Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Fejezetek a számelmélet témaköréből

Számok végződésének vizsgálata:
A szorzás, hatványozás eredményének utolsó számjegyének meghatározásához elegendő a szorzó tényezők utolsó számjegyeit tekintenünk. Hatványozás esetén az utolsó számjegyek sorozatában észrevehető ismétlődés.

$0^1 = 0 \quad 0^2 = 0 \quad 0^3 = 0 \quad 0^4 = 0 \quad \dots$

$1^1 = 1 \quad 1^2 = 1 \quad 1^3 = 1 \quad 1^4 = 1 \quad \dots$

$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32 \quad 2^6 = 64 \quad \dots$

$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81 \quad 3^5 = 243 \quad 3^6 = 729 \quad \dots$

$4^1 = 4 \quad 4^2 = 16 \quad 4^3 = 64 \quad 4^4 = 256 \quad \dots$

$5^1 = 5 \quad 5^2 = 25 \quad 5^3 = 125 \quad 5^4 = 625 \quad \dots$

$6^1 = 6 \quad 6^2 = 36 \quad 6^3 = 216 \quad 6^4 = 1296 \quad \dots$

$7^1 = 7 \quad 7^2 = 49 \quad 7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401 \quad 7^5 = 16807 \quad 7^6 = 117649 \dots$

$8^1 = 8 \quad 8^2 = 64 \quad 8^3 = 512 \quad 8^4 = 4096 \quad 8^5 = 32768 \quad 8^6 = 262144 \dots$

$9^1 = 9 \quad 9^2 = 81 \quad 9^3 = 729 \quad 9^4 = 6561 \quad 9^5 = 59049 \quad 9^6 = 531441$

$\dots$

Megjegyzés:
Minden szám ötödik hatványának utolsó számjegye megegyezik az eredeti szám utolsó számjegyével.

A 0 – ra való végződés vizsgálata:
A szám végén álló 0 számjegyek számát a 10 – zel való oszthatóság segítségével határozhatjuk meg. A prímtényezős felbontásban a 2 és az 5 kitevői határozzák meg, hogy az adott szám a 10 – nek milyen pozitív egész kitevőjű hatványával osztható.

Számjegyek számának vizsgálata:
Egy nagyon nagy szám számjegyeinek a számát a 10 – es alapú logaritmus segítségével határozhatjuk meg.

Helyiértékes írásmód:
A pozitív egész számokat felírhatjuk összeg alakban is: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$.

DEFINÍCIÓ: (Diofantoszi - egyenlet)
Diofantoszi egyenletnek nevezzük azt az egyenletet, amelyben az ismeretlenek együtthatói egész számok és az egyenlet alaphalmaza is az egész számok halmaza.

DEFINÍCIÓ: (Elsőfokú egyismeretlenes diofantoszi egyenlet)
Az $a \cdot x = b$ egyenletet, ahol a, b egész számok és az alaphalmaz is az egész számok halmaza, elsőfokú egyismeretlenes diofantoszi egyenletnek nevezzük.

TÉTEL:
Az $a \cdot x = b$ diofantoszi egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $a \mid b$.

DEFINÍCIÓ: (Elsőfokú kétismeretlenes diofantoszi egyenlet)
Az $a \cdot x + b \cdot y = c$ egyenletet, ahol a, b, c egész számok és az alaphalmaz is az egész számok halmaza, elsőfokú kétismeretlenes diofantoszi egyenletnek nevezzük.

TÉTEL:
Az $a \cdot x + b \cdot y = c$ diofantoszi egyenlet pontosan akkor megoldható, ha $(a; b) \mid c$. Ha egy x_0, y_0 megoldása a diofantoszi egyenletnek, akkor végtelen sok megoldása van, s a gyökök a következők: $x = x_0 + \frac{b}{(a;b)} \cdot t$ és $y = y_0 - \frac{a}{(a;b)} \cdot t$ $(t \in \mathbb{Z})$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Mi az utolsó számjegy?

A: 2^{100} **B:** 3^{999} **C:** 4^{112} **D:** 5^{1223}

E: 6^{255} **F:** 7^{844} **G:** 8^{421} **H:** 9^{127}

2. (K) Milyen számjegyre végződnek a következő kifejezések eredményei?

A: $2005^{2004} + 1$ **B:** $2021^{2021} - 5$ **C:** $2006^{2007} + 1$ **D:** $1993^{2345} - 7$

3. (K) Milyen számjegyre végződnek a következő kifejezések eredményei?

A: $123456789 \cdot 9753 \cdot 2468$ **B:** $2^{103} \cdot 3^{52} \cdot 6^{78} \cdot 7^{21}$

4. (K) Milyen számjegyre végződik 5 egymást követő pozitív egész szám szorzata?

5. (K) Milyen számjegyre végződik 5 egymást követő pozitív páratlan szám szorzata?

6. (K) Milyen számjegyre végződik az első 7 prímszám szorzata?

7. (K) Milyen számjegyre végződnek a műveletek eredményei?

A: $96^{19} + 19^{97}$ **B:** $2^{20} + 3^{20}$ **C:** $1234^{4321} + 4321^{1234}$

D: $4^{12} + 5^{12} + 6^{12}$ **E:** $11^{11} + 22^{22} + 33^{33}$ **F:** $23^{123} + 124^{124} + 125^{125}$

8. (E) Mi lesz az utolsó két számjegye a 2^{1990} számnak?

9. (E) Határozd meg a $7+7^2+7^3+\dots+7^{4n}$ szám utolsó két számjegyét, ha n pozitív egész szám!

10. (E) Mennyit ad maradékul tízzel osztva a $2001^{2004}-2004^{2007}+2009^{2002}$ szám? Mennyit ad maradékul, ha 3 – mal osztjuk?

11. (K) Mennyi a számjegyek összege a $\left(10^{4n^2+8}\right)^2, n\in\mathbb{N}$ alakú számban?

12. (E) Mennyi 0 – ra végződnek a következő szorzatok eredményei?

A: $56! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 56$

B: első 100 pozitív egész szám szorzata

C: $125^5\cdot 144^3\cdot 96^2$

D: $2^{2007}\cdot 125^{345}\cdot 25^{200}$

13. (K) Öt egymást követő páratlan egész számot összeszorzunk. Milyen jegyre végződik a kapott szám? Milyen jegyre végződik, ha öt egymást követő számot szorzunk össze?

14. (K) Hány jegyű számok a következő kifejezések eredményei?

A: $(10^4)^7+(10^6)^5$

B: $\left(10^5\right)^7+(10^3)^8+(10^2)^4$

C: $10^{2000}-5\cdot 10^{1000}$

D: $10^{10^{10}}$

E: $2^{31}\cdot 5^{32}$

F: $2^{15}\cdot 5^{15}-2^{13}\cdot 5^{12}$

15. (E) Hány jegyű számok a következő kifejezések eredményei?

A: 2^{100}

B: 2^{1000}

C: 3^{45}

16. (E) Az $A=10^{11^9}$ és $B=9^{10^{11}}$ szám közül melyik a nagyobb?

17. (E) Mennyi a 2^{2010} és 5^{2010} számok számjegyei számának az összege?

18. (K) Adj meg 4 azonos nevezőjű törtet, amelyek a $\frac{3}{53}$ és a $\frac{4}{53}$ közé esnek!

19. (K) Írj fel 5 számot különböző nevezőjű törtalakban a $\frac{3}{7}$ és $\frac{5}{7}$ között!

20. (K) Lehet - e a $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{4}$ közé 10 darab racionális számot írni? Lehet - e 10 – nél több racionális számot közéjük írni? Adj meg olyan eljárást, amelynek felhasználásával tetszőleges sok racionális szám írható a két tört közé!

21. (K) Írj fel 3 racionális és 3 irracionális számot, amelyek az $\left[\frac{1}{33}; \frac{2}{33}\right]$ intervallumban vannak!

22. (K) A $7\frac{1}{3}$ és a $7\frac{1}{2}$ között hány, tovább már nem egyszerűsíthető tört van, amelyeknek számlálója és nevezője egyaránt kétjegyű?

23. (K) Egy tört bővíthető úgy, hogy nevezője 10 hatvány legyen. Milyen kétjegyű szám lehet a nevezője? Hány ilyen kétjegyű nevező van?

24. (K) Tudjuk, hogy a $\frac{\overline{381}}{\overline{5x}}$ és $\frac{\overline{565}}{\overline{8y}}$ törtek egyszerűsíthetők és nem nagyobbak 7 – nél. Melyik tört a nagyobb?

25. (K) Add meg az a, b számjegyeket úgy, hogy $\frac{\overline{9a7b}}{24}$ tört egyszerűsíthető legyen. Hány ilyen törtet kapunk?

26. (K) Milyen számjegy áll a $\frac{8}{17}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 1960. helyen?

27. (K) Az $\frac{5}{14}$ tizedestört alakjában milyen számjegy áll a tizedesvessző utáni 2001. helyen?

28. (K) Milyen számjegy áll a $\frac{3}{7}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2004. helyen?

29. (K) Milyen számjegy áll a $\frac{43}{26}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző után a 2005. helyen?

30. (K) Az $\frac{531}{999}$ szám tizedes tört alakjában mi a tizedes vessző utáni 2006. számjegy?

31. (K) Milyen számjegy áll a $\frac{35}{6}$ tizedes tört alakjában a tizedes vessző utáni 2010 - edik helyen?

32. (K) Írd fel törtalakban a következő tizedestörteket!

$A = 1,23$ $\quad$ $B = 2,5\dot{8}$ $\quad$ $C = 3,\dot{2}1\dot{4}$ $\quad$ $D = 4,6\dot{9}\dot{7}$

33. (K) Mely pozitív törtekre igaz, hogy ha számlálóját és nevezőjét egyaránt 1 – gyel növelik a tört értéke nő?

34. (K) Egy törtszámról a következőket tudjuk:

- **értéke $\frac{2}{5}$**
- **számlálójának és nevezőjének összege kétjegyű szám**
- **e kétjegyű szám egy természetes szám négyzete**

Melyik ez a törtszám?

35. (E) Milyen n pozitív egész számra lesz a következő kifejezés is pozitív egész?

A: $\frac{5n^2 + 20}{n}$ $\quad$ **B:** $\frac{5n^2 + 8n + 12}{n}$ $\quad$ **C:** $\frac{(n + 4)^3}{n}$ $\quad$ **D:** $\frac{(n - 3)^3}{n}$

36. (E) Milyen n egészekre lesznek egészek a következő, törtalakban adott számok?

A: $\frac{n+4}{n-3}$ **B:** $\frac{3n+10}{n+1}$ **C:** $\frac{2n+3}{n-4}$ **D:** $\frac{n+1}{n-1}$

E: $\frac{n-2}{n+3}$ **F:** $\frac{2n-3}{n+2}$ **G:** $\frac{n+11}{n-9}$ **H:** $\frac{5n+3}{n+7}$

37. (E) Milyen n természetes számok esetén lesznek a következő kifejezések értékei természetes számok?

A: $\frac{n+13}{n-5}$ **B:** $\frac{9n+4}{n+5}$ **C:** $\frac{2n+6}{n-3}$ **D:** $\frac{2n+10}{n+1}$

E: $\frac{5n-1}{n+1}$ **F:** $\frac{3n+5}{n+3}$ **G:** $\frac{n+3}{n-3}$ **H:** $\frac{3n+5}{n-5}$

38. (E) Milyen n egészekre lesznek egészek a következő, törtalakban adott számok?

A: $\frac{10n+21}{2n-3}$ **B:** $\frac{10n+1}{5n-1}$ **C:** $\frac{6n-1}{3n+2}$ **D:** $\frac{6n+11}{2n-2}$

39. (E) Milyen n egészekre lesznek egészek a következő, törtalakban adott számok?

A: $\frac{n^2+1}{n+1}$ **B:** $\frac{n^2+2}{n+2}$ **C:** $\frac{n^2+6}{n-1}$ **D:** $\frac{n^2+5}{n-3}$

40. (E) Milyen n egészekre lesznek egészek a következő, törtalakban adott számok?

A: $\frac{n^2+2n+6}{n+1}$ **B:** $\frac{3n^2+6n+10}{n+2}$ **C:** $\frac{n^2+3n-7}{n-1}$ **D:** $\frac{n^2-5n+7}{n-2}$

41. (E) Határozd meg az n egész szám azon értékeit, amelyekre a $\frac{n+3}{n+1}$ és $\frac{2n+15}{n+4}$ törtek értéke is egész szám lesz!

42. (E) Milyen n egész esetén lesz az $\frac{n+2}{n-5}$ tört értéke a következő tulajdonságú?

A: nulla **B: pozitív** **C: egész**

43. (E) Miért nem lehet egyszerre egész az $\frac{n+1}{15}$ és az $\frac{n+8}{21}$ kifejezés értéke? $(n \in \mathbb{N})$

44. (E) Hány olyan egész n szám van, amelyre a $\frac{2n+2010}{n}$ kifejezés értéke is egész?

45. (E) Hány olyan egész n szám van, amelyre a $\frac{3n^2-7n+1842}{n-3}$ kifejezés értéke is egész?

46. (E) Mivel egyszerűsíthető a következő tört?

A: $\frac{n+1}{n-1}$ **B:** $\frac{n+3}{n-2}$ **C:** $\frac{2n+1}{n+3}$ **D:** $\frac{3n-1}{2n+4}$

47. (E) Mivel egyszerűsíthető $\frac{11m+2k}{18m+5k}$, ahol $(k;m)=1$?

48. (E) Mivel egyszerűsíthető a $\frac{3n-m}{5n+2m}$ tört, ha tudjuk, hogy az $\frac{m}{n}$ nem egyszerűsíthető?

49. (E) Van - e olyan n természetes szám, amelyre a $\frac{2n-5}{3n-7}$ egyszerűsíthető?

50. (E) Milyen n természetes számmal lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

51. (E) Milyen n pozitív egész számok esetén egyszerűsíhető a $\frac{n+17}{n-4}$ tört?

52. (E) Bizonyítsd be, hogy a $\frac{3n+1}{5n+2}$ tört nem egyszerűsíthető egyetlen n egészre sem!

53. (E) Bizonyítsd be, hogy a $\frac{8n^4+4n^2+1}{4n^3+n}$ tört nem egyszerűsíthető egyetlen n egészre sem!

54. (K) Gondoltam egy egész számot. Négyzetre emeltem és elosztottam 3 - mal.

A: Mi lehetett a gondolt szám, ha az osztás hányadosa 12 és nincs maradék?

B: Mi lehetett a gondolt szám, ha az osztás eredménye pontosan 8?

C: Mi lehetett a gondolt szám, ha az osztás hányadosa 21, a maradék pedig 1?

D: Kaphatunk - e 2 maradékot az osztásban?

55. (K) Ottó megszámozta a füzetének oldalait. Eddig 31 számjegyet használt fel. Hány oldalt számozott meg eddig, ha a legelső oldalon egyessel kezdte a számozást?

56. (K) Az 1 – től kezdve írjuk rendre egymás mellé az egész számokat. Milyen számjegy áll az 1999. és a 2002. helyen?

57. (K) Mennyi idő szükséges az 1 – től $98\,762$ – ig bezárológ terjedő egész számok leírásához, ha percenként 92 számjegyet írunk le?

58. (K) Hány számjegy kell az $1 - 1986$ – ig terjedő természetes számok leírásához? Ha a természetes számokat egymás után írjuk le, akkor milyen számjegy áll az 1986 – odik helyen?

59. (K) Az egyik héten az ötös lottón minden kihúzott szám ugyanazon egész szám egész kitevős hatványa volt. (1 – től 90 – ig húznak ki 5 számot.) Melyek voltak a kihúzott számok? Hány eset lehetséges?

60. (K) Az $1, 2, \dots, 9, 10$ számok két csoportra oszthatók - e úgy, hogy a két csoportban lévő számok összege, illetve szorzata egyenlő legyen?

61. (K) Lehet - e az 1 – től 2004 – ig terjedő egész számokat két csoportba osztani úgy, hogy minden szám valamelyik csoportban legyen, és az egyik csoportban levő számok szorzata egyenlő legyen a másik csoportban levő számok szorzatával?

62. (K) Miért nem lehet 5 egymást követő természetes számot két csoportba osztani úgy, hogy a két csoportban levő számok szorzata egyenlő legyen?

63. (K) Melyik az a legnagyobb egész szám, amellyel bármely három egymást követő egész szám összege osztható?

64. (K) Felírható - e a 2001 három szomszédos egész szám összegeként?

65. (K) Felírható - e a 2002 három szomszédos egész szám szorzataként?

66. (K) Felírjuk egy papírra az $1; 2; 3; \dots; 1986$ számokat. Ezek közül két tetszőleges számot letörlünk, és helyettük felírjuk a különbségüket. Ezt addig ismételjük, amíg csak egyetlen 0 – tól különböző szám marad. Igaz - e, hogy ez a szám páratlan?

67. (K) Van - e olyan kétjegyű szám, amely egyenlő a számjegyeinek összegével?

68. (K) Melyik az a legkisebb pozitív páros szám, amely számjegyeinek összege 21?

69. (K) Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2002, illetve 2010?

70. (K) Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyben a számjegyek szorzata 300, illetve 2000?

71. (K) Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege 4. Hány ilyen szám van? A legnagyobb és a legkisebb szám átlaga szerepel – e a számok között?

72. (K) Határozz meg három olyan különböző természetes számot, amelyek összege egyenlő a szorzatukkal, továbbá az egyik szám megegyezik a másik kettő összegével!

73. (K) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyekhez 4 – et adva, a számjegyek összege felére csökken?

74. (E) Írd fel azt a legkisebb természetes számot, amely 6 – ra végződik, és ha ezt a szám végéről a szám elejére írjuk, az eredeti szám négyszeresét kapjuk!

75. (E) Határozd meg azt a legkisebb 1 – gyel kezdődő természetes számot, amely olyan tulajdonságú, hogy ha az elejéről kitöröljük az 1 – est és beírjuk a végére, akkor az így kapott szám az eredetinek háromszorosa lesz!

76. (K) Egy autó rendszáma a következő két kétjegyű számból áll: $90 - 91$. Ha az első kétjegyű számhoz a második számjegyeinek összegét hozzáadjuk, 100 – at kapunk, ha a második kétjegyű számhoz az első számjegyeinek összegét adjuk, ugyancsak 100 – at kapunk. Hány ilyen kétjegyű számpár van? Határozd meg mindegyiket!

77. (K) Meg tudjuk – e határozni két ember születési évét a következő adatokból?

A: mindketten a 20. században születtek

B: mindkettő évszáma ugyanazokból a számjegyekből áll

C: a két ember között a korkülönbség 9 év

78. (K) A nagypapa 63 évvel idősebb unokájánál, aki 2000 – ben még nem volt 10 éves. Születési évük ugyanazokból a számjegyekből állnak, csak más sorrendben. Hány éves volt a nagypapa 2000 – ben?

79. (K) Mikor született az az ember, aki 2005 – ben annyi idős, mint születése éve számjegyeinek összege?

80. (K) Egy közgazdász a következőt mondta: 2006 – ban vezetjük be az eurót, én ekkor éppen annyi idős leszek, mint születési évem számjegyei négyzetének összege. Mikor született az illető?

81. (K) Nagyapám 2012 – ben annyi idős, mint születési éve számjegyei négyzetének összege. Hány éves a nagyapám 2012 – ben?

82. (K) Melyek azok az $\overline{ab}$ kétjegyű számok, amelyekre teljesül, hogy $\overline{ab} + \overline{ba} = 88$?

83. (K) Melyek azok az $\overline{ab}$ kétjegyű számok, amelyekre teljesül, hogy $\overline{ab} - \overline{ba} = 72$?

84. (K) Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekre teljesül, hogy $\overline{a0b} + \overline{b0a} = 303$?

85. (K) Melyek azok a háromjegyű számok, amelyekre teljesül, hogy $\overline{abb} + \overline{baa} = 888$?

86. (K) Egy kétjegyű számhoz hozzáadtuk számjegyeinek összegét, s így 81 – et kaptunk. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?

87. (K) Egy kétjegyű számhoz hozzáadtunk 1 – et, így a szám fordítottjának a kétszersét kaptuk. Mi volt az eredeti kétjegyű szám?

88. (K) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 6 – tal nagyobbak, mint számjegyeik szorzatának és összegének az összege?

89. (K) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 8 – cal nagyobbak, mint számjegyeik szorzatának és összegének az összege?

90. (K) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 22 – vel nagyobbak, mint számjegyeik szorzatának és összegének a különbsége?

91. (K) Határozd meg az $\overline{ab}$ kétjegyű számokat, amelyekre teljesül a következő: $\overline{abb} + \overline{bab} + \overline{bba} = 777$?

92. (K) Határozd meg azt az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amely osztható 225 – tel, továbbá tudjuk, hogy $\overline{cd}$ az $\overline{ab}$ ötszöröse!

93. (K) Tekintsük a $\overline{3abc8}$ alakú tízes számrendszerbeli ötjegyű számokat. Add meg az ilyen alakú számok közül a legkisebb és legnagyobb 6 - tal osztható számot!

94. (K) Add meg az összes olyan négyjegyű számot, amelyet elosztva egy $\overline{25x}$ alakú háromjegyű, 6 – tal osztható számmal, hányadosul 10 – et, maradékul 12 – t kapunk!

95. (K) Határozd meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön a $2^5 \cdot 9^x = \overline{259x}$ egyenlőség!

96. (E) Egy kétjegyű szám jegyei különbözők. E számnak és fordítottjának a számtani közepe (átlaga) olyan kétjegyű szám, amelynek számjegyei 5 – nél nagyobbak és egyenlők. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?

97. (E) Egy kétjegyű szám jegyei közé beírtunk egy számjegyet. Az így kapott háromjegyű szám és az eredeti kétjegyű szám számtani közepe (átlaga) az eredeti kétjegyű szám fordítottja. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?

98. (E) Hány olyan háromjegyű szám van, amelyeknek a középső számjegyét törölve olyan kétjegyű számot kapunk, amely az eredeti szám kilenced része?

99. (E) Melyik az a háromjegyű szám, amelynek háromszorosa 49 – cel kisebb a szám fordítottjánál?

100. (E) Egy háromjegyű számhoz hozzáadtuk számjegyeinek összegét, s így egy olyan számot kaptunk, amelynek minden számjegye egyenlő. Ezután az eredeti számból kivontuk számjegyeinek összegét, s ekkor is olyan számot kaptunk, amelynek minden számjegye egyenlő. Mi volt az eredeti szám?

101. (E) Van - e olyan kétjegyű, illetve háromjegyű szám, amelyben a számjegyek összege megegyezik a számjegyek szorzatával?

102. (E) Egy négyjegyű számból kivonjuk az első három jegyből álló háromjegyű számot, továbbá az első két jegyből álló kétjegyű számot, végül az első számjegyet. Így végül 2005 – öt kapunk. Mi volt az eredeti négyjegyű szám?

103. (E) Van – e olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, amelyre $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2004$?

104. (E) Van – e olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, amelyre $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{a} = 2012$?

105. (E) Hány darab olyan $\overline{abab}$ alakú négyjegyű szám van, amely osztható 15 – tel?

106. (E) Határozd meg az összes olyan természetes számot, amely egyenlő számjegyei összegének 11 – szeresével!

107. (E) Melyik az a szám, amelyről a következőket tudjuk?

A: egy természetes szám négyzete

B: olyan négyjegyű szám, amelynek mindegyik jegye kisebb, mint 7

C: ha minden számjegyét 3 – mal növeljük, akkor ismét négyzetszámot kapunk

108. (E) Mennyi megoldása van az egész számok halmazán az $x + y = 12$ egyenletnek? Hogyan változik a megoldások száma, ha a természetes számok halmazán keressük a megoldásokat? Hogyan változik, ha azt is kikötjük, hogy $x \neq y$?

109. (E) Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenleteket!

A: $2x + 3y = 21$ **B:** $5x + 7y = 40$ **C:** $10x + 7y = 84$

D: $5x + 3y = 39$ **E:** $2x + 3y = 60$ **F:** $7x + 10y + 5z = 55$

G: $3x + 8y = 39$ **H:** $4x + 13y = 120$ **I:** $5x + 7y = 70$

110. (E) Oldd meg a következő két ismeretlenes diofantoszi egyenleteket!

A: $2x + 4y = 5$ B: $2x + 3y = 13$ C: $5x + 4y = 6$

D: $3x + 18y = 6$ E: $7x + 14y = 21$ F: $4x + 6y = 12$

G: $20x + 15y = 35$ H: $3x + 6y = 12$ I: $3x + 6y = 7$

111. (E) Oldd meg a következő két ismeretlenes diofantoszi egyenleteket!

A: $15x - 35y = 20$ B: $2x - 5y = 8$ C: $12x - 16y = 4$

112. (E) Oldd meg a természetes számok halmazán az alábbi egyenleteket!

A: $x^3 + 7y = y^3 + 7x$ B: $x^4 + 9y^2 = y^4 + 9x^2$

C: $xy + x + y = 11$ D: $xy + x + y = 13$

E: $xy + x + y = 20$ F: $xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 15$

113. (E) Oldd meg az alábbi egyenleteket a pozitív egész számok halmazán!

A: $x^2 + 6x + y = 20$ B: $x^2 + y^2 + 8x + 2y = 44$

C: $x^2 + 3x + 2y = 20$ D: $x^3 + 12y - x = 2006$

E: $2x^2 + y^2 + 4x + y = 2005$ F: $xy^2 + 2xy + x - 75y = 0$

114. (E) Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenletet!

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x + 65) = 2010$$

115. (E) Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet!

$$x^4 + 39x^3 - 102x^2 + 79x - 78 = 0$$

116. (E) Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet!

$$x^4 + 73x^3 + 476x^2 + 932x - 1482 = 0$$

117. (E) Oldd meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet!

$$x^2 - y^2 = 616$$

118. (E) Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek a pozitív egész számok halmazán?

A: $x^2 - y^2 = 12$ **B:** $x^2 - y^2 = 36$ **C:** $x^2 - y^2 = 72$

119. (E) Melyek azok az $a < b$ pozitív egészek, amikre teljesül, hogy $ab + a + b = 114$?

120. (E) Az x; y változók milyen értéke mellett lesz az $x^2 + y^2 - 8x + 3y$ kifejezés értéke minimális?

121. (E) Bontsd fel az 543 – at két természetes szám összegére, amelyek közül az egyik 10 – zel, a másik 17 – tel osztható!

122. (E) Két természetes szám szorzatának, összegének, különbségének és hányadosának az összege 26. Melyek ezek a számok?

123. (E) Két természetes szám szorzatának, összegének, különbségének és hányadosának az összege 72. Melyek ezek a számok?

124. (E) Két természetes szám szorzatának, összegének, különbségének és hányadosának az összege 80. Melyek ezek a számok?

125. (E) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek 19 – cel nagyobbak, mint a számjegyeik szorzata?

126. (E) Melyik az a kétjegyű szám, amely 6 – szor akkora, mint a nála 7 – tel nagyobb szám számjegyeinek összege?

127. (E) Határozd meg azokat a háromjegyű számokat, amelyek egyenlők számjegyeik összegének 18 – szorosával!

128. (E) Egy országban csak $5\ Ft$ - os és $9\ Ft$ - os érmék vannak. Hányféleképpen fizethető ki egy $101\ Ft$ - ba kerülő csokoládé? Van – e ebben az országban olyan árucikk, amelynek az ára nem fizethető ki ezzel a kétfajta érmével?

129. (E) Egy országban csak $12\ Ft$ – os és $15\ Ft$ – os érmék vannak. Ki lehet – e fizetni ezzel a kétfajta érmével az $1221\ Ft$ – os árucikket? Írj fel néhány olyan összeget, amit nem lehet ezzel a kétfajta érmével kifizetni!

130. (E) Egy toll 5 euróba, egy jegyzettömb 3 euróba kerül. Vásároltunk ezekből néhányat, s így 42 eurót fizettünk összesen. Mennyi tollat és jegyzettömböt vettünk?

131. (E) Egy farmon, ahol több ló van, mint kacsa, a tehenek száma a lovak és kacsák összegének a harmada. A lovak és kacsák összes fejeinek és lábainak a száma 100. Hány tehén van a farmon?

132. (E) Az állatiskola sárkányosztályába $3, 4$ és 5 fejű sárkányok járnak. Egy négyfejű sárkánynak kétszer annyi négyfejű osztálytársa van, mint ötfejű, és a négyfejűek összes fejeinek a száma 1 – gyel nagyobb, mint a háromfejűek összes fejeinek a száma. Hány $3, 4$ és 5 fejű sárkány jár ebbe az osztályba, ha összes fejek száma nem több, mint 132?

133. (E) Egy tál süteményt szeretnénk feldarabolni a téglalap alakú tepsi oldalaival párhuzamos vágásokkal úgy, hogy szeletelés után a tepsi szélével érintkező (kicsit égett) sütemények száma egyenlő legyen a tepsi szélével nem érintkező sütemények számával. Hogyan tehetjük ezt meg?

134. (E) Egy $60\ km$ hosszú, kör alakú pályán egy kerékpáros indulás után $\frac{1}{2}$ órával az $\overline{AB}$ kilométerkő mellett haladt el. Újabb $\frac{1}{2}$ óra elteltével a $\overline{BA}$ kilométerkő mellett volt éppen ($B < A$). Mekkora a kerékpáros (állandó) sebessége?

135. (E) Egy $60\ km$ hosszú kör alakú kerékpár pályán egy biciklista állandó nagyságú sebességgel halad. Egyszer elhaladt egy kilométerkő mellett, amelyre az $\overline{ab}$ kétjegyű szám volt írva. Egy óra múlva egy újabb kilométerkő mellet haladt el, amelyen $\overline{ba}$ kétjegyű szám szerepelt. $(b < a)$ Mekkora a kerékpár sebessége?

136. (E) Egy $90\ km$ hosszú pályán egy kerékpáros állandó sebességgel haladva valamikor elhaladt egy kilométerkő mellett, amelyre az $\overline{ab}$ kétjegyű szám volt írva. Egy óra múlva a $\overline{ba}$ kilométerkő mellett haladt el, majd újabb egy óra elteltével célba ért. Mennyi idő alatt tette meg a $90\ km$ – t?

137. (E) Határozd meg 3 – nak azt a legmagasabb hatványát, amellyel az 1 – től 1000 – ig terjedő egész számok szorzata osztható!

138. (E) Határozd meg 7 – nek azt a legmagasabb hatványát, amellyel az 1 – től 1000 – ig terjedő egész számok szorzata osztható!

139. (E) Tekintsük a $100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$ számot. A 6 – nak, illetve a 4 - nek legfeljebb mekkora hatványával osztható a szorzat értéke?

140. (E) Melyik az a legnagyobb természetes szám, amellyel biztosan osztható bármely 4; 5; illetve 6 darab szomszédos pozitív egész szám szorzata?

141. (E) Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amellyel tetszőleges n egész szám esetén osztható $n^5 - 5n^3 + 4n$?

142. (E) Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszáma egész, a háromszög területének mérőszáma a kerület mérőszámának háromszorosa. Mekkorák a háromszög oldalai?

143. (E) Az A és a B felváltva raknak egy téglalap alakú asztalra egy – egy 1 forintost, mindaddig, amíg már nem fér több érme az asztalra. (A forintos érmék legfeljebb csak érintkezhetnek, de még részlegesen sem fedhetik el egymást.) Az nyer, aki az utolsó forintot elhelyezi az asztallapra. Igaz – e, hogy mindig a kezdő fél nyer, ha helyesen játszik?

144. (E) Egy urnában 100 golyó van. Ketten, A és B felváltva húznak; legalább egy golyót húzni kell, de legfeljebb öt golyót húzhatnak a játékosok. Az nyer, aki utolsóként húz. Mi annak a feltétele, hogy az nyerjen, aki a játékot megkezdi?

145. (K) Írd fel 1 – től 1000 – ig az egész számokat egy kör mentén! Karikázzuk be 1 – től kezdve minden $15.$ – et (azaz az $1, 16, 31, \ldots$ stb. számokat), de az ismételt körüljárásnál vegyük figyelembe a már bekarikázott számokat is! A bekarikázást addig folytatjuk, amíg újra egy már bekarikázott számhoz nem jutunk. Hány számot nem karikáztunk be?

146. (E) Egy férfi és egy nő beszélget egymással, s kiderül, hogy a férfinak van három gyermeke. Ezt követően a következő párbeszéd zajlik le közöttük:
- **Mennyi idősek a gyermekek?**
- **Az életkoruk szorzata 72.**
- **Ennyiből nem tudom kitalálni.**
- **Rendben, ha kimész, akkor a házszám megadja az életkorok összegét is.**
- **Megnéztem, de még mindig képtelenség rájönni.**
- **Nah jó, de a legfiatalabb szereti az eperfagyit.**
- **Így már tudom!**

Nos, mennyi idősek a gyerekek?

147. (K) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan szám, amelyben a számjegyek szorzata $27\,300$!

148. (K) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan 6 egymás után következő pozitív egész szám, amelyek összege 2002?

149. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy kétjegyű számot megszorzunk kettővel, majd az eredmény után írjuk az eredeti kétjegyű számot, akkor olyan négy -, vagy ötjegyű számot kapunk, amely osztható 67 – tel!

150. (E) Bizonyítsd be, hogyha egy háromjegyű számot 6 – tal megszorzunk, majd az eredeti számot a szorzat számjegyei után írjuk, akkor olyan hat vagy hétjegyű számot kapunk, amelyik osztható 353 – mal!

151. (E) Egy háromjegyű számot megszoroztunk 9 – cel. Így egy olyan négyjegyű számot kaptunk, amelynek utolsó három számjegye azonos az eredeti háromjegyű számmal. Bizonyítsd be, hogy az eredeti szám osztható 125 – tel!

152. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy háromjegyű számot kétszer egymás mellé írunk, akkor 13 – mal osztható számot kapunk!

153. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy szám $\overline{abcabc}$ alakú, akkor a szám mindig osztható 91 – gyel (a, b, c számjegyek)!

154. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy háromjegyű számból kivonjuk a számjegyeinek fordított sorrendben felírt háromjegyű számot, az eredmény osztható 9 – cel!

155. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy tetszőleges négyjegyű szám utolsó jegyét a szám elejére írjuk, s az így kapott számot az eredetiből kivonjuk, akkor 9 – cel osztható számot kapunk!

156. (E) Írd fel egy négyjegyű számot és írd mellé ugyanezt a számot. Bizonyítsd be, hogy az így kapott nyolcjegyű szám osztható 73 – mal és 137 – tel is!

157. (E) Egy szám számjegyeit össze vissza cseréljük, majd a két szám közül a nagyobból kivonjuk a kisebbet. Bizonyítsd be, hogy a különbség osztható 9 – cel!

158. (K) Bizonyítsd be, hogy ha a pozitív egész számokat összeadjuk 1 – től 1000 – ig, akkor a kapott összeg osztható 11 – gyel!

159. (K) Bizonyítsd be, hogy bármely két szomszédos természetes szám szorzata páros!

160. (K) Bizonyítsd be, hogy bármely két szomszédos természetes szám összege páratlan!

161. (K) Bizonyítsd be, hogy 46 darab egymást követő természetes szám összege nem lehet 46 - tal osztható!

162. (K) Bizonyítsd be, hogy két egymás utáni páros szám szorzata osztható 8 – cal!

163. (K) Bizonyítsd be, hogy bármely 3 szomszédos természetes szám szorzata osztható 6 – tal!

164. (K) Bizonyítsd be, hogy 4 egymást követő pozitív egész szám szorzata mindig osztható 24 - gyel!

165. (K) Bizonyítsd be, hogy bármely három szomszédos természetes szám összege osztható 3 – mal!

166. (K) Bizonyítsd be, hogy ha 6 egész szám összege páratlan, akkor a számok szorzata páros!

167. (K) Bizonyítsd be, hogy két tetszőleges páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8 – cal!

168. (K) Bizonyítsd be, hogy három egész szám között mindig van kettő, amelyek összege osztható 2 – vel!

169. (E) Bizonyítsd be, hogy mindig kiválasztható négy páros természetes szám közül kettő úgy, hogy az összegük és a különbségük szorzata osztható legyen 12 – vel!

170. (E) Bizonyítsd be, hogy öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható 3 - mal!

171. (E) Bizonyítsd be, hogy a 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak az utolsó előtti jegye mindig páros! (A 3 – at és a 9 – et 03 – nak és 09 - nek tekintse!)

172. (E) Legyen A és B két olyan pozitív egész szám, amelyek összege 1000. Bizonyítsd be, hogy A^2 utolsó három számjegye egyenlő B^2 utolsó három számjegyével!

173. (E) Bizonyítsd be, hogy $n^3 - n$ osztható 6 – tal, ha n egy pozitív természetes szám!

174. (E) Bizonyítsd be, hogy $n^3 - n$ osztható 24 – gyel, ha n egy páratlan természetes szám!

175. (E) Bizonyítsd be, hogy $n^3 + 5n$ kifejezés minden n természetes szám esetén osztható 6 – tal!

176. (E) Bizonyítsd be, hogy $n^3 + 23n$ osztható 24 – gyel, ha n páratlan szám!

177. (E) Bizonyítsd be, hogy az $n^6 - n^2$ kifejezés, ahol n pozitív egész szám, osztható 60 – nal!

178. (E) Bizonyítsd be, hogy ha n egy 3 – nál nagyobb páratlan természetes szám, akkor $n^4 - 18n^2 + 17$ osztható 64 – gyel!

179. (E) Bizonyítsd be, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ osztható 120 – szal, ha n természetes szám!

180. (E) Legyenek n, k, m pozitív egész számok. Bizonyítsd be, hogy ekkor az $n \cdot k \cdot m \cdot (n^2 - k^2) \cdot (n^2 - m^2) \cdot (k^2 - m^2)$ osztható 120 – szal!

181. (E) Bizonyítsd be, hogy a $59^n \cdot (18^n - 1) \cdot (n^2 + 3n + 2)$ kifejezés minden pozitív egész esetén osztható 2006 – tal!

182. (E) Bizonyítsd be, hogy a $2^{n+1} \cdot 3^{2n+3} + 8 \cdot 7^{n+1}$ értéke osztható 11 – gyel! $(n \in \mathbb{N})$

183. (E) Bizonyítsd be, hogy $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ egész szám, ha n szintén egész szám!

184. (E) Bizonyítsd be, hogy $\frac{10^{4n-1}+2}{3} + \frac{10^{3n-3}+8}{9}$ egész szám, ha n pozitív egész szám!

185. (E) Bizonyítsd be a következő oszthatóságot!

$$10 \mid 2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 1$$

186. (E) Bizonyítsd be a következő oszthatóságokat!

A: $17 \mid 10^4 - 7^4$

B: $6 \mid 35^{987} - 29^{987}$

C: $23 \mid 15^{12345} + 123^{12345}$

D: $2014 \mid 2013^{2013} + 2015^{2015}$

E: $3 \mid 1516^{40} + 202^{50} + 400^{60}$

F: $3 \mid 2001^{2008} + 1848^{2007} - 1704^{2006}$

187. (E) Bizonyítsd be, hogy a $333^{444} + 444^{333}$ értéke osztható 7 – tel! $(n \in \mathbb{N})$

188. (E) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan derékszögű háromszög, amelynél két oldal mértékszáma páros szám és a harmadik oldal páratlan szám!

189. (E) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan derékszögű háromszög, amelynél mindhárom oldal mértékszáma páratlan természetes szám!

190. (E) Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan háromszög, amelynek oldalai különbözők és minden oldalának mérőszáma 2 – nek pozitív egész kitevőjű hatványa!

191. (E) Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög két befogójának mértékszáma nem lehet egyidejűleg páratlan egész szám, ha az átfogó is egész szám!

192. (E) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis a következő állítás!

A: A 3^{100} – on utolsó számjegye 9.

B: Az $1000!$ összesen 249 darab 0 – ra végződik.

C: A $\frac{19}{7}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2005. helyen 7 – es számjegy áll.

D: 11 darab, egyenként $1; 2; \dots; 10; 11\ kg$ súlyú csomagot három egyenlő súlyú részre lehet bontani.

E: Bármely pozitív egész n esetén $n^3 - n$ értéke osztható 3 – mal.

F: Bármely két egymás utáni páros szám szorzata osztható 6 - tal.

193. (E) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis a következő állítás!

A: Minden szám ötödik hatványában az utolsó számjegy megegyezik az eredeti szám utolsó számjegyével.

B: A $\frac{7}{17}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni 2010. helyen 8 – as számjegy áll.

C: Az $1; 2, \dots; 99; 100$ számok két csoportra oszthatók úgy, hogy minden számot valamelyik csoportba teszünk, a két csoportnak nincs közös eleme, és az egy - egy csoportban levő számok szorzata megegyezik.

D: Van olyan derékszögű háromszög, amelynek pontosan két oldala páratlan egész.

E: Bármely pozitív egész n esetén $n^5 - 5n^3 + 4n$ értéke osztható 5 – tel.

F: Bármely négy egymást követő egész szám összege osztható 2 – vel.

194. (E) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis a következő állítás! $(n \in \mathbb{N})$

A: $10^4 \mid 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 19$ **B: $5 \mid 6^{2009} + 7^{2008}$** **C: $10 \mid 37^{37} - 23^{23}$**

D: $5 \mid 2001^{2007} + 2002^{2006}$ **E: $10 \mid 426^{19} + 2^{58}$** **F: $11 \mid 888^3 - 800^3$**

G: $10 \mid 147^{2013} - 13^{2013}$ **H: $30 \mid 29^5 + 1$** **I: $6 \mid 17^{17} + 18^{18}$**

J: $10 \mid 1956^{2010} + 1982^{1982}$ **K: $6 \mid 13^6 - 12^6$** **L: $15 \mid 2^{4n} - 1$**

M: $5 \mid 5324^{2000} - 2371^{3000}$ **N: $6 \mid 17^8 - 11^8$** **O: $11 \mid 100^n - 1$**

P: $10 \mid 2012^{2012} + 2013^{2013} + 2014^{2014} + 2015^{2015}$

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 12; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(14) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2007.; Plusz 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából (emeltszint); Maxim Kiadó; Szeged

(18) Ruff János; 2016.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(22) Saját anyagok