Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Négyzetszámok, nevezetes számok

DEFINÍCIÓ: (Négyzetszám)
Az olyan egész számokat, amelyek felírhatók valamely egész szám négyzeteként, négyzetszámoknak nevezzük.

Példa: $0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; \dots$

Megjegyzés:

- *A négyzetszámok lehetséges végződései:* $0; 1; 4; 5; 6; 9$.
- *Minden négyzetszám prímtényezős felbontásában a kitevők páros számok.*
- *Két szomszédos négyzetszám különbsége mindig páratlan szám lesz.*

DEFINÍCIÓ: (Pitagoraszi számhármasok)
Pitagoraszi számhármasoknak nevezzük azokat az $x; y; z$ pozitív egész számokat, amelyekre az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet teljesül.

Példa: $(3; 4; 5); (6; 8; 10); (5; 12; 13); (7; 24; 25); \dots$

Megjegyzés:

- *Végtelen sok Pitagoraszi számhármas létezik.*
- *A Pitagoraszi számhármasok pozitív egész számú többszörösei is pitagoraszi számhármasok.*
- *Pitagoraszi számhármasok képzése: Az összes számhármas megkapható, ha* $x = m^2 - n^2$; $y = 2mn$; $z = m^2 + n^2$ *alakban írjuk fel, ahol* $m > n$ *és* m, n *pozitív egészek.*
- *Pitagoraszi számhármasok keresése: Írjuk fel a négyzetszámok sorozatát, majd ezek alá a szomszédos négyzetszámok különbségsorozatát. Amennyiben a különbségsorozatban négyzetszámot kapunk, akkor a fölötte álló két négyzetszámmal együtt Pitagoraszi számhármast kapunk.*
- *A Pitagoraszi számhármasokat szemléltethetjük egy derékszögű háromszög oldalaival.*

TÉTEL: (Fermat – tétel)
Az $x^n + y^n = z^n$ $(n = 3, 4, \dots)$ egyenletnek nincs olyan megoldása, ahol $x; y; z$ is egész szám.

DEFINÍCIÓ: (Ikerprímek)
Azokat a prímszámokat, amelyeknek különbsége 2, ikerprímeknek nevezzük.

Példa: $(3; 5); (5; 7); (11; 13); (17; 19); (29; 31); (41; 43); (59; 61); \ldots$

Megjegyzés:
Sejtés: Végtelen sok ikerprím létezik.

DEFINÍCIÓ: (Bővelkedő szám)
Az olyan számokat, amelyek pozitív osztóinak összege nagyobb, mint a szám kétszerese, bővelkedő számoknak nevezzük.

Példa: $12; 18; 20; 24; 30; 36; 40; 42; 48; 54; 56; 60; \ldots$

DEFINÍCIÓ: (Szűkölködő szám)
Az olyan számokat, amelyek pozitív osztóinak összege kisebb, mint a szám kétszerese, szűkölködő (vagy hiányos) számoknak nevezzük.

Példa: $1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 14; \ldots$

Megjegyzés:

- *Végtelen sok páros és páratlan szűkölködő és bővelkedő szám létezik.*
- *Minden szűkölködő szám prímszám, vagy prímszámok első hatványainak szorzata.*

DEFINÍCIÓ: (Tökéletes szám)
Az olyan számokat, amelyek pozitív osztóinak összege éppen a szám kétszerese, tökéletes számoknak nevezzük.

Példa: $6; 28; 496; 8128; 33\,550\,336; \ldots$

Megjegyzés:

- *A tökéletes számok osztói reciprokának összege* 2.
- *Minden páros tökéletes szám* 6 *- ra vagy* 8 *- ra végződik.*
- *Sejtés: Végtelen sok tökéletes szám létezik, illetve nincs páratlan tökéletes szám.*

DEFINÍCIÓ: (Barátságos számok)
Ha két számra teljesül, hogy az egyik önmagánál kisebb pozitív osztóinak összege éppen a másik szám és viszont, akkor ezeket barátságos számoknak nevezzük.

Példa: $(220; 284)$; $(1184; 1210)$; $(2620; 2924)$; $(5020; 5564)$; $(6232; 6368)$

Megjegyzés:
Ha két számra teljesül, hogy az egyik valódi osztóinak összege éppen a másik szám és viszont, akkor ezeket valódi barátságos számoknak nevezzük. Példa: $(48; 75)$; $(140; 195)$; ...

DEFINÍCIÓ: (Palindrom szám)
Azokat a pozitív egész számokat, ahol a számjegyeket fordított sorrendben felírva visszakapjuk az eredeti számot, palindrom számoknak nevezzük.

Példa: $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 22; 33; \ldots$

Megjegyzés:
A középső számjegy (páros darab számjegy esetén a középső két számjegy) tetszőleges számú megismétlésével kapott szám szintén palindrom szám lesz.

DEFINÍCIÓ: (Boldog szám)
Boldog számnak nevezzük azt a pozitív egész számot, amelyre teljesül a következő: kiszámítva a számjegyeinek négyzetösszegét, majd az így keletkező számnak ismét, az eljárás végén 1 – et kapunk eredményül.

Példa: $1; 7; 10; 13; 19; 23; 28; 31; 32; 44; 49; 68; \ldots$

Megjegyzés:

- *A hatnál nagyobb páros tökéletes számok boldog számok.*
- *Amennyiben a folyamat végeredménye nem* 1*, akkor a számot boldogtalannak nevezzük.*

DEFINÍCIÓ: (Boldog prímszám)
Azokat a prímszámokat, amelyek boldog számok, boldog prímeknek nevezzük.

Példa: $7; 13; 19; 23; 31; 79; 97; 103; 109; 139; 167; 193; \ldots$

DEFINÍCIÓ: (Pitagoraszi – prím)
Azokat a prímszámokat, amelyeket feltudjuk írni két négyzetszám összegeként, Pitagoraszi - prímeknek nevezzük.

Példa: $5; 13; 17; 29; 37; 41; 53; 61; 73; 89; 97; 101; 109; \dots$

Megjegyzés:

- *A Pitagoraszi – prímek általános alakja:* $4k + 1$.
- *A Pitagoraszi – prímek azok a páratlan* p *prímszámok, amelyekhez létezik olyan egész oldalú befogókkal rendelkező derékszögű háromszög, ahol az átfogó hossza* $\sqrt{p}$*. Ezen prímszámokhoz továbbá létezik olyan egész oldalú derékszögű háromszög is, amelynek átfogója* p *hosszúságú.*

DEFINÍCIÓ: (Egyiptomi tört)
Egyiptomi törtnek nevezzük az olyan törtet, amely számlálója 1.

DEFINÍCIÓ: (Mersenne - prím, Fermat - prím)
A $2^m - 1$ alakú prímeket Mersenne – prímeknek, a $2^m + 1$ alakú prímeket pedig Fermat – prímeknek nevezzük.

Példa: $3; 7; 31; 127; 8191; 131071; \dots$ (Mersenne – prímek)

Példa: $3; 5; 17; 257; 65\,537$ (Fermat – prímek)

Megjegyzés:

- *Mersenne - prímeknél a* $2^m - 1$ *alakban* m *is prímszám.*
- *Fermat - prímeknél a* $2^m + 1$ *alakban* $m = 2^k$ *alakú.*
- *Sejtés: Végtelen sok Mersenne – prím létezik.*
- *Összesen* 5 *darab Fermat – prím ismert.*

TÉTEL:
Az n páros szám pontosan akkor tökéletes szám, ha $n = (2^m - 1) \cdot 2^{m-1}$ alakú, ahol $2^m - 1$ Mersenne – prím.

TÉTEL: (Gauss – tétel)
A szabályos n szög $(n \geq 3)$ akkor és csak akkor szerkeszthető meg euklideszi módon (körzővel és vonalzóval), ha $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_r$ különböző Fermat – prímek.

<u>Jelölések, rövidítések:</u>

- Összegzés: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ (jele: szigma; ejtsd: szumma 1 – től n - ig)
- Szorzás: $\prod_{i=0}^{5} 2i = (2 \cdot 0) \cdot (2 \cdot 1) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 5)$ (jele: pí; ejtsd: produktum 0 – tól 5 - ig)

<u>Goldbach – féle problémakör:</u>

- Igaz - e, hogy minden 2 - nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként?
- Igaz - e, hogy minden 5 - nél nagyobb páratlan szám előáll három prímszám összegeként?

<u>Megjegyzés:</u>

- *Az első kérdés szerepel az* 1 000 000 *dolláros Milleniumi problémák között.*
- *Az elsőből következik a második állítás is, mert ha n egy páratlan szám, akkor felírható a következő alakban: $n = (n-3) + 3$, ahol $n - 3$ egy páros szám lesz.*

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Melyik lehet négyzetszám, ha a p, q, r különböző prímszámokat jelölnek?

A: $p^4 \cdot q^6 \cdot r^2$ **B:** $p^6 \cdot q^7 \cdot r^{12}$ **C:** $p^2 \cdot q^3 \cdot r^4$

2. (K) Melyik négyzetszám a következő számok közül?

A: $2^{1000} \cdot 3^{220} \cdot 11^8$ **B:** $5^{300} \cdot 7^{40} \cdot 98$ **C:** $2^8 \cdot 3^{16} \cdot 5^{20} \cdot 7^{100}$

D: $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ **E:** $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9$ **F:** $5^6 \cdot 7^8 \cdot 11^{13}$

G: $2^{2010} \cdot 3^{2009}$ **H:** $2^6 \cdot 5^4 \cdot 11^{10}$ **I:** $2^5 \cdot 3^4 \cdot 4^2 \cdot 6^3 \cdot 10^2 \cdot 75$

3. (K) A következő számok közül melyik négyzetszám?

A: $19\,600$ **B:** $232\,713$ **C:** $12\,345\,678$

D: $518\,400$ **E:** $176\,400$ **F:** $4\,840\,000$

G: $91\,125$ **H:** $860\,402$ **I:** $10^{2010} + 10^{1005} + 7$

4. (K) Hány négyzetszám osztója van a $75\,600$ – nak?

5. (K) Add meg 96 – nak azt a legkisebb többszörösét, melyre teljesül a következő feltétel!

A: osztható 10 – zel **B: osztható 30 – cal** **C: osztható 100 – zal**

D: négyzetszám **E: köbszám** **F: többszöröse 54 – nek is**

6. (K) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel az alábbi számot meg kell szoroznunk ahhoz, hogy négyzetszámot kapjunk? (p, q különböző prímszám)

A: 2	**B: 128**	**C: 364**
D: 450	**E: 4410**	**F: 5544**
G: $12\,600$	**H: $52\,800$**	**I: $4 \cdot p^4 \cdot q^6$**

7. (K) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel az alábbi számot meg kell szoroznunk ahhoz, hogy köbszámot kapjunk? (p, q különböző prímszám)

A: 72	**B: 360**	**C: 664**
D: 1080	**E: $10\,000$**	**F: $2 \cdot p^4 \cdot q^3$**

8. (K) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel az alábbi számot elosztva 1 – nél nagyobb négyzetszámot kapunk?

A: 504	**B: 4410**	**C: $21\,600$**
D: 360	**E: $16\,632$**	**F: $94\,500$**

9. (K) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amivel az 1400 – at megszorozva, vagy elosztva négyzetszámot kapunk?

10. (K) Igaz – e, hogy a $10^{2012} + 2021$ szám nem prímszám és nem is négyzetszám?

11. (K) Írd fel azt a hétjegyű négyzetszámot, amelynek számjegyei az $1; 2; 3; 4; 5; 7; 8$ számok, valamilyen sorrendben!

12. (K) Van - e olyan négyzetszám, amelynek számjegyei a $0; 2; 3; 5$ számok, valamilyen sorrendben?

13. (K) Melyek azok az egész számok, amelyeknek a köbe négyzetszám?

14. (K) Igaz – e, hogy ha egy természetes szám négyzetéhez 3 – at hozzáadunk, akkor az összeg sosem osztható 5 – tel?

15. (K) Egy természetes szám harmadik hatványa olyan hatjegyű természetes szám, amelynek első számjegye 2, utolsó 5. Melyik ez a szám?

16. (K) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyekre a következő négy állítás közül kettő igaz, kettő hamis?

A: osztható 5 – tel

B: osztható 23 – mal

C: 7 – tel nagyobb szám négyzetszám

D: 10 – zel kisebb szám négyzetszám

17. (K) Igaz – e, hogy ha egy n természetes szám osztója a k^2 négyzetszámnak, akkor n oztója k – nak is?

18. (K) Igaz – e, hogy két négyzetszám szorzata mindig négyzetszám?

19. (K) Egy börtönben 400 cella található, mindegyikben van egy – egy rab. A zárak úgy működnek, hogy egy fordításra zárnak, egy újabb fordításra nyitnak, és így tovább. Jelenleg minden zárka zárva van. A várúr a következőt parancsolja: az első őr fordítson minden záron egyet; ezt követően a második őr fordítson minden második záron egyet; a harmadik őr minden harmadik záron egyet; és így tovább a 400. őrig. Ezek után azt a rabot, amelynek ajtaja nyitva marad, szabadon engedi. Mennyien szabadulnak ki végül?

20. (E) Melyek azok az öt egymás utáni pozitív egész számok, amelyek közül az első 3 négyzetének összege egyenlő az utolsó kettő négyzetének összegével?

21. (E) Melyek azok a hét egymás utáni pozitív egész számok, amelyek közül az első 4 négyzetének összege egyenlő az utolsó három négyzetének összegével?

22. (E) Melyek azok a négy egymás utáni pozitív egész számok, amelyek közül az első 3 köbének összege egyenlő a negyedik köbével?

23. (E) Melyik a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelynek tízszerese négyzetszám, hatszorosa pedig köbszám? Hány pozitív osztója van?

24. (E) Egy ötjegyű szám osztható 7 – tel, 8 – cal és 9 – cel. Az első két számjegyből álló szám prímszám, eggyel nagyobb egy négyzetszámnál, s a két számjegy összege kétjegyű. Melyik ez az ötjegyű szám?

25. (E) Melyik az a legkisebb négyzetszám, amelyik 14 – re végződik?

26. (E) Van – e olyan négyzetszám, amely 90 – re végződik?

27. (E) Adj meg olyan négyzetszámot, amely 40 – re végződik!

28. (E) Van – e olyan négyzetszám, amelyben 2001 darab 1 – es és valamennyi 0 szerepel?

29. (E) Hány olyan természetes szám van, melynek négyzete 2019 darab 1 – esből és néhány 0 – ból áll?

30. (E) 2012 darab 1 - es és 5 darab 2 - es számjegyből leírjuk az összes lehetséges 2017 jegyű számot. Hány prímszám van a leírt számok között? Hány négyzetszám van a leírt számok között?

31. (E) Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amelyik nem változik, ha az egyesek és százasok helyén álló számjegyeket felcseréljük? Van - e közöttük négyzetszám?

32. (E) Azokat a számokat, amelyek fordított sorrendben leírva megegyeznek önmagukkal, palindrom számoknak nevezzük. Hány négyjegyű palindrom szám van? Közülük melyek négyzetszámok? Melyek köbszámok? Melyek prímszámok?

33. (E) Egy négyjegyű négyzetszám számjegyeit fordított sorrendben leírva olyan négyzetszámot kapunk, amely az eredetinek egész számszorosa. Mi volt az eredeti négyzetszám?

34. (E) Melyik az a háromjegyű szám, amelyik egyenlő számjegyei köbének összegével, és amelyről elmondhatjuk, hogy a nála eggyel nagyobb szám ugyancsak egyenlő számjegyei köbének összegével?

35. (E) Két négyzetszám összege osztható 3 - mal. Igaz – e, hogy mindkét négyzetszám osztható 9 - cel?

36. (E) Két négyzetszám összege osztható 4 – gyel. Mennyi a két négyzetszám négyes maradékának a szorzata?

37. (E) Milyen maradékot kapunk, ha egy négyzetszámot elosztunk 8 – cal?

38. (E) Igaz - e, hogy egy természetes szám négyzetét 12 – vel elosztva a maradék mindig négyzetszám lesz?

39. (E) Van – e olyan négyzetszám, amely 6 – tal osztva 2 – t ad maradékul?

40. (E) Van – e olyan négyzetszám, amely 7 – tel osztva 3 – at ad maradékul?

41. (E) Van - e olyan négyzetszám, amely 8 – cal osztva 3 – at ad maradékul?

42. (E) Lehet - e $2001^{2001} + 2002^{2002} + 2003^{2003}$ négyzetszám?

43. (E) Lehet - e $2^{2010} + 3^{2011} + 4^{2012} + 5^{2013}$ négyzetszám?

44. (E) Van – e olyan n természetes szám, amelyre a $4^{13} + 4^{1000} + 4^n$ négyzetszám?

45. (E) Melyek azok a p prímek, amelyek egy négyzetszámnál eggyel kisebbek?

46. (E) Határozd meg az összes olyan p prímet, amelyre $p^n + 1$ négyzetszám!

47. (E) Melyek azok a p prímszámok, amelyekre a következő kifejezés értéke köbszám?

A: $4p + 1$ **B: $6p + 1$** **C: $14p + 1$**

48. (E) Az $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű számok között van - e négyzetszám?

49. (E) Van – e olyan n jegyű szám, amelynek minden számjegye 2 – es és felírható két négyzetszám különbségeként?

50. (E) Határozd meg az összes $\overline{444 \ldots 4}$ alakú négyzetszámot!

51. (E) Határozd meg az összes $\overline{aabb}$ alakú négyjegyű négyzetszámot!

52. (E) Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeknek négyzetére $\overline{ab}^2 = \overline{acd}$, a fordítottjára pedig $\overline{ba}^2 = \overline{dca}$ teljesül?

53. (E) Mivel egyenlő $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2$, ha tudjuk, hogy négyzetszám?

54. (E) Az első n természetes szám négyzetének összege mikor osztható n – nel?

55. (E) Egy háromjegyű szám számjegyei különböző pozitív számok. Felírjuk mindazokat a háromjegyű számokat, amelyeknek ugyanezek a számjegyei. Igazold, hogy ezen számok összege nem lehet négyzetszám!

56. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely páratlan szám négyzetéből 1 - et elvéve 8 - cal osztható számot kapunk!

57. (E) Bizonyítsd be, hogy két tetszőleges páratlan szám négyzetének a különbsége osztható nyolccal!

58. (E) Bizonyítsd be, hogy 10 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa előállítható két négyzetszám összegeként!

59. (E) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan négyzetszám, amely 510 darab 1 – esből és néhány 0 – ból áll!

60. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy négyzetszámot elosztunk 16 – tal, akkor a maradék minden esetben négyzetszám lesz!

61. (E) Bizonyítsd be, hogy ha valamely természetes szám négyzete 6 – ra végződik, akkor a tízesek helyén páratlan szám áll!

62. (E) Bizonyítsd be, hogy ha két egész szám összege osztható 10 – zel, akkor a számok négyzetei ugyanarra a számjegyre végződnek!

63. (E) Bizonyítsd be, hogy 3 egymást követő természetes szám négyzetének összeg nem lehet négyzetszám!

64. (E) Bizonyítsd be, hogy 4 egymást követő természetes szám négyzetének összeg nem lehet négyzetszám!

65. (E) Bizonyítsd be, hogy 5 egymást követő természetes szám négyzetének összeg nem lehet négyzetszám!

66. (E) Bizonyítsd be, hogy 6 egymást követő természetes szám négyzetének összeg nem lehet négyzetszám!

67. (E) Bizonyítsd be, hogy 7 egymást követő természetes természetes szám négyzetének összeg nem lehet négyzetszám!

68. (E) Bizonyítsd be, hogy 9 egymást követő egész szám négyzetének összeg nem lehet prímszám és négyzetszám sem!

69. (E) Bizonyítsd be, hogy 4 egymás után következő természetes szám szorzatához 1 – et hozzáadva teljes négyzetet kapunk!

70. (E) Bizonyítsd be, hogy a $2^k + 3^k$ és a $5^k + 3^k$ semmilyen pozitív egész k – ra nem lehet négyzetszám! Igaz – e, hogy $7^k + 8^k$ szintén nem lehet négyzetszám?

71. (E) Legyenek $a; b; c; d$ olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy $a \cdot b = c \cdot d$. Bizonyítsd be, hogy ekkor a négy szám négyzetének összege nem lehet prímszám!

72. (E) Egyiptomi törtnek nevezzük az olyan törteket, amelyek számlálója 1. Bontasd fel két egyiptomi tört összegére az $\frac{1}{p}$ törtet, ahol p egy prímszám!

73. (E) Oldd meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán!

A: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ **B:** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$ **C:** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}$

74. (E) Oldd meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán!

A: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{11}$ **B:** $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{5}$ **C:** $\frac{1}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{7}$

75. (E) Oldd meg az alábbi egyenleteket a természetes számok halmazán!

A: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{7}$ **B:** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{11}$ **C:** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{19}$

76. (K) Vizsgáld meg 284 és 220 önmagánál kisebb összes pozitív osztójának összegét!

77. (K) Bizonyítsd be, hogy az 1184 és az 1210 barátságos számok!

78. (K) A $76\,084$ egy barátságos számpárnak egyik tagja. Határozd meg a másik számot!

79. (K) Bizonyítsd be, hogy a 496 és a 8128 tökéletes számok!

80. (K) Lehet – e prímszám tökéletes szám is?

81. (K) Döntsd el, hogy a $6; 10; 11; 12; 20; 28$ számok tökéletes / bővelkedő / szűkölködő (hiányos) számok - e!

82. (K) Melyek azok a kétjegyű négyzetszámok, amelyek szűkölködő, bővelkedő, illetve tökéletes számok?

83. (K) A 100 – nál kisebb prímszámok között mennyi szűkölködő, bővelkedő és tökéletes szám van?

84. (K) Melyik az a legnagyobb háromjegyű páros palindrom szám, amelyik nem változik meg, ha felcseréljük az egyesek és százasok helyén álló számjegyeit?

85. (K) Adj meg 5 darab Pitagoraszi - számhármast! Mennyi darab létezik?

86. (K) Figyeld meg a következő pitagoraszi számhármasokat: $3^2+4^2=5^2$; $5^2+12^2=13^2$; $7^2+24^2=25^2$; $9^2+40^2=41^2$. Milyen sejtés olvasható ki a példákból? Keress hasonló szerkezetű Pitagoraszi – számhármasokat!

87. (K) Írd fel 1 - től 50 - ig az ikerprímeket!

88. (K) Igaz – e, hogy az 50 és 100 közötti ikerprímpárok száma szintén prímszám?

89. (K) Mennyi darab ikerprím pár van 100 és 200 között?

90. (E) Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímek?

91. (E) A szabályos n - szögek közül melyek szerkeszthetők meg Euklideszi módon (körzővel és vonalzóval), ha $n=3; 4; \dots; 11$?

92. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely két, 3 – nál nagyobb ikerprímszám közötti egész szám osztható 6 – tal!

93. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely két, 3 – nál nagyobb ikerprímszám összege mindig osztható 12 – vel!

94. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy 5 – nél nagyobb ikerprímpár második tagjának 4 – szereséből 1 – et elveszünk, az eredmény nem lehet prímszám!

95. (E) Bizonyítsd be, hogy nincs olyan derékszögű háromszög, amely mindhárom oldalának mértéke egész szám, és befogói ikerprímek!

96. (E) Nevezzük „hármas - ikerprímeknek” az olyan prímszám hármasokat, amelyek közül az első kettő is, és az utolsó kettő is ikerprím. Bizonyítsd be, hogy a $3; 5; 7$ számhármason kívül nem léteznek ilyen hármas - ikerprímek!

97. (E) Bizonyítsd be, hogy minden pitagoraszi - számhármas valamelyik tagja osztható 5 – el!

98. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $x = 2mn; y = m^2 - n^2; z = m^2 + n^2$, akkor $x; y; z$ pitagoraszi számhármas!

99. (E) Figyeld meg a következő pitagoraszi számhármasokat: $3^2 + 4^2 = 5^2$; $20^2 + 21^2 = 29^2$; $119^2 + 120^2 = 169^2$. Bizonyítsd be, hogy ha $n^2 + (n+1)^2 = k^2$, akkor teljesül a következő: $(3n + 2k + 1)^2 + (3n + 2k + 2)^2 = (4n + 3k + 2)^2$!

100. (E) Legyen k olyan pozitív egész, amelyre $2^{k+1} - 1$ prímszám. Bizonyítsd be, hogy ekkor $2^k \cdot \left(2^{k+1} - 1\right)$ tökéletes szám!

101. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely $2^k \cdot \left(2^{k+1} - 1\right)$ alakú tökéletes szám osztói reciprokának összege mindig 2! ($2^{k+1} - 1 = p$ prím)

102. (E) Bizonyítsd be, hogy minden páros tökéletes szám 6 – ra, vagy 8 – ra végződik!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 12; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(14) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2007.; Plusz 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából (emeltszint); Maxim Kiadó; Szeged

(18) Ruff János; 2016.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(22) Saját anyagok