. Add meg azt a függvényt, melynek deriváltja a következő függvény!

A: $a'(x) = 5$ B: $b'(x) = 2x$ C: $c'(x) = 4x - 2$

D: $d'(x) = 5x^{1,5}$ E: $e'(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ F: $f'(x) = x^{-2}$

G: $g'(x) = \sqrt{x}$ H: $h'(x) = \frac{3}{x^4}$ I: $i'(x) = \frac{8}{\sqrt[9]{x^7}}$

50. Add meg azt a függvényt, melynek deriváltja a következő függvény!

A: $a'(x) = -\cos x$ B: $b'(x) = 8 \cdot \sin x$ C: $c'(x) = \frac{2}{cos^2 x}$

D: $d'(x) = \frac{\cos x}{4} - 3 \cdot \sin x$ E: $e'(x) = -\frac{1}{sin^2 x}$ F: $f'(x) = \frac{5}{sin^2 x} - \frac{1}{cos^2 x}$

G: $g'(x) = 4 \cdot e^x$ H: $h'(x) = \frac{2}{x}$ I: $i'(x) = 3^x$

51. Add meg azokat a helyeket, ahol az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 5x + 1$ függvény differenciálhányadosa 0!

52. Felveszi - e a $g(x) = x \cdot \sin x$ függvény deriváltja a 0 értéket a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon?

53. Határozd meg a következő függvények deriváltjainak zérushelyét, ha az létezik!

A: $a(x) = 8$ B: $b(x) = 3x - 2$

C: $c(x) = x^2 - 7$ D: $d(x) = -x^2 + 5x$

E: $e(x) = 4x^2 + 3x - 9$ F: $f(x) = -3x^2 + 8x - 2$

G: $g(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 + 1$ H: $h(x) = -(5x + 7)^2 - 3$

I: $i(x) = x^3 - 4x^2$ J: $j(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

K: $k(x) = (x + 2)^3 - 6$ L: $l(x) = 5 \cdot (x^2 - 1)^3 + 8$

54. Határozd meg a következő függvények deriváltjainak zérushelyét, ha az létezik!

A: $a(x) = x^6$

B: $b(x) = x^8 - 3x^7$

C: $c(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 3x$

D: $d(x) = \sqrt{2x+6}$

E: $e(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

F: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 3x}$

G: $g(x) = \frac{1}{3x-2}$

H: $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$

I: $i(x) = \frac{10}{x^3 + 4x^2 - x + 2}$

J: $j(x) = \cos(2x)$

K: $k(x) = ctg\,(\pi \cdot x)$

L: $l(x) = \sin(3x^2)$

55. Add meg a következő függvények második deriváltjainak zérushelyét, ha az létezik!

A: $a(x) = 5x^2 - 3$

B: $b(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 3$

C: $c(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$

D: $d(x) = \sqrt{x}$

E: $e(x) = \frac{1}{2x+1}$

F: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

56. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-10)$**. Határozd meg az** $f'(0)$ **értékét!**

57. Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto (x-1) \cdot (x-a) \cdot (x^2+1)$ **függvény deriváltja az 1 helyen 0. Mennyi az** a **értéke?**

58. Add meg a következő függvények differenciálhányadosát az $x_0 = 1$ **helyen!**

A: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto (x^2 - 3x + 1) \cdot (2 - x^3)$

B: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$

C: $h:]0; +\infty[\to \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x}$

59. Keress olyan, legfeljebb másodfokú f **polinomfüggvényt, amelyre igaz, hogy** $f(1) = f'(1) = 0$ **és** $f(2) = 2$**!**

60. Keress olyan, legfeljebb másodfokú f polinomfüggvényt, amelyre igaz, hogy $f(0) = 1, f'(1) = 0$ és $f'(2) = 1$!

61. Tudjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ függvény deriváltjának egyetlen zérushelye van, az 1, és hogy $f(0) = 2$. Határozd meg az $a; b; c$ értékét!

BZmatek.eu

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Schlegl István; 2015.; Sokszínű matematika - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Trembeczki Csaba; 2016.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 1.; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 3. feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged

(7) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Gerőcs László; 2011.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(12) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(13) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(14) Saját anyagok