Függvények határértéke

DEFINÍCIÓ: (Torlódási pont)
Akkor mondjuk, hogy egy halmaznak az x_0 torlódási pontja, ha az x_0 bármely környezetében van a halmaznak legalább egy x_0 – tól különböző eleme.

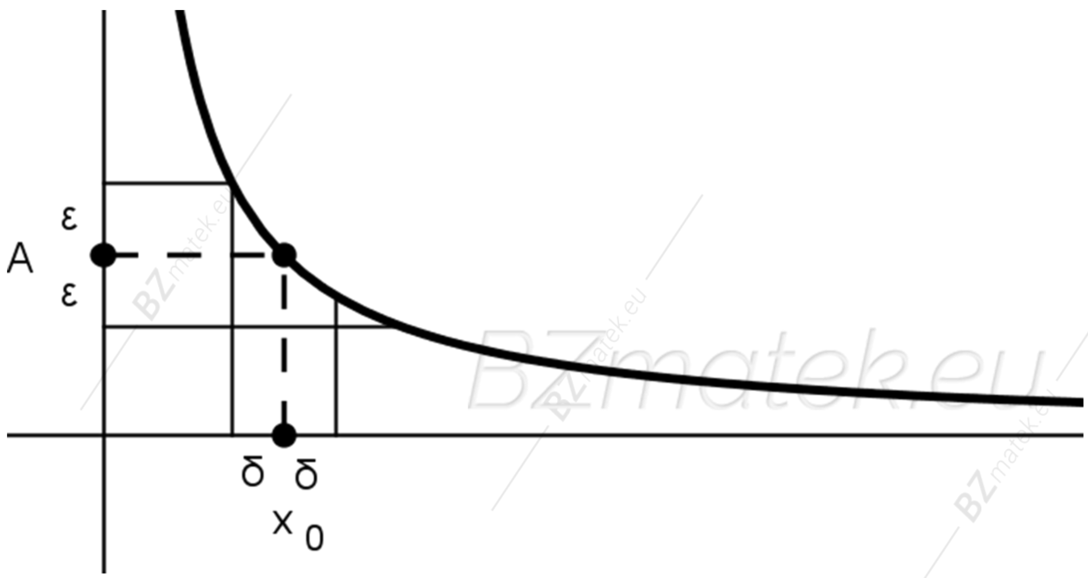
DEFINÍCIÓ: (Összetett függvény)
Ha az értékkészlet elemeihez, mint értelmezési tartományhoz egy újabb egyértelmű hozzárendelést adunk meg, akkor összetett (közvetett) függvényről beszélünk.
Jele: $f\left(g(x)\right)$, $f \circ g$.

Megjegyzés:

- *Az f és g összetételén (kompozícióján) az $f \circ g$ függvényt értjük, ahol f – et külső, g – t pedig belső függvénynek nevezzük.*

- Az összetett függvények esetén általában $g \circ f \neq f \circ g$.

DEFINÍCIÓ: (Végesben vett véges határérték)
Cauchy: Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve, kivéve ebből esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 pontbeli határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az x_0 - nak olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$, ahol $x \in D_f$ és $x \neq x_0$, akkor $|f\,(x) - A| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = A$



<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Személetesen: Amennyiben tetszőlegesen közel kerülünk az értelmezési tartomány x_0 helyéhez, akkor a megfelelő függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnek az A számhoz. Másképpen megfogalmazva: Az $y = A$ egyenes körül bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén kijelölve az $y = A + \varepsilon$ és $y = A - \varepsilon$ sávot, megadható az x_0 hely olyan $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ környezete, hogy ha $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, akkor az $y = f(x)$ függvény grafikonjának minden pontja az adott sáv belsejébe esik, azaz $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.*

- *Ha a definícióban kikötjük, hogy $x < x_0$, akkor bal oldali határértékről, ha pedig $x_0 < x$, akkor jobb oldali határértékről beszélünk. Egy függvénynek akkor létezik egy adott pontjában határértéke, ha mindkét oldali határértéke létezik, s azok megegyeznek.*

- *Az $|x - x_0| < \delta$ jelentése: az x – ek az x_0 egy kicsiny δ sugarú környezetéből valók, azaz akárhogyan választunk is ki értékeket az x_0 – nak a δ sugarú környezetéből, ezeknek a pontoknak az x_0 – tól való távolsága mindig kisebb lesz δ – nál.*

- *Az $|f\,(x) - A| < \varepsilon$ jelentése: az x_0 – nak a δ sugarú környezetéből vett x - ekre a helyettesítési értékek az A – hoz olyan közel esnek, hogy az A – tól vett távolságuk kisebb lesz, mint ε.*

- *A határérték létezését az x_0 hely környezetében felvett függvényértékek viselkedése dönti el, így ebben a pontban nem feltétlen kell értelmezve lennie a függvénynek.*

- *Ez a definíció elsősorban nem arra szolgál, hogy ezzel keressük meg a határértéket, hanem arra, hogy bebizonyítsuk, az adott határérték valóban határérték.*

- *A határérték megállapításához olyan átalakításokat kell végeznünk a kifejezéseken, hogy a kapott függvény határértéke már könnyen meghatározható legyen, vagyis ki kell küszöbölnünk azokat a pontokat, ahol nincs értelmezve a függvény.*

- *Heine – féle definíció: Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve, kivéve ebből esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 helyen létezik határértéke és az A, ha bármely olyan (x_n) sorozat esetén, melynek minden tagja eleme az f értelmezési tartományának és x_n tart x_0 – hoz $(x_n \neq x_0)$, akkor a függvényértékek $f\,(x_n)$ számsorozata A – hoz tart.*

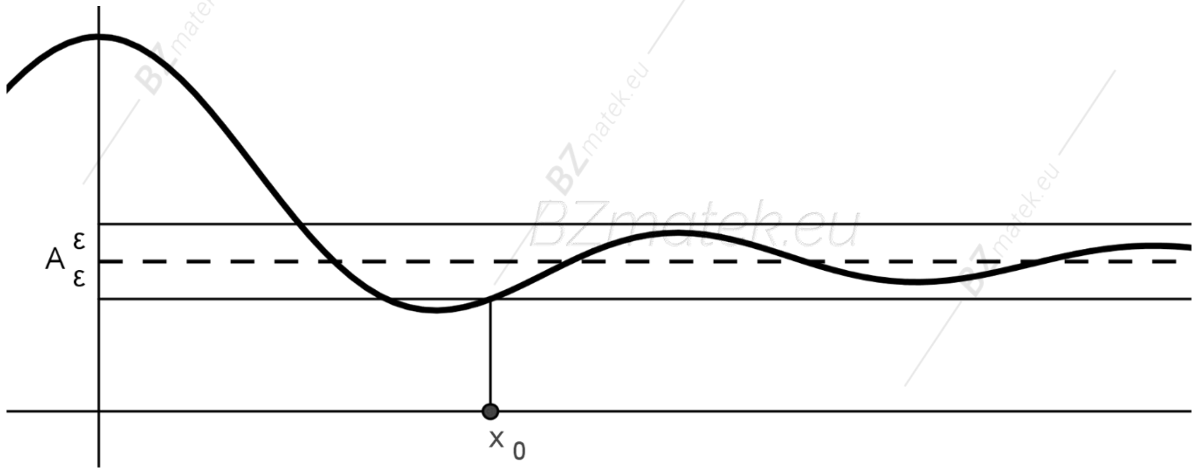
DEFINÍCIÓ: (Végesben vett $+\infty$ határérték)
Legyen f valós függvény értelmezve egy x_0 pont valamely környezetében, kivéve ebből esetleg az x_0 pontot. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 helyen határértéke $+\infty$, ha tetszőleges $K > 0$ küszöbszámhoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) > K$, ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = +\infty$

<u>*Megjegyzés:*</u>
Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve, kivéve ebből esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 helyen létezik határértéke és az $+\infty$, ha bármely olyan (x_n) sorozat esetén, melynek minden tagja eleme az f értelmezési tartományának és $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, akkor $f\,(x_n) \to +\infty$.

DEFINÍCIÓ: (Végesben vett $-\infty$ határérték)
Legyen f valós függvény értelmezve egy x_0 pont valamely környezetében, kivéve ebből esetleg az x_0 pontot. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az x_0 helyen határértéke $-\infty$, ha tetszőleges $K < 0$ küszöbszámhoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) < K$, ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = -\infty$

Megjegyzés:
Legyen az f függvény az x_0 pont valamely környezetében értelmezve, kivéve ebből esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 helyen létezik határértéke és az $-\infty$, ha bármely olyan (x_n) sorozat esetén, melynek minden tagja eleme az f értelmezési tartományának és $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$, akkor $f\,(x_n) \to -\infty$.

DEFINÍCIÓ: ($+\infty$ - ben vett véges határérték)
Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya felülről nem korlátos számhalmaz. Ha van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy tetszőlegesen megválasztott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $K \in \mathbb{R}$ küszöbszám, amelyre $|f\,(x) - A| < \varepsilon$, ha $x > K$ és $x \in D_f$, akkor azt mondjuk, hogy az f – nek a $+\infty$ - ben vett határértéke az A szám. Jelölés: $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x) = A$

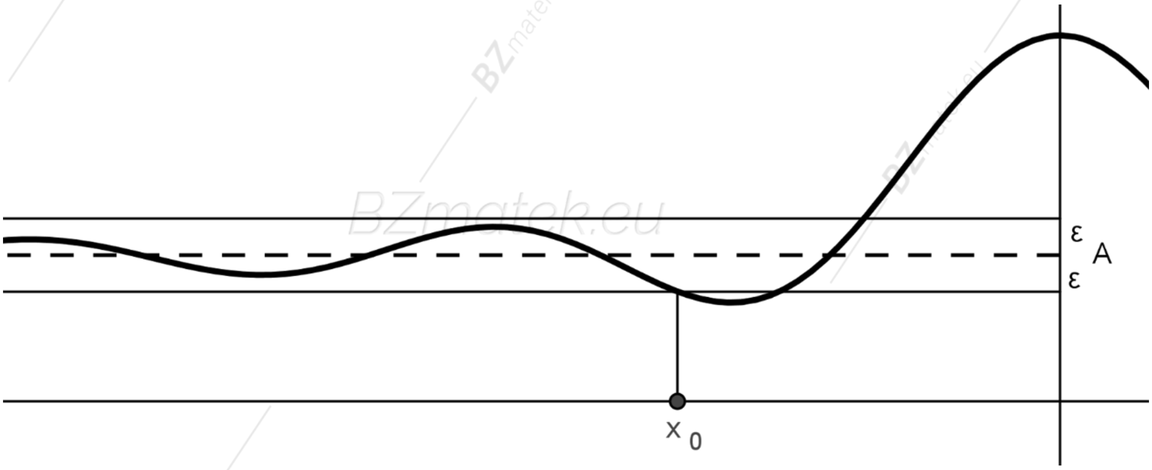


Megjegyzés:

- *Szemléletesen: Amennyiben a változó x értékét egyre jobban növeljük, vagyis tart a végtelenhez, akkor a függvényértékek az A egyre kisebb sugarú környezetébe kerülnek, vagyis $f\,(x)$ tart (közelebb kerül) az A – hoz. Másképpen megfogalmazva: Az $y = A$ egyenes körül bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén kijelölve az $y = A + \varepsilon$ és $y = A - \varepsilon$ sávot, található olyan ε – tól függő K szám, hogy a függvény grafikonjának minden pontja az adott sáv belsejébe esik, ha $x > K$.*

- *Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya felülről nem korlátos számhalmaz. Az f függvénynek akkor és csak akkor van a $+\infty$ - ben határértéke és ez A, ha bármely (x_n) sorozat esetén, melynek minden tagja eleme az f értelmezési tartományának és $x_n \to +\infty$, akkor $f\,(x_n) \to A$.*

DEFINÍCIÓ: ($-\infty$ - ben vett véges határérték)
Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya alulról nem korlátos számhalmaz. Ha van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy tetszőlegesen megválasztott $\varepsilon > 0$ – hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$ küszöbszám, amelyre $|f\ (x) - A| < \varepsilon$, ha $x < K$ és $x \in D_f$, akkor azt mondjuk, hogy az f – nek a $-\infty$ - ben vett határértéke az A szám. Jelölés: $\lim\limits_{x \to -\infty} f\ (x) = A$



Megjegyzés:

- *Szemléletesen: Amennyiben a változó x értékét egyre jobban csökkentjük, vagyis tart a végtelenhez, akkor a függvényértékek az A egyre kisebb sugarú környezetébe kerülnek, vagyis $f\ (x)$ tart (közelebb kerül) az A – hoz. Másképpen megfogalmazva: Az $y = A$ egyenes körül bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén kijelölve az $y = A + \varepsilon$ és $y = A - \varepsilon$ sávot, található olyan ε – tól függő k szám, hogy a függvény grafikonjának minden pontja az adott sáv belsejébe esik, ha $x < k$.*

- *Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya alulról nem korlátos számhalmaz. Az f függvénynek akkor és csak akkor van a $-\infty$ - ben határértéke és ez A, ha bármely (x_n) sorozat esetén, melynek minden tagja eleme az f értelmezési tartományának és $x_n \to -\infty$, akkor $f\ (x_n) \to A$.*

DEFINÍCIÓ: ($+\infty$ - ben vett $+\infty$ határérték)
Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya felülről nem korlátos számhalmaz. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek $+\infty$ - ben a határértéke $+\infty$, ha tetszőleges $N \in \mathbb{R}$ – hoz található olyan $K \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy $f(x) > N$, ha $x > K$ és $x \in D_f$. Jele: $\lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x) = +\infty$

DEFINÍCIÓ: ($+\infty$ - ben vett $-\infty$ határérték)
Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya felülről nem korlátos számhalmaz. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek $+\infty$ - ben a határértéke $-\infty$, ha tetszőleges $N \in \mathbb{R}$ – hoz található olyan $K \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy $f(x) < N$, ha $x > K$ és $x \in D_f$. Jele: $\lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x) = -\infty$

DEFINÍCIÓ: ($-\infty$ - ben vett $+\infty$ határérték)
Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya alulról nem korlátos számhalmaz. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek $-\infty$ - ben a határértéke $+\infty$, ha tetszőleges $N \in \mathbb{R}$ – hoz található olyan $K \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy $f(x) > N$, ha $x < K$ és $x \in D_f$. Jele: $\lim\limits_{x \to -\infty} f\,(x) = +\infty$

DEFINÍCIÓ: ($-\infty$ - ben vett $-\infty$ határérték)
Legyen f olyan valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya alulról nem korlátos számhalmaz. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek $-\infty$ - ben a határértéke $-\infty$, ha tetszőleges $N \in \mathbb{R}$ – hoz található olyan $K \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy $f(x) < N$, ha $x < K$ és $x \in D_f$. Jele: $\lim\limits_{x \to -\infty} f\,(x) = -\infty$

TÉTEL:
Ha az $f\,(x)$ és $g\,(x)$ függvényeknek x_0 – ban van véges határértéke és $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x) = A$, illetve $\lim\limits_{x \to x_0} g\,(x) = B$, akkor teljesülnek a következők:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f\,(x) + g(x)] = A + B$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} [f\,(x) - g(x)] = A - B$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} [f\,(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \frac{A}{B}$ $\qquad f\,(x) \neq 0; B \neq 0$

Megjegyzés:

- *Ha az A és B nem számot jelöl, hanem $+\infty$ - t, vagy $-\infty$ - t, akkor ezek az összefüggések általában nem érvényesek.*

- *A tétel többtagú összeg és többtényezős szorzat esetén is igaz.*

- *Nevezetes határértékek:* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ *és* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Gyakorló feladatok

1. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x+2}$

B: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+2x^3-x}{7x^4-3x^2}$

C: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-8}{4x+3}$

D: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^4-5x^3+3}{\sqrt{2}\cdot x^2-1}$

E: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{5x+6}$

F: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-9x+20}$

G: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+4x^2-7}{-5x^4+10x^2+7}$

H: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2x+7}$

I: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^3-12x+1}{13x^3+100x^2+5}$

J: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+2}{10x^2+3x}$

K: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2-9x+20}$

L: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-7x^2}{x^3+3x}$

M: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x-100}$

N: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+7}{x+3}$

O: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+1}{x^4+1}$

P: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x+1}$

Q: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+5}{2x^2+1}$

R: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+500x}{x^2-10^7}$

S: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1000}$

T: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{5x+1}$

U: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+7}{4x^2-x+1}$

V: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2}{10x^2+1}$

W: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+7}{x^2-x+1}$

Z: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{3x^2-5}$

2. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}$

B: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{123x^{21}+x^{15}}{x^{13}-999x^6-2x-78}$

C: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}$

D: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-8}{x-2}$

E: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+3}$

F: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^{12}+3x^7-6}{9x^4-5x^{12}+x}$

G: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x^2-9}$

H: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-8}{x+2}$

I: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-4)^2}{2x^2-32}$

J: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^9-7x^2}{2022x^{11}+x^8-e}$

K: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x^3-27}$

L: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-16}{x+4}$

M: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x+7}{4x^2-x+9}$

N: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x+7}{4x-5x^2}$

O: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+7}{x-7x^2}$

P: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4-7x^3+3x^2-5x+7}{4x-5x^2-x^4}$

Q: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^2-5x+7}{4x^2-x^3}$

R: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-15x+13}{3x^2-x^3}$

S: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x^2-5x+7)\cdot(x^2+x-2)}{(4x-5)\cdot(x^3-5x)}$

T: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x}{x^2-2x}$

U: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-6x+3}{2x^2+x-1}$

V: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x+1}$

W: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^3-6x+3}{2x^3+x-1}$

Z: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2-7x}{5x^3-7x^2}$

3. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+4}}{9x}$ B: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ C: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-10}}{x+1}$

D: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\cdot\left(\sqrt{x^2+19}-x\right)\right]$ E: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+5x-7}-2x\right)$ F: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

G: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-7x+1}}{2x}$ H: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ I: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{x+1}-x\right)$

J: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+7}}{4x}$ K: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5x+7}{\sqrt{4x-5x^2}}$ L: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-9}}{3x-1}$

M: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{2x^3+1}}$ N: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{\sqrt{3x^4+5x+2}}$ O: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x}$

P: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^3+1}}$ Q: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+7}\right)$ R: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{x-6}}{\sqrt{2x^3+1}}$

4. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{6x-17}{3x+5}\right)^3$ B: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)^{-x-7}$ C: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x^4+\sin(7x)}$

D: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5-3}{3x^2+\sin(3x)}$ E: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-3}{3x^3+\cos x}$ F: $\lim\limits_{x\to+\infty} [x\cdot\cos x]$

5. Az alábbiak közül melyiknek van véges, illetve végtelen határértéke?

A: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x}{\sqrt{x+3}}$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x}{\sqrt{x+3}}$

B: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{5x}$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{5x}$

C: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$

D: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

E: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

F: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x^2-6x}\right)$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x^2-6x}\right)$

G: $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,02^{x^3-5x^2}$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,02^{x^3-5x^2}$

6. Az alábbiak közül melyiknek van véges határértéke? Add meg ezeket az értékeket!

A: $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-4)$ B: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{x^2+1}$ C: $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2-4x)$ D: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{x}$

E: $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]$ F: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{[x]}$ G: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-[x])$ H: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-[x]}$

I: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x)$ J: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos x)$ K: $\lim\limits_{x\to+\infty}(tg\ x)$ L: $\lim\limits_{x\to+\infty}(ctg\ x)$

M: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$ N: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}$ O: $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|$ P: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}$

Q: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}}$ R: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x^3}}$ S: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x^2+x+5}$ T: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^3-2x+3}$

U: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{5-x^2}$ V: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^3-2x+3}$ W: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{x^4+3x^2-x+1}$ Z: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2+x-12}$

7. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to3}(3x-2)$ B: $\lim\limits_{x\to5}\frac{x}{x-4}$ C: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ D: $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x+4}$

E: $\lim\limits_{x\to3}(x^2+1)$ F: $\lim\limits_{x\to2}(2x-1)$ G: $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-5x+2)$ H: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x-2}$

I: $\lim\limits_{x\to7}(2x-3)$ J: $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-9x}{x^2+3x}$ K: $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x-2}$ L: $\lim\limits_{x\to3}(x^2-4)$

M: $\lim\limits_{x\to3}(2x^2-15)$ N: $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-5}{x+6}$ O: $\lim\limits_{x\to4}\frac{5x+2}{2x+3}$ P: $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x}$

Q: $\lim\limits_{x\to3}\left(\sqrt{3-x}+1\right)$ R: $\lim\limits_{x\to10}\left[\frac{\lg(x-4)+\lg(2x+5)}{\pi}\right]$ S: $\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{x-10}}{2x}$ T: $\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x+1}{x^2+2}$

U: $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^4-16}{x^3-2x^2+2x-4}$ V: $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\right]$ W: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[ctg\ (x-\pi)]$ Z: $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin x)$

8. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-8}{x+2}$ B: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-3}{x^2-9}$ C: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-8}{x-2}$ D: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-3}{x^3-27}$

E: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x^2+3}$ F: $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}(x^2)$ G: $\lim\limits_{x\to 2}(\log_2 x)$ H: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-16}{x+4}$

I: $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}(x)$ J: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$ K: $\lim\limits_{x\to -5}(-x^4-x+10)$ L: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1}$

M: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x+1}$ N: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-1}{x+3}$ O: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x+6}$ P: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x-8}{2x+8}$

Q: $\lim\limits_{x\to 0}(e^x)$ R: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}(\sin x)$ S: $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos x)$ T: $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)$

U: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}(\operatorname{ctg} x)$ V: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x)$ W: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)$ Z: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}(\operatorname{ctg} x)$

9. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$ B: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2-9}$ C: $\lim\limits_{x\to 16}\frac{x-16}{4-\sqrt{x}}$ D: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2+6x-8}{4-x^2}$

E: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-10x+25}{2x-10}$ F: $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-5x-14}{x^2-8x+7}$ G: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x}$ H: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

I: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ J: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ K: $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2-16}$ L: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

M: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-9x+20}$ N: $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x+3}$ O: $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$ P: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

Q: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$ R: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-4x+3}$ S: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-4}{x^2-9x+20}$ T: $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{10}-\sqrt{x}}{x-10}$

U: $\lim\limits_{x\to 49}\frac{7-\sqrt{x}}{49-x}$ V: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ W: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5-2x^3}{x^2}$ Z: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$

10. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x}{x}$ B: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ C: $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+7x+12}$ D: $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-7x+6}{2x^2-13x+6}$

E: $\lim_{x\to -7}\frac{x^2+14x+49}{x^2+6x-7}$ F: $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-7x}{x}$ G: $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2+7x-8}$ H: $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x}{x^3-x^2}$

I: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ J: $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}$ K: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{9-x^2}$ L: $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

M: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$ N: $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x^2+5x+6}$ O: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-4x}$ P: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}$

Q: $\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{2x^2-32}$ R: $\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}$ S: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2+2x-24}$ T: $\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^2+2x}$

U: $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$ V: $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x+2}$ W: $\lim_{x\to 10}\frac{2x^2-200}{x^2-10x}$ Z: $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+3x^4}{2x^3-x^2}$

11. Határozd meg a következő határértékeket! $(a\in\mathbb{R})$

A: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-2x^2+x-2}$ B: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$ C: $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3}{1+x^3}\right)$ D: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

E: $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}$ F: $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$ G: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ H: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

I: $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$ J: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$ K: $\lim_{x\to 0}\frac{x^5+3x^3+x}{x^3+x^2-2x}$ L: $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-27}$

M: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ N: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$ O: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ P: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

Q: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ R: $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^3-3x^2+9x-27}$ S: $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x+3}$ T: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

U: $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$ V: $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a\cdot x}-x}{a-x}$ W: $\lim_{x\to a}\frac{(x^2-3x)-(a^2-3a)}{x-a}$ Z: $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$

12. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$ és $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$

B: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$ és $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$

C: $\lim_{x\to 4}\frac{x^5-1}{x^4-1}$ és $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1}$

13. Határozd meg a $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, **a** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ **és a** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(2 + x)^3 - 8}{x}$ **határértékeket!** $(a \in \mathbb{R})$

14. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x \to 3} [x]$ **B:** $\lim\limits_{x \to -5} (sgn\ x)$ **C:** $\lim\limits_{x \to 0} [(x + 1) \cdot sgn\ x]$ **D:** $\lim\limits_{x \to 0} [sgn\ (x^2)]$

E: $\lim\limits_{x \to -3} \left[\frac{x}{2}\right]$ **F:** $\lim\limits_{x \to 4} \left[\frac{1}{x}\right]$ **G:** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\sin x]$ **H:** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin x}\right]$

I: $\lim\limits_{x \to 0} (\log_2 x)$ **J:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 4}{4} \cdot \frac{|x|}{x}\right)$ **K:** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ **L:** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

M: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)$ **N:** $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)$ **O:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right)$ **P:** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2}$

15. Van - e az $f(x)$ **függvénynek véges, vagy végtelen határértéke az** x_0 **helyen?** $(m \in \mathbb{R})$

A: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$ $x_0 = 3$

B: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$ $x_0 = 4$

C: $f(x) = \frac{x + m}{x - m}$ $x_0 = m$

D: $f(x) = \frac{x^2 - m \cdot x - 2m^2}{x^2 - 4m \cdot x + 4m^2}$ $x_0 = 2m$

16. Az alábbiak közül melyiknek van véges határértéke? Add meg ezeket az értékeket!

A: $\lim\limits_{x \to -2{,}5} 10^{\frac{2x + 5}{x + 1}}$ **B:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}}$ **C:** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}}$ **D:** $\lim\limits_{x \to -6} 2^{\frac{x^2 + 6x}{x^2 - 36}}$

E: $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ **F:** $\lim\limits_{x \to -2} e^{3x^2 - 5x + 4}$ **G:** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x \cdot e^{ctg\, x})$ **H:** $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{4 - x}{x^5}}$

17. Van - e az alábbi függvényeknek véges, vagy végtelen határértéke az $x_0 = 0$ **helyen?**

A: $f(x) = \frac{7x + 2}{2x - 8}$ **B:** $f(x) = \frac{x^3 - 7x}{x^2 + 2x}$ **C:** $f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x^3 + x^2}$ **D:** $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^5 + 4x^3}$

18. Hol van véges, hol van végtelen határértéke és mely helyeken nincs határértéke a következő függvényeknek?

A: $f(x)=\frac{2x-6}{5x^2-15x}$ **B:** $f(x)=\frac{5x^2-15x}{2x-6}$

C: $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ **D:** $f(x)=\frac{8-2x}{4x^2-x^3}$

E: $f(x)=\left|\frac{5}{2x^2-18}\right|$ **F:** $f(x)=3^{|x|}$

G: $f(x)=\log_3|x|$ **H:** $f(x)=\begin{cases}\log_3 x, ha\ x>0\\ 1, ha\ x=0\\ \log_3(-x), ha\ x<0\end{cases}$

19. Számítsd ki az $\frac{f}{g}$ és a $\frac{g}{f}$ függvények x_0 - beli határértékét!

A: $f(x)=\frac{1}{x-3}$ **és** $g(x)=\frac{1}{x^2-9}$ $x_0=3$

B: $f(x)=\frac{1}{2-x}$ **és** $g(x)=\frac{4}{x^2-4}$ $x_0=2$

20. Határozd meg az f és g függvény határértékét az $x_0=3$ helyen!

$f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}; x\mapsto\frac{x^2-9}{x-3}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto x+1$

Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to 3}(f+g)$ **B:** $\lim\limits_{x\to 3}(f-g)$ **C:** $\lim\limits_{x\to 3}(f\cdot g)$ **D:** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{f}{g}\right)$

21. Határozd meg az f és g függvény határértékét az $x_0=\frac{\pi}{3}$ helyen!

$f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}; x\mapsto \sin x$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto \cos x$

Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(f+g)$ **B:** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(f-g)$ **C:** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(5f)$ **D:** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(f\cdot g)$ **E:** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{f}{g}\right)$

22. **Van – e az $f: (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - 3x^2 + \pi \cdot x$ függvénynek véges határértéke a 3 helyen?**

23. **Van – e az $f: (\mathbb{R}\setminus\{0; 6\}) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^3 - 6x^2}{x^4 - 6x^3}$ függvénynek véges határértéke a 0 és a 6 helyen? Ha van, akkor határozd meg a határértéket!**

24. **Van – e az $f: (\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{2x^2 - 8}$ függvénynek véges határértéke a $-2; 0$ és a 2 helyeken? Ha van, akkor határozd meg ezt a határértéket!**

25. **Igaz – e, hogy $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$?**

26. **Határozd meg a következő függvények határértékét az adott pontban!**

A: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}, ha\ x \neq 3 \\ 1, ha\ x = 3 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 3$

B: $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 3x}, ha\ x \neq 3 \\ 0, ha\ x = 3 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 3$

27. **Határozd meg a következő függvények határértékét a megadott „töréspontban”!**

A: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, ha\ x \geq 2 \\ 3, ha\ x < 2 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 2$

B: $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3, ha\ x \geq 1 \\ 2x + 2, ha\ x < 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1$

28. **Határozd meg az $f(x) = \lg x$ függvény $x_0 = 0$ pontban vett jobb oldali és a $g(x) = \sqrt{\cos x}$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban vett bal oldali határértékét!**

29. Vizsgáld meg a függvények jobb és bal oldali határértékét a kérdéses pontban!

A: $a(x) = \begin{cases} x^2, ha\ x \leq 1 \\ x+1, ha\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1$

B: $b(x) = \begin{cases} \lg x\,, ha\ x > 0 \\ x^2, ha\ x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

C: $c(x) = \begin{cases} x^{-1}, ha\ x > 0 \\ 1, ha\ x < 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

D: $d(x) = sgn\ x = \begin{cases} 1, ha\ x > 0 \\ 0, ha\ x = 0 \\ -1, ha\ x < 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

E: $e(x) = \frac{|x|}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

30. Vizsgáld meg a függvények jobb és bal oldali határértékét a kérdéses pontban!

A: $a(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

B: $b(x) = \frac{1}{x-2}$ $\qquad x_0 = 2$

C: $c(x) = \frac{2}{x-3}$ $\qquad x_0 = 3$

D: $d(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ $\qquad x_0 = -3$

E: $e(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ $\qquad x_0 = -1$

31. Vizsgáld meg a függvények jobb és bal oldali határértékét a kérdéses pontban!

A: $a(x) = [x]$ $\qquad x_0 = 3$

B: $b(x) = \frac{x+1}{5x}$ $\qquad x_0 = 0$

C: $c(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ $\qquad x_0 = 1$

D: $d(x) = \frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ $\qquad x_0 = -3$

E: $e(x) = \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$ $\qquad x_0 = -2$

32. Határozd meg a következő határértékeket!

A: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{10x}$ B: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(3x)}{\sin(4x)}$ C: $\lim\limits_{x\to 0} [x \cdot ctg\ (3x)]$ D: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$

E: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x}$ F: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(9x)}{tg\ (7x)}$ G: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$ H: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\ x}{x}$

I: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$ J: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(2x)}{\sin(5x)}$ K: $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot ctg\ x)$ L: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(-5x)}{x}$

M: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{5x}$ N: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{5x}$ O: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ P: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(3x)}{tg(7x)}$

Q: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{3x}$ R: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}$ S: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$ T: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

U: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ V: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$ W: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ Z: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(\alpha)}{x-\alpha}$

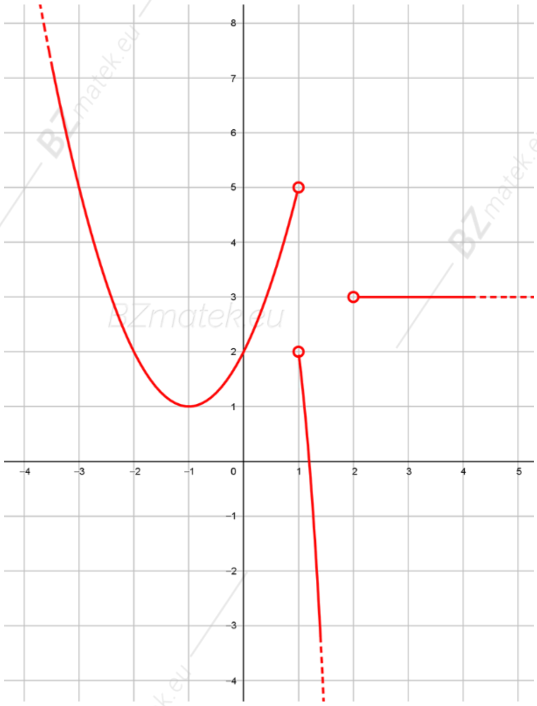
33. Határozd meg a következő határértékeket!

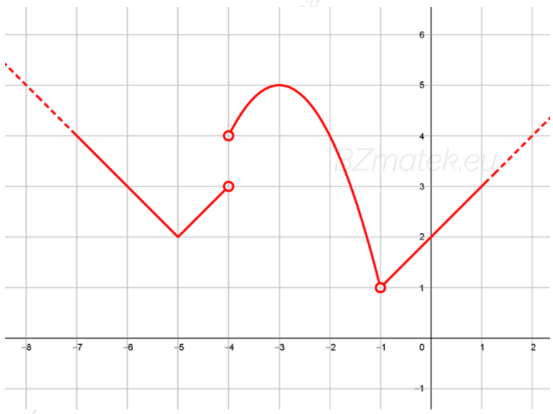
A: $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ B: $\lim\limits_{x\to 2\pi} \frac{\sin x}{x-2\pi}$ C: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}-1}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}$

D: $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ E: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{2x}$ F: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$

G: $\lim\limits_{x\to -\pi} \frac{\sin 3\cdot(x+\pi)}{2\cdot(x+\pi)}$ H: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$ I: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

34. Határozd meg az alábbi függvények határértékeit az adott helyeken és $\pm\infty$ - ben! (A szaggatott vonallal jelölt részek után a függvény menete már nem változik.)





$f(x)\colon x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$ **és** $x_4 = 4$

$g(x)\colon x_1 = -7, x_2 = -4, x_3 = -1$ **és** $x_4 = 0$

35. Tudjuk, hogy az $f\colon (\mathbb{R}\setminus\{2\}) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{x^2 + a \cdot x + 2}{x - 2}$ függvénynek van a 2 helyen véges határértéke. Mennyi ez a határértéke? Melyik számot jelöli az a?

36. Határozd meg a b értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - b \cdot x + 1}{x - 1}$ létezik és véges!

37. Határozd meg a k értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + k \cdot x + 6}{x - 2}$ létezik és véges!

38. Határozd meg az l értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3 - 9x^2 + l \cdot x - 27}{x^2 - 6x + 9}$ létezik és véges!

39. Határozd meg az m értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2 - m \cdot x + 8}{2x - 6}$ létezik és véges!

40. Határozd meg az n értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x^3-n}{x-3}$ létezik és véges!

41. Határozd meg a p értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^6+p}{x^2-9}$ létezik és véges!

42. Határozd meg a q értékét, ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-q\cdot x+2q-4}{x^2-4x+4}$ létezik és véges!

43. Melyik számot jelöli a p, ha tudjuk, hogy az $f\colon\left(\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\right)\to\mathbb{R};\, x\mapsto\frac{x+p}{3x+2}$ függvénynek a 0 helyen -6 a határértéke?

44. Add meg az összes olyan $t\in\mathbb{R}$ számot, amely esetében az $f\colon(\mathbb{R}\setminus\{2\})\to\mathbb{R};\, x\mapsto\frac{t+x}{2-x}$ függvénynek a 0 helyen és a $\frac{t}{2}$ helyen egyenlő a határértéke!

45. Határozd meg a b értékét úgy, hogy az $f(x)=\frac{x^4-b^4}{(x-b)\cdot(x+b)}$ függvény határértéke a $\frac{b}{2}$ helyen 125 legyen!

46. Bizonyítsd be, hogy az $f\,(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ függvénynek létezik $x_0=2$ – ben határértéke, s az $A=4$!

47. Igazold, hogy az $f\colon\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R};\, x\mapsto\frac{x^2-9}{x+3}$ függvénynek az $x_0=-3$ helyen a határértéke $A=-6$!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Schlegl István; 2015.; Sokszínű matematika - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Trembeczki Csaba; 2016.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 1.; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 3. feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged

(7) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Gerőcs László; 2011.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(12) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(13) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(14) Saját anyagok