Relatív prímek, számok általános alakja, számrendszerek

DEFINÍCIÓ: (Relatív prímek)
Két, vagy több természetes számot relatív prímeknek nevezünk, ha a legnagyobb közös osztójuk 1. Jelölés: $(a, b) = 1$.

Megjegyzés:

- *Az elnevezés megtévesztő lehet, de a relatív prímek nem feltétlenül prímszámok.*
- *Példa relatív prímekre:* $(2; 3); (5; 8); (4; 9; 35); \ldots$

DEFINÍCIÓ: (Számelméleti függvény)
Az olyan függvényeket, melyek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, számelméleti függvényeknek nevezzük.

TÉTEL:
Ha n felírható $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r}$ alakban, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_n$ az n szám prímosztói, akkor megadhatóak a következő számelméleti függvények:

- az n szám osztóinak száma: $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1)$
- az n szám osztóinak összege: $\sigma(n) = \frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{{p_2}^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{{p_r}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$
- az n - nél nem nagyobb, n - hez relatív prímek száma:

  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot {p_1}^{\alpha_1-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot {p_2}^{\alpha_2-1} \cdot \ldots \cdot (p_r - 1) \cdot {p_r}^{\alpha_r-1}$

Megjegyzés:
Minden négyzetszámnak páratlan számú osztója van.

Számok általános alakja: $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N})$
Az adott szám általános alakja megmutatja, hogy egy természetes számmal osztva milyen maradékot ad, vagyis melyik maradékosztályba tartozik.

- Páros számok: $2k$
- Páratlan számok: $2k+1$ vagy $2m-1$
- Hárommal osztható számok: $3k$
- Hárommal osztva 1 maradékot adó számok: $3k+1$ vagy $3m-2$
- Hárommal osztva 2 maradékot adó számok: $3k+2$ vagy $3m-1$
- Néggyel osztható számok: $4k$
- Néggyel osztva 1 maradékot adó számok: $4k+1$ vagy $4m-3$
- Néggyel osztva 2 maradékot adó számok: $4k+2$ vagy $4m-2$
- Néggyel osztva 3 maradékot adó számok: $4k+3$ vagy $4m-1$

Számrendszerek:
A számrendszerek lényege a megfelelő csoportosítás: tízes alapú számrendszernél 10 – es csoportokat hozunk létre. A csoportosítással és a csoportok számának helyiérték szerinti felírásából alakult ki a mai írásmód. A helyiértékes ábrázolás azt jelenti, hogy a számjegyek értékén kívül a leírásuk helye is értékkel bír. Egymás után írjuk a számjegyeket és egy adott ponthoz viszonyítjuk a helyüket: tízes számrendszerben a helyek értékei a 10 megfelelő hatványai. Példa: $7345_{10} = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. Amennyiben a helyek értékei nem 10 hatványai szerint változnak, akkor más alapú számrendszerről beszélünk.

Példa: $12043_5 = 1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 898_{10}$

Megjegyzés:

- *A számrendszer alapja bármilyen* 1 - *nél nagyobb egész szám lehet.*
- *Az* n *alapú számrendszerben* n *különböző számjegyet használhatunk:* $0; 1; \ldots; n-1$.
- *A tízesnél nagyobb alapú számrendszerben a számjegyeket betűkkel helyettesítjük:* $A = 10;\ B = 11; C = 12; \ldots$
- *A számrendszer alapszámát indexként jelöljük, pl.:* 1203_4 *(ejtsd: egy-kettő-nulla-három, négyes alapú számrendszerben). A tízes számrendszerben az alapot nem tüntetjük fel.*

TÉTEL:
Legyen n egy 1 – nél nagyobb rögzített egész szám. Ekkor bármely A pozitív egész szám egyértelműen felírható a következő alakban: $A = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot n + a_0$, ahol $a_k \neq 0$ és $0 \leq a_i \leq n - 1$. Az A szám ilyen módon történő előállítását az A szám n alapú számrendszerben való felírásának nevezzük. Jelölés: $A = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_{0_n} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_{0_n}}$.

TÉTEL:
Egy tetszőleges g alapú számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható g - vel (illetve g osztóival), ha az utolsó számjegye osztható g - vel (illetve g osztóival).

TÉTEL:
Egy tetszőleges g alapú számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható $(g - 1)$ - gyel (illetve $(g - 1)$ osztóival), ha számjegyeinek összege osztható $(g - 1)$ - gyel (illetve $(g - 1)$ osztóival).

TÉTEL:
Egy tetszőleges g alapú számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható $(g + 1)$ - gyel (illetve $(g + 1)$ osztóival), ha a páros helyiértékű jegyeit és a páratlan helyiértékű jegyeit külön – külön összeadva olyan számokat kapunk, melyek különbsége osztható $(g + 1)$ - gyel (illetve $(g + 1)$ osztóival).

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Mely számok relatív prímek a következők közül?**

   A: $11; 14; 15; 18; \ 25$

   B: $3; 4; 6; 10; 15; 21; 28; 35; 42; 63$

   C: $5; 9; 10; 15; 21; 24; 35; 42; 55; 60; 72; 75; 102; 120; 150; 215$

2. **(K) Az alábbi párok közül melyek relatív prímek?**

   A: $(42; 68)$ **B:** $(54; 81)$ **C:** $(64; 128)$

   D: $(13; 3925)$ **E:** $(1582; 693)$ **F:** $(2728; 5457)$

3. **(K) Melyek azok a 20 – nál kisebb pozitív egész számok, amelyek relatív prímek a 20 – szal?**

4. **(K) Döntsd el, hogy a következő számhármasok közül melyek relatív prímek?**

   A: $(11; 22; 33)$ **B:** $(73; 124; 258)$ **C:** $(256; 487; 1024)$

   D: $(139; 586; 922)$ **E:** $(341; 440; 550)$ **F:** $(123; 345; 567)$

   G: $(207; 252; 345)$ **H:** $(231; 357; 609)$ **I:** $(100; 101; 1000)$

5. **(K) Az alábbi számok közül válaszd ki a relatív prím párokat! Van – e közöttük három olyan szám, amelyek relatív prímek?**

   A: $210; \ 297; \ 560; \ 800$ **B:** $572; 625; 2197; 6300; 9216$

6. **(K) Adj meg három olyan pozitív egész számot, amelyek legnagyobb közös osztója 1, de páronként nem relatív prímek!**

7. (K) Adj meg négy olyan pozitív egész számot, melyek relatív prímek, de közülük bármely kettő nem relatív prím!

8. (K) Mi a legnagyobb közös osztója, illetve a legkisebb közös többszöröse két olyan számnak, amelyek relatív prímek?

9. (K) Adott két relatív prímszám legkisebb közös többszöröse. Mi lehet ez a két szám?

A: $\mathbf{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$ **B:** $\mathbf{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$ **C:** $\mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

10. (K) Adott két pozitív egész relatív prím számpár tagjainak legkisebb közös többszöröse. Melyik lehet a két szám?

A: 180 **B: 256** **C: 392**

D: 637 **E: 2012** **F: 2600**

11. (E) Legyenek $\boldsymbol{a}$ **és** $\boldsymbol{b}$ **relatív prímek. Mivel egyenlő** $(\boldsymbol{a+b}; \boldsymbol{a-b})$**?**

12. (E) Legyen $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$**. Számítsd ki a** $(\mathbf{8}\boldsymbol{a} + \mathbf{3}\boldsymbol{b}; \mathbf{13}\boldsymbol{a} + \mathbf{4}\boldsymbol{b})$ **értékét!**

13. (E) Tudjuk, hogy a $\mathbf{13}\boldsymbol{n} + \mathbf{11}$ **és a** $\mathbf{10}\boldsymbol{n} + \mathbf{7}$ **pozitív egész számok nem relatív prímek. Mi lehet a legnagyobb közös osztójuk?**

14. (E) Határozd meg a 84 egység területű derékszögű háromszög oldalainak mértékszámát, ha tudjuk, hogy azok relatív prímek!

15. (E) Igazold, hogy ha $\boldsymbol{n}$ **egy** $\mathbf{3}$ **– mal osztható pozitív szám, akkor** $\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ **és** $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{3}}$ **relatív prím!**

16. (K) Bizonyítsd be, hogy bármely két szomszédos pozitív egész szám relatív prím!

17. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész n esetén $(2^n + 1; 2^n - 1) = 1$!

18. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész n esetén $(2^n + 1; 4^n + 1) = 1$!

19. (E) Bizonyítsd be, hogy ha a és b relatív prímek, akkor teljesül a következő!

A: $(a; a + b) = 1$ **B:** $(a; b^2) = 1$ **C:** $(a + b; b^2) = 1$

D: $(b; b - a) = 1$ **E:** $(a^2; a - b^2) = 1$

20. (K) Melyek azok a számok, amelyek osztóinak a száma páros, és melyek azok, amelyek osztóinak a száma páratlan?

21. (E) Mennyi osztójuk van a következő számoknak?

A: 32 **B: 93** **C: 60** **D: 125** **E: 256**

F: 400 **G: 500** **H: 825** **I: 1200** **J: 2100**

K: 2520 **L: 2700** **M: 10 000** **N: 10 428** **O: 17 820**

P: 18 612 **Q: 72 000** **R: 75 600** **S: 91 125** **T: 100 000**

22. (E) Melyik számnak van több osztója?

A: 300, vagy 380 **B: 1591, vagy 4891** **C: 360, vagy 3570**

23. (E) Mennyi osztójuk van a következő számoknak?

A: $2^3 \cdot 3$ **B:** $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ **C:** $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$

D: 2^7 **E:** $14^2 \cdot 20^4 \cdot 35^3$ **F:** $50^2 \cdot 42^3$

24. (E) Határozd meg $d(70)$ és $d(1848)$ értékét!

25. (E) Legyen $A = p^3 \cdot q \cdot r^4 \cdot t$ és $B = p^2 \cdot r^2 \cdot s \cdot t^2$, ahol p, q, r, s, t prímszámok. Hány pozitív osztója van $A \cdot B$ – nek és $A^3 \cdot B^2$ – nek?

26. (E) Hány osztópárjuk van a következő számoknak?

A: 18	**B: 36**	**C: 96**
D: 121	**E: 200**	**F: 576**

27. (E) Határozd meg a következő számok osztóinak szorzatát!

A: 16	**B: 72**	**C: 180**
D: 289	**E: 525**	**F: 625**

28. (E) Add meg a $2^{12} - 1$ pozitív osztóinak számát!

29. (E) Mennyi páratlan osztója van $252\,000$ – nek?

30. (E) Mennyi osztója van az $A = 6^3 \cdot 7^4 \cdot 8^5 \cdot 9^6$ számnak? Ezek között hány olyan van, amely osztható 14 – gyel?

31. (E) Mennyi osztója van $45\,000$ - nek? Ezek között hány olyan van, amely négyzetszám?

32. (E) Mennyi olyan pozitív osztója van 48 – nak, amelyik nem osztható 6 – tal?

33. (E) Mennyi olyan pozitív osztója van 120 – nak, amelyik nem osztható 4 – gyel?

34. (E) Határozd meg $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ – nek hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 15 – tel!

35. (E) Határozd meg $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ – nek hány olyan pozitív osztója van, amelyik nem osztható 21 – gyel!

36. (E) Legyen: $A = 3^x \cdot 5^2 \cdot 7$ és $B = 2^y \cdot 3^2 \cdot 7^3$. Tudjuk, hogy A – nak 24, B – nek pedig 60 osztója van. Határozd meg az x és az y értékét! Hány osztója van $A \cdot B$ – nek?

37. (E) Legyen az N természetes szám prímtényezős alakja: $N = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. Tudjuk, hogy az N háromszorosának 15 – tel, négyszeresének pedig 24 – gyel több osztója van, mint N – nek. Melyik ez az N szám?

38. (E) Az $A = 2^{x+3} \cdot 3^2 \cdot 5^{x+1} \cdot 7$ számnak 144 osztója van. Hány pozitív osztója van a $B = 6 \cdot A$ számnak?

39. (E) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek … darab osztója van?

A: 2	**B: 3**	**C: 4**	**D: 7**
E: 8	**F: 9**	**G: 11**	**H: 12**
I: 13	**J: 17**	**K: 18**	**L: 20**

40. (E) Adj meg három olyan természetes számot, amelynek 16 osztója van! Melyik a legkisebb ilyen szám?

41. (E) Egy természetes számnak 5 osztója van. Lehet - e ez a szám 6 – tal osztható?

42. (E) Melyik az a 100 – nál kisebb természetes szám, amelynek 5 osztója van?

43. (E) Van – e olyan kétjegyű szám, amelynek 10 osztója van?

44. (E) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 10 – zel és 10 osztója van?

45. (E) Határozd meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely osztható 42 – vel és pontosan 42 osztója van!

46. (E) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek osztója a 6, és 6 osztója van?

47. (E) Határozd meg azt a pozitív egész számot, amelynek 6 osztója van és a pozitív osztóinak szorzata $91\,125$!

48. (E) Legyen n természetes szám. Határozd meg az $A = n^3 + n^2 - 30n$ természetes számot úgy, hogy A – nak pontosan 8 osztója legyen!

49. (E) Határozd meg a p, q prímszámokat úgy, hogy az $n = p \cdot q^3 + q \cdot p^3$ számnak pontosan 12 osztója legyen!

50. (E) Melyik pozitív kétjegyű számnak van a legtöbb osztója?

51. (E) Hány olyan pozitív egész szám van, amelyik osztója a 10^{40} és 20^{30} számok valamelyikének?

52. (E) Egy 24 fős zenekar a sportpályán téglalap alakú alakzatban menetel (pl. 1×24; 24×1; 2×12; 3×8; stb.) Hány ilyen különböző téglalap alakú alakzat lehetséges? Legalább hány ember szükséges ahhoz, hogy négyféle, ötféle, tízféle téglalap alakú alakzatban meneteljenek?

53. (E) Egy sorban 50 doboz található. A dobozokba valaki beletesz $1 - 1$ golyót. Eztuán visszatér a sor elejére és minden másodikba tesz $1 - 1$ golyót. Ezt követően minden harmadikba, majd minden negyedikbe, s ezt egészen addig folytatja, amíg végül csak az utolsó dobozba tesz 1 golyót. Melyikben lesz a legkevesebb és a legtöbb golyó? Lesz – e olyan doboz, amibe 5 golyó kerül?

54. (E) Bizonyítsd be, hogy ha egy természetes számnak 6 osztója van, akkor ez a szám nem lehet 105 – tel osztható!

55. (E) Valamely N természetes számra teljesül, hogy $d(d(N)) = 3$. Bizonyítsd be, hogy ekkor N nem lehet osztható 30 – cal! Lehet - e 42 – vel osztható?

56. (E) Határozd meg a következő számok pozitív osztóinak összegét!

A: 19	**B: 81**	**C: 125**	**D: 128**
E: 196	**F: 240**	**G: 243**	**H: 256**
I: 540	**J: 640**	**K: 1988**	**L: 2025**

57. (E) Határozd meg a következő számok pozitív osztóinak összegét!

A: $2^8 \cdot 3^5$	**B:** $2^3 \cdot 3^2$	**C:** $5^4 \cdot 7$	**D:** $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

58. (E) Számítsd ki az $S\ (100)$ és az $S(1000)$ értékét!

59. (E) Számítsd ki az $\frac{S(672)}{672}$ és az $S(16) + S(18)$ értékét!

60. (E) Melyik nagyobb: $A = S(220) - 220$, vagy $B = S(284) - 284$?

61. (E) Igaz – e, hogy $2 \cdot S(12) = S(24)$?

62. (E) Határozd meg az adott számnál nem nagyobb, az adott számhoz relatív prímszámok számát!

A: 12	**B: 18**	**C: 25**
D: 450	**E: 650**	**F: 1986**

63. (E) Számítsd ki a $\varphi(2^5 \cdot 3^4)$ és a $\varphi(3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$ értékét!

64. (E) Milyen $n > 0$ egészre lesz páros, illetve páratlan a φ függvény értéke?

65. (E) Milyen pozitív egész x számra teljesül, hogy $\varphi(2^x) = 128$?

66. (E) Hány olyan nem egyszerűsíthető, 0 és 1 közötti tört van, amelynek nevezője 144?

67. (E) Határozd meg 324 és 750 összes osztójának számát, összes osztójának összegét, illetve a relatív prímek számát!

68. (K) Milyen számokat adhatnak meg a következő kifejezések? $(k \in \mathbb{Z}^+)$

A: $2k+1$ **B: $9k$** **C: $8k-3$**

D: $5k+2$ **E: $100k+23$** **F: $11k-11$**

69. (K) Add meg az összes pozitív egész számot, amelyekre teljesül a következő!

A: 4 – gyel osztva 1 – et adnak maradékul

B: 6 – tal osztva 5 – öt adnak maradékul

C: 7 – tel osztva 3 – mat adnak maradékul

D: 11 – gyel osztva 2 – t adnak maradékul

E: 15 – tel osztva 8 – at adnak maradékul

F: 19 – cel osztva 10 – et adnak maradékul

70. (K) Írd fel általános alakban a következő számokat!

A: a 3 – mal osztható pozitív egész számok, amelyek 7 – tel osztva 2 maradékot adnak

B: az 5 – tel osztva 4, 8 – cal osztva 6 maradékot adó pozitív egész számok

C: a 3 – mal osztva 2, 5 – tel osztva 3 maradékot adó pozitív egész számok

D: a 6 – tal osztva 3, 7 – tel osztva 5 maradékot adó pozitív egész számok

71. (K) Határozd meg a következő értékeket! $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N})$

A: $\mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ – nek a $\mathbf{10}$ – zel való osztási maradéka

B: $\mathbf{100}\boldsymbol{a} + \mathbf{10}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ – nek a $\mathbf{10}$ – zel való osztási maradéka

C: $\mathbf{1000}\boldsymbol{a} + \mathbf{100}\boldsymbol{b} + \mathbf{10}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ – nek az $\mathbf{1000}$ – rel való osztási maradéka

D: $\mathbf{100}\boldsymbol{a} + \mathbf{10}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ – nek a $\mathbf{100}$ – zal való osztási maradéka

E: $\mathbf{1000}\boldsymbol{a} + \mathbf{100}\boldsymbol{b} + \mathbf{10}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ – nek az $\mathbf{10}$ – zel való osztási maradéka

F: $\mathbf{1000}\boldsymbol{a} + \mathbf{100}\boldsymbol{b} + \mathbf{10}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ – nek az $\mathbf{100}$ – zal való osztási maradéka

72. (K) Ha egy szám 9 – cel való osztási maradéka $0; 1; \dots; 7; 8$, akkor mennyi a 3 – mal való osztási maradéka?

73. (K) Igaz - e, hogy minden páros szám kifejezhető a következő formában? $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z})$

A: $\mathbf{2}\boldsymbol{k} + \mathbf{4}$ B: $\mathbf{4}\boldsymbol{k} + \mathbf{2}$ C: $\mathbf{8}\boldsymbol{k} - \mathbf{1}$

D: $\mathbf{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{k}$ E: $\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}$ F: $\mathbf{6}\boldsymbol{k} + \mathbf{2}$

74. (K) Igaz - e, hogy minden páratlan szám kifejezhető a következő formában? $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z})$

A: $\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1}$ B: $\mathbf{2}\boldsymbol{k} + \mathbf{7}$ C: $\mathbf{4}\boldsymbol{k} + \mathbf{1}$

D: $\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{9}$ E: $\mathbf{2}\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1}$ F: $\mathbf{2}\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}$

75. (K) Igaz – e, hogy ha négy különböző természetes szám összege osztható néggyel, akkor legalább az egyik osztható néggyel?

76. (K) Igaz - e, hogy ha két szám mindegyike 3 – mal osztva 1 – et ad maradékul, akkor összegük, valamint szorzatuk 3 – mal osztva ugyancsak 1 – et ad maradékul?

77. (K) Igaz - e, hogy ha két szám mindegyike 3 – mal osztva 2 – t ad maradékul, akkor összegük, valamint szorzatuk is 2 – t ad maradékul 3 – mal osztva?

78. (K) Három természetes szám összege osztható 3 – mal. Lehetséges – e a következő?

A: egyik sem osztható 3 – mal

B: közülük pontosan egy szám osztható 3 – mal

C: közülük pontosan kettő osztható 3 – mal

D: mindhárom osztható 3 – mal

79. (K) Négy különböző egész szám összege osztható 4 – gyel. Lehetséges – e a következő?

A: egyik sem osztható 4 – gyel

B: az egyik osztható 4 – gyel, a másik három nem

C: kettő osztható 4 – gyel, kettő nem

D: három osztható 4 – gyel, egy nem

E: mindegyik osztható 4 – gyel

80. (K) Öt különböző egész szám összege osztható 5 – tel. Lehetséges – e a következő?

A: egyik sem osztható 5 – tel

B: az egyik osztható 5 – tel, a többi nem

C: kettő osztható 5 – tel, három nem

D: három osztható 5 – tel, kettő nem

E: négy osztható 5 – tel, egy nem

F: mindegyik osztható 5 – tel

81. (K) Igaz – e, hogy bármely négy egymást követő egész szám összege osztható 4 - gyel? Ha nem, akkor mennyi az összeg négyes maradéka?

82. (K) Igaz – e, hogy bármely öt egymást követő egész szám összege osztható 5 – tel? Ha nem, akkor mennyi az összeg ötös maradéka?

83. (K) Igaz – e, hogy bármely hat egymást követő egész szám összege osztható 6 – tal? Ha nem, akkor mennyi az összeg hatos maradéka?

84. (K) Milyen k pozitív egész szám esetén teljesül, hogy k darab egymást követő egész szám összege osztható k – val?

85. (K) Adott egy páros szám, amelyik 3 – mal osztva 2 – t ad maradékul. Mekkora maradékot ad 6 – tal osztva?

86. (K) Adott egy páratlan szám, amelyik 3 – mal osztva 2 – t ad maradékul. Mennyi lesz a maradék 6 – tal, illetve 12 – vel osztva?

87. (K) Milyen számjegyre végződnek a következő kifejezések? ($n \in \mathbb{N}^+$)

A: $10n + 4$ **B:** $10n + 32$ **C:** $5n + 1$ **D:** $5n - 3$

88. (E) Melyek jelölnek páros és melyek páratlan számokat? ($k, l, m \in \mathbb{Z}$)

A: $4k + 6$ **B:** $6k + 4$ **C:** $10k + 9$

D: $12k + 3$ **E:** $2k + 4l$ **F:** $2k + 4l + 5$

G: $10k + 6l - 2$ **H:** $2004k + 6l - 2005$ **I:** $(k + l)^2 + k^2 - l^2$

J: $(4k + 1)^2 + (4k - 1)^2$ **K:** $(2k - l)^2 - l \cdot (l + 2)$ **L:** $(k - l)^2 + l^2 - k^2$

M: $(2k - 3l)^2 - 3 \cdot (3l + 4k)$ **N:** $(2k - 4l + m)^2 - m \cdot (2 + m)$

89. (E) Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi számokat elosztjuk 3 – mal? ($a, b \in \mathbb{Z}$)

A: $3a + 12$ **B:** $6a + 20$ **C:** $9a + 3b + 2$ **D:** $6a + 3b - 1$

E: $(3a + b)^2 - b \cdot (b + 12)$ **F:** $(2a + 3b)^2 + a \cdot (2a - 3)$

G: $(5a + 2b)^2 - (a^2 + b^2) + ab$

90. (E) Mennyi maradékot kapunk, ha az alábbi számokat elosztjuk 7 – tel? $(x, y \in \mathbb{Z})$

A: $7x + 12$ **B:** $21x - 22$

C: $7x + 14y + 8$ **D:** $35x + 7y - 4$

E: $10x^2 + (2x - 1)^2 - 3x$ **F:** $(3x + 1)^2 + (2x - 1)^2 + x^2 + 5 \cdot (x + 1)$

91. (E) Milyen n szám esetén osztható 4 – gyel a következő kifejezés? $(n \in \mathbb{N}^+)$

A: $3n + 20$ **B:** $8n + 3$ **C:** $5n + 6$ **D:** $2n + 4$

92. (E) Adott két természetes szám. Az egyik 7 – tel való osztási maradéka 2, a másiké pedig 5. Mennyi a 7 – tel való osztási maradéka a következő műveletnek?

A: a két szám összege **B: a két szám szorzata**

C: az első szám négyzete **D: a második szám négyzete**

E: a két szám különbsége **F: az első szám köbe**

93. (E) Az n szám 4 – gyel osztva 1, a k szám 4 – gyel osztva 2 – t ad maradékul. Mennyi a maradéka 4 – gyel osztva a következő kifejezéseknek?

A: $n + k$ **B:** $k \cdot n$ **C:** $2n + k$

94. (E) Az n és k pozitív egészek 5 – tel való osztási maradéka 2, illetve 3. Mennyi maradékot adnak 5 – tel osztva a következő kifejezések?

A: $n + k$ **B:** $n - k$ **C:** $3n + k$

D: $n \cdot k$ **E:** $n^2 + k^2$ **F:** $k^2 - n^2$

95. (E) Az x természetes szám 11 – gyel osztva 5 maradékot ad, az y természetes szám 11 – gyel osztva 7 maradékot ad, a z természetes szám 11 – gyel osztva 10 maradékot ad. Mennyi maradékot adnak 11 – gyel osztva a következő kifejezések?

A: $x + y + z$ **B:** $x + 2y - z$ **C:** $x - y + 3z$ **D:** $2x - 3y + 4z$

E: $x \cdot y + z$ **F:** $x \cdot (y + z)$ **G:** $x^2 \cdot (y - z)$ **H:** $x \cdot (y^2 + z^2)$

96. (E) Mennyit adnak 7 - tel osztva maradékul a következő kifejezések, ha tudjuk, hogy n 7 - tel osztva 5 maradékot ad, míg k 7 - tel osztva 3 maradékot ad?

A: $n+k$	**B:** $n-k$	**C:** $2n+3k$	**D:** $5n-4k$
E: $n\cdot k$	**F:** n^2	**G:** k^2-6	**H:** $n\cdot(k+3)$
I: $n^2\cdot k^2$	**J:** $(n^2+1)\cdot(k^2+1)$	**K:** k^3	**L:** k^3-n^3

97. (E) Egy k szám 11 – gyel osztva 2, egy m szám pedig 3 maradékot ad. A $k+m$, vagy a $k\cdot m$ szám 11 – es osztási maradéka lesz a nagyobb?

98. (E) Egy a szám 3 - mal osztva 2, egy b szám 4 - gyel osztva 3 maradékot ad. Mennyi a maradéka az egyes számoknak, illetve a két szám összegének 12 – vel osztva?

99. (E) Melyek azok a kétjegyű egész számok, amelyeket 9 – cel osztva a hányados h, a maradék m, és 5 – tel osztva a hányados m, a maradék h?

100. (E) Melyek azok a háromjegyű számok, amelyeket 19 – cel osztva a hányados p, a maradék q, és 11 – gyel osztva a hányados q, a maradék p?

101. (E) Bizonyítsd be, hogy ha n és k olyan természetes számok, hogy mindkettő osztható 5 – tel, akkor $n+k$ és $n-k$ is osztható 5 – tel!

102. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $7 \mid 2a+3b$, akkor $7 \mid 20a+9b$!

103. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $17 \mid a+2b$, akkor $17 \mid 20a+6b$!

104. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $13 \mid 4a+7b$, akkor $13 \mid 33a+48b$!

105. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $7 \mid 12a+5b$, akkor $7 \mid 31a+24b$!

106. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $5 \mid 2a + 3b$, akkor $5 \mid 16a + 9b$!

107. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $17 \mid 2a + 9b$, akkor $17 \mid 33a + 89b$!

108. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $7 \mid 2a - 3b$, akkor $7 \mid 18a - 6b$!

109. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $17 \mid 2a + b$, akkor $17 \mid 19a + b$!

110. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $13 \mid 5a - 3b$, akkor $26 \mid 10a + 20b$!

111. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $23 \mid 5a + 9b$, akkor $23 \mid 3a + 10b$! Igaz – e fordítva?

112. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $11 \mid a + 2b + 3c$, akkor $11 \mid 3a - 5b - 2c$!

113. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $17 \mid a + b$, akkor $17 \mid b \cdot (2b + 3) + a \cdot (4b + 3) + 19a^2$!

114. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $13 \mid 2a - b$, akkor $13 \mid 12a \cdot (a - b) + 3b \cdot (5 + b) - 4a$!

115. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $17 \mid 5a - 4b$ és $17 \mid 9a + 3b$, akkor $17 \mid 11b - a$!

116. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $13 \mid 2a + b$ és $13 \mid 5a - 4b$, akkor $13 \mid a - 6b$!

117. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $29 \mid 3a + 8b$ és $29 \mid 2a - 5b$, akkor $29 \mid 11a - 12b$!

118. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $17 \mid 3a - 2b$ és $17 \mid 8a + b$, akkor $17 \mid 7b - a$!

119. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $8 \mid 3a + 4b$ és $8 \mid 2a + 5b$, akkor $8 \mid 16a + 33b$!

120. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $11 \mid a + b$ és $11 \mid 6a - 5b$, akkor $11 \mid 8a - 3b$!

121. (E) Bizonyítsd be, hogy két 3 – mal nem osztható egész szám összege, vagy különbsége osztható 3 – mal!

122. (E) Bizonyítsd be, hogy 3 egymást követő szám köbének összege osztható 9 – cel!

123. (E) Bizonyítsd be, hogy minden páratlan szám négyzete nyolccal osztva 1 - et ad maradékul!

124. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely 3 - mal nem osztható szám négyzetéből 1 - et levonva 3 - mal osztható számot kapunk!

125. (E) Bizonyítsd be, hogy két egymást követő páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8 – cal!

126. (E) Bizonyítsd be, hogy két egymást követő egész szám négyzetének különbsége páratlan szám!

127. (E) Bizonyítsd be, hogy egy 5 – tel osztva 4 maradékot adó szám négyzetének és egy 5 – tel osztva 1 maradékot adó szám négyzetének különbsége osztható 15 – tel!

128. (E) A p és q pozitív egész számok egyike sem osztható 3 – mal. Bizonyítsd be, hogy ekkor $p^2 - q^2$ osztható 3 – mal!

129. (E) Az n természetes szám nem osztható 5 – tel. Bizonyítsd be, hogy ekkor $n^4 - 1$ osztható 5 – tel!

130. (E) Bizonyítsd be, hogy $n^7 - n$ mindig osztható 7 – tel, ha n természetes szám!

131. (K) Írd át tízes számrendszerbe a kettes számrendszerben felírt számokat!

A: 10000_2	B: 111_2	C: 100111_2	D: 10011_2
E: 101010101_2	F: 1000_2	G: 10101_2	H: 11011001_2
I: 101101_2	J: 1100111_2	K: 1010_2	L: 1111_2
M: 10101011_2	N: 101011_2	O: 10101_2	P: 10111101_2

132. (K) Írd át tízes számrendszerbe az adott számrendszerben felírt számokat!

A: 102_6	B: 1110011_2	C: 31021_4	D: 4567_8
E: 123432_5	F: 122430_7	G: 52178_9	H: 1201_3
I: 511203_7	J: 11002_4	K: 210112_3	L: 56123_8
M: 10203_9	N: 10432_5	O: 2013045_6	P: 100110_2

133. (E) Írd át tízes számrendszerbe az adott számrendszerben felírt számokat!

A: $B6F_{16}$	B: CHB_{18}	C: $1A2_{11}$	D: ACB_{16}
E: $5A2F_{16}$	F: $1B0A_{12}$	G: $8C7_{15}$	H: $3DB_{14}$

134. (K) Írd át kettes számrendszerbe a tízes számrendszerben felírt számokat!

A: $10_{10} = \dots_2$	B: $56_{10} = \dots_2$	C: $100_{10} = \dots_2$	D: $2008_{10} = \dots_2$
E: $11_{10} = \dots_2$	F: $50_{10} = \dots_2$	G: $476_{10} = \dots_2$	H: $1956_{10} = \dots_2$
I: $15_{10} = \dots_2$	J: $112_{10} = \dots_2$	K: $143_{10} = \dots_2$	L: $200_{10} = \dots_2$
M: $44_{10} = \dots_2$	N: $101_{10} = \dots_2$	O: $279_{10} = \dots_2$	P: $1572_{10} = \dots_2$

135. (K) Írd át az adott számrendszerbe a tízes számrendszerben felírt számokat!

A: $348_{10} = \ldots_6$ B: $243_{10} = \ldots_2$ C: $1988_{10} = \ldots_8$ D: $4373_{10} = \ldots_5$

E: $5782_{10} = \ldots_8$ F: $3189_{10} = \ldots_4$ G: $21421_{10} = \ldots_7$ H: $100_{10} = \ldots_9$

I: $1516_{10} = \ldots_4$ J: $4567_{10} = \ldots_9$ K: $137_{10} = \ldots_3$ L: $1572_{10} = \ldots_7$

M: $1956_{10} = \ldots_5$ N: $241_{10} = \ldots_3$ O: $321_{10} = \ldots_2$ P: $3411_{10} = \ldots_6$

136. (K) Írd át 654 – et 8 as számrendszerbe, majd a kapott számot írd vissza ellenőrzésképp tízesbe!

137. (E) Add meg a 2651 – nek a 16 – os számrendszerbeli alakját!

138. (K) Írd át adott számrendszerbe az adott számrendszerben felírt számokat!

A: $2011_4 = \ldots_2$ B: $3251_6 = \ldots_4$ C: $12212_3 = \ldots_9$ D: $572_8 = \ldots_2$

E: $10010110_2 = \ldots_6$ F: $1343_5 = \ldots_7$ G: $10110011_2 = \ldots_4$ H: $112_3 = \ldots_2$

139. (E) Mennyi a CBA_{15} szám 4 - es számrendszerbeli alakja?

140. (E) Írd fel az $12\ 345\ 410$ számot százas számrendszerben!

141. (K) Írd fel növekvő sorrendben a következő számokat!

A: $11101_2; 110_3; 33_4; 104_5; 1010_6; 213_8$

B: $11110_2; 1010_3; 133_4; 111_5; 640_7; 875_9$

C: $1001_2; 102_3; 101_4; 23_5; 31_6; 22_7$

D: $101_2; 101_3; 20_4; 20_5; 10_8; 10_9$

142. (K) Melyik szám a nagyobb?

A: 1111101000_2**, vagy** 1101002_3

B: 13452_6**, vagy** 5673_8

C: 3333_5**, vagy** 333_6

D: 1101111000_2**, vagy** 1186_9

E: $213\ 230_4$ **vagy** $11\ 027_8$

F: 1233_4 **vagy** 3051_6

143. (K) Melyik nagyobb és mennyivel?

A: 110101_2**, vagy** 1010100_2

B: 1022_3**, vagy** 10001_3

C: 10000000_6**, vagy** 5555443_6

D: 1334_5**, vagy** 3412_5

E: 7^7**, vagy** 6666666_7

F: 220_4**, vagy** 220_5

144. (E) Melyik szám a nagyobb: $X = BABA_{12}$**, vagy** $Y = DAC_{14}$**?**

145. (K) Írd fel az A **számot 3 – as, a** B **számot pedig 9 - es számrendszerben!**

$A = 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1$

$B = 5 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^4 + 2 \cdot 9 + 7 \cdot 9^3 + 6$

146. (K) Írd fel az A **számot 3 – as, a** B **számot pedig 5 - ös számrendszerben!**

$A = 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 5$

$B = 3 + 5 \cdot \{1 + 5 \cdot [2 + 5 \cdot \{3 + 5 \cdot (2 + 5 \cdot 1)\}]\}$

147. (K) Írd fel a következő számokat kettes számrendszerben!

A: az 11011011_2 **– nél 1 – gyel nagyobb számot**

B: az 11011011_2 **– nél** 101_2 **– gyel nagyobb számot**

C: az 11011011_2 **kétszeresét**

D: az 11011011_2 **négyszeresét**

148. (K) Hogyan írható fel a kettes számrendszerben a 2, a hármas számrendszerben a 3, a négyes számrendszerben a 4 és az ötös számrendszerben az 5?

149. (K) A 2005 - öt írjuk át kettes számrendszerbe. Hány darab 0 számjegyet tartalmaz a kapott szám?

150. (K) Hány jegyű lesz a tízes számrendszerben felírt 3251 a kettes, a négyes, illetve a nyolcas számrendszerben?

151. (K) Hány különböző számjegy van a 2023 – as számrendszerben?

152. (K) Hány legfeljebb hatjegyű pozitív egész szám van a kettes számrendszerben?

153. (K) Hány legalább háromjegyű, de legfeljebb hatjegyű pozitív egész szám van a hatos számrendszerben?

154. (K) Hány olyan ötös számrendszerbeli ötjegyű szám van, amelyben minden számjegy különböző? Hány páros szám van közöttük?

155. (K) Hány darab négyjegyű természetesszám van a tízes, illetve az x alapú számrendszerben? Hány darab n - jegyű természetesszám van a tízes, illetve az x alapú számrendszerben?

156. (K) A matek tanár kettes számrendszerben írja rá a dolgozatokra az érdemjegyeket. Lili a témazárón a következő érdemjegyet látta: 101. Hányast kapott a dolgozatára? Jobbat kapott – e Olivér, akinek 100 van a dolgozatára írva?

157. (K) Egy teremben 7 lámpát helyeztek el egy sorban. A lámpák egy része működik (1), másik része hibás (0). Egy szerelő a világítás módját 10 – es számrendszerbeli szám megadásával kódolja. Balról jobbra olvasva, írd le a lámpák működési módját, ha a megadott kódszámok: $18; 49; 77$. Mekkora lehet a legnagyobb kódszám, amit a villanyszerelő megadhat?

158. (K) Ildi kedvenc száma a tízes számrendszerben a 11. Hány különböző kettes számrendszerbeli számot készíthet Ildi kedvenc számának kettes számrendszerbeli alakjának számjegyeiből, ha az összes számjegyet felhasználja?

159. (K) Rendelkezésünkre áll $1\ kg$ – os, $2\ kg$ – os, $4\ kg$ – os, $8\ kg$ – os és $16\ kg$ – os tömegekből egy – egy darb és egy kétkarú mérleg. Milyen tömegű tárgyakat tudunk lemérni, ha az ismert tömegeket az egyik serpenyőbe helyezzük?

160. (K) Mekkora tömegű tárgyakat tudunk lemérni egy kétkarú mérleggel, ha egy – egy $1\ kg$ – os, $3\ kg$ – os, $9\ kg$ – os és $27\ kg$ – os tömegünk van, de azokat bármelyik serpenyőbe rakhatjuk?

161. (E) Írd fel 5 – ös számrendszerben a következő számokat!

A: $1; 5; 10; 15; 22; 5^5; \left(\frac{1}{5}\right)^{-4}; 53,456$

B: $44; 100; 321; 3189; 5782; 5^7; 25^2; 0,04$

162. (E) Írd fel tízes számrendszerben a kettedestörteket!

A: $0,101_2$ **B:** $0,1101101_2$ **C:** $11,11_2$ **D:** $1011,001_2$

E: $101,111_2$ **F:** $10,001_2$ **G:** $1,111_2$ **H:** $0,1001_2$

163. (E) Írd fel tízes számrendszerben a következő számokat!

A: $13,26_8$ **B:** $342,031_5$ **C:** $203,13_4$ **D:** $2,21_3$

E: $41,23_5$ **F:** $23,32_4$ **G:** $11,11_3$ **H:** $A7,6_{16}$

164. (E) Írd fel a tizedestörteket kettedestört alakban!

A: $0,5$ **B:** $0,75$ **C:** $0,1875$ **D:** $1,25$

E: $1,4375$ **F:** $1,875$ **G:** $3,125$ **H:** $6,625$

165. (E) Melyik számrendszerben értelmezhető vesszős törtként a következő összeg: $2 \cdot 9 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{81}$**?**

166. (E) Milyen alapú számrendszerben teljesülnek a következők?

A: $\mathbf{50_{10} = 101_x}$ **B:** $\mathbf{354_{10} = 542_x}$ **C:** $\mathbf{302_{10} = 456_x}$

D: $\mathbf{333_{10} = 654_x}$ **E:** $\mathbf{57\,896_{10} = 3\,323\,041_x}$ **F:** $\mathbf{101_{10} = 10\,202_x}$

167. (E) Milyen alapú számrendszerben teljesülnek a következők?

A: $\mathbf{2011_3 = 72_x}$ **B:** $\mathbf{34_6 = 20_x}$ **C:** $\mathbf{1034_5 = 100_x}$

D: $\mathbf{1\,101\,110_2 = 110_x}$ **E:** $\mathbf{1241_5 = 304_x}$ **F:** $\mathbf{41_8 = 201_x}$

168. (E) Az $\mathbf{10\,110\,001_2}$ szám milyen prímszám alapú számrendszerben írható $\mathbf{342_x}$ alakban?

169. (E) Milyen alapú számendszerben lesz kettőnek egymás után következő hatványa a $\mathbf{13_x}$ és a $\mathbf{31_x}$?

170. (E) Van - e olyan számrendszer, amelyben $\mathbf{45_x}$ és $\mathbf{55_x}$ egymást követő egész számok?

171. (E) Milyen számrendszerben igazak a következő kijelentések?

A: A villának $\mathbf{11}$ ága van. **B: Hófehérkének $\mathbf{12}$ törpéje van.**

C: A nyúl $\mathbf{100}$ lábú állat. **D: A póknak $\mathbf{22}$ szeme van.**

172. (E) Egy számrendszerben $\mathbf{4^2 = 20}$. Mennyi ebben a számrendszerben $\mathbf{5^2}$?

173. (E) Egy számrendszerben $\mathbf{3^2 = 11}$. Mennyi ebben a számrendszerben $\mathbf{4^2}$; $\mathbf{5^2}$; $\mathbf{6^2}$; $\mathbf{7^2}$? Lehet - e értelmezni ebben a számrendszerben $\mathbf{9^2}$ – t?

174. (E) Zoli szerint az $\mathbf{1526}$ kisebb $\mathbf{1000}$ – nél. Milyen számrendszerben lehet felírva az $\mathbf{1526}$, ha az $\mathbf{1000}$ tízes számrendszerben felírt szám?

175. (E) Add meg az x értékét úgy, hogy fennálljon az egyenlőség!

A: $12_x + 34_x = 50_x$	B: $11_x + 11_x = 110_x$	C: $13_x + 24_x = 40_x$
D: $76_x - 37_x = 39_x$	E: $1132_x - 313_x = 314_x$	F: $2000_x - 2_x = 1332_x$
G: $12_x \cdot 21_x = 252_x$	H: $23_x \cdot 3_x = 71_x$	I: $13_x \cdot 2_x = 30_x$
J: $55_x : 13_x = 4_x$	K: $121_x : 11_x = 11_x$	L: $1520_x : 12_x = 123_x$
M: $(6_x)^2 = 51_x$	N: $(8_x)^2 = 54_x$	O: $(13_x)^2 = 301_x$

176. (E) Igaz – e, hogy minden számrendszerben teljesül a következő: $11_x + 11_x = 22_x$?

177. (E) Van – e olyan $x > 1$ egész szám, amelyre egyszerre teljesülnek a következő egyenlőségek: $37_x + 28_x = 66_x$ és $320_x - 233_x = 21_x$?

178. (E) Végezd el az alábbi műveleteket!

A: $124_5 + 213_5$	B: $2323_7 + 4344_7$	C: $1001_2 + 101_2$
D: $230_4 + 123_4$	E: $134_6 + 245_6$	F: $32102_5 + 14213_5$
G: $321_4 - 213_4$	H: $164225_9 - 34112_9$	I: $45210_8 - 14401_8$

179. (E) Végezd el az alábbi műveleteket!

A: $243_6 \cdot 512_6$	B: $3201_5 \cdot 32_5$	C: $230_4 \cdot 120_4$
D: $21_3 \cdot 12_3$	E: $112_5 \cdot 340_5$	F: $123_6 \cdot 1001_6$
G: $55_6 \cdot 55_6$	H: $35_7 \cdot 101_7$	I: $123_4 \cdot 10_4$

180. (E) Végezd el az alábbi műveleteket!

$A = 3421_5 + 210324_5 + 20123_5$

$B = 11110_2 + 11101_2 + 11011_2 + 10111_2$

181. (E) Igaz - e, hogy $1212_3 + 1313_4 + 1414_5 + 1515_6 + 1616_7 = 2\,000\,002_3$?

182. (E) Keresd meg a hibát az alábbi összeadásban: $3124_5 + 10232_5 = 14411_5$! Add össze helyesen a számokat!

183. (E) Melyik nagyobb: $A = 101_2 \cdot 11_2$, vagy $B = 111_2 \cdot 10_2$?

184. (E) Az 11110_2 számot bontsuk fel a 10 – es számrendszerbeli prímtényezők szorzatára!

185. (E) Milyen számjegyeket írhatunk az x, y, z betűk helyére, hogy igaz legyen a következő összeadás: $1y341_5 + 213x_5 = 200z0_5$?

186. (E) Igaz – e, hogy ha $abc_5 + 123_5 = 224_5$, akkor $abc_5 + 111_5 = 212_5$?

187. (E) Legfeljebb hány jegyű szám lehet két háromjegyű pozitív szám összege a hatos számrendszerben? Legfeljebb hány jegyű szám lehet két háromjegyű pozitív szám szorzata a hatos számrendszerben?

188. (E) Válaszd ki a következő számok közül azokat, amelyek oszthatók a számrendszer alapszámával, illetve az alapszám osztóival!

A: 1001_2	B: 212_3	C: 5100_6
D: 48956_{12}	E: 40020_6	F: 2450_{15}
G: 111114_8	H: 76546_9	I: 4152_8
J: 11112_4	K: 2460_7	L: 1234_5

189. (E) Osztható - e 17 - tel, 16 - tal, 15 - tel, 12 - vel, 10 - zel, 8 - cal, 6 - tal, 5 - tel, 4 - gyel, 3 - mal vagy 2 - vel a 930516_{16} szám?

190. (E) Az alábbi számok közül melyik osztható nyolccal?

A: $\mathbf{10113_4}$ **B:** $\mathbf{2212_4}$ **C:** $\mathbf{3304_4}$

D: $\mathbf{123\,020_4}$ **E:** $\mathbf{210\,332_4}$ **F:** $\mathbf{221\,200_4}$

191. (E) Osztható - e $\mathbf{27}$ – tel a $\mathbf{34\,780\,160_9}$ szám?

192. (E) Igaz - e, hogy a $\mathbf{231\,504_7}$ szám osztható $\mathbf{24}$ – gyel?

193. (E) Igaz - e, hogy ha egy $\mathbf{7}$ - es számrendszerben felírt szám számjegyeinek összege $\mathbf{18}$, akkor a szám osztható $\mathbf{6}$ – tal?

194. (E) A $\mathbf{6}$ - os számrendszerben melyik számok oszthatók $\mathbf{5}$ – tel?

195. (E) Melyik számmal osztható az a $\mathbf{8}$ - as számrendszerben felírt szám, amely $\mathbf{4}$ – re végződik? Melyik számmal osztható az a $\mathbf{12}$ - es számrendszerben felírt szám, amely $\mathbf{6}$ – ra végződik? Melyik számmal osztható az a $\mathbf{6}$ - os számrendszerben felírt szám, amely $\mathbf{3}$ – ra végződik?

196. (E) A $\mathbf{9}$ – es számrendszerben melyik számmal való oszthatóságról árulkodik a számjegyek összege?

197. (E) Hogyan ismerjük fel egy szám alakjáról $\mathbf{2}$ - s számrendszerben, hogy $\mathbf{2}$ – vel, $\mathbf{4}$ – gyel, $\mathbf{8}$ – cal osztható?

198. (E) Melyek a páros számok a kettes, a hármas, a négyes és az ötös számrendszerben?

199. (E) Ha $\boldsymbol{aaabb_5}$ páros szám és $\boldsymbol{aabbb_5}$ páratlan szám, akkor $\boldsymbol{aaabbb_5}$ páros, vagy páratlan szám?

200. (E) Milyen maradékot adhat 2 – vel osztva az alábbi három szám?

A: $xxyy_7$	**B:** $xyxy_7$	**C:** $xxxyy_7$

201. (E) Melyik szám páros a következők közül?

A: 123_4	**B:** $111\,111_2$	**C:** $111\,111_3$
D: 2010_4	**E:** 1010101010_5	**F:** 8652076_9
G: 121010011212_4	**H:** 4210_6	**I:** $1\,101\,101_5$
J: 1234567_8	**K:** 1357_9	**L:** 12345_7
M: $23\,210\,312\,341\,523_9$	**N:** 10110_2	**O:** 4324_5
P: 20121_3	**Q:** 4531_6	**R:** 6789_{11}

202. (E) Mennyi maradékot kapunk, ha az $A = 435214_6$, illetve a $B = 23012_4$ számot 5 – tel osztjuk?

203. (E) Mennyi lehet az x értéke, hogy a következő számok oszthatók legyenek 4 – gyel?

A: $2310x2_5$	**B:** $23x4_5$	**C:** $12x3_5$
D: $72x_8$	**E:** $3x33_8$	**F:** $2x01_3$

204. (E) Mennyi lehet az x értéke, hogy teljesüljön a következő oszthatóság?

A: $3 \mid 5433x_6$	**B:** $2 \mid 1010x_2$	**C:** $2 \mid 324x2_5$
D: $2 \mid 132x2_4$	**E:** $3 \mid 310x2_4$	**F:** $6 \mid 20x0_3$

205. (E) Mennyi lehet az x értéke, hogy teljesüljön a következő oszthatóság?

A: $28 \mid 2465x_8$	**B:** $24 \mid 1827x_9$	**C:** $42 \mid 10203x_7$

206. (E) Milyen számjegyet írjunk az ismeretlen helyére, hogy az $1x3_{11}$ szám osztható legyen 5 – tel, illetve 18 – cal?

207. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy teljesüljön a következő oszthatóság?

A: $15 \mid 1x2y_4$ **B: $10 \mid 3x45y_6$** **C: $14 \mid 47x3y_8$**

D: $12 \mid 237xy_9$ **E: $56 \mid 31x52y_8$** **F: $33 \mid 392xy_{12}$**

208. (E) Mennyi lehet az $x; y; z$ értéke, hogy az $1xy3z_5$ szám osztható 20 – szal?

209. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy a $250x2y_8$ szám osztható 16 – tal?

210. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy a $41x6y0_9$ szám osztható 27 – tel?

211. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy a $325xy_6$ osztható legyen a következővel?

A: 2 – vel **B: 3 – mal** **C: 5 – tel** **D: 6 – tal** **E: 36 – tal**

212. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy a $470xy_8$ osztható legyen a következővel?

A: 2 – vel **B: 4 – gyel** **C: 7 – tel** **D: 8 – cal** **E: 64 - gyel**

213. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy a $8A7xEy_{16}$ osztható legyen a következővel?

A: 3 – mal **B: 5 – tel** **C: 15 – tel** **D: 16 – tal** **E: 256 - tal**

214. (E) Mennyi lehet az x és az y értéke, hogy a $52x0y_9$ osztható legyen a következővel?

A: 2 – vel **B: 3 – mal** **C: 4 – gyel**

D: 8 – cal **E: 9 – cel** **F: 81 - gyel**

215. (E) Határozd meg a számrendszer x alapszámát, ha 1111_x szám osztható 5 – tel!

216. (E) Melyik az a számrendszer, amelyben 4634 – et 555 – tel osztva hányadosul 5 – t, maradékul 530 – at kapunk?

217. (E) Milyen alapú számrendszerben igaz az, hogy ha 4616 – ot elosztjuk 66 – tal a hányados 55 és a maradék 20?

218. (E) Egy szám a tízes számrendszerben $\overline{aaa}$ alakú. Ugyanezen szám számjegyei egy másik számrendszerben, ebben a sorrendben $4a, 2a, a$. Melyik ez a szám?

219. (E) Add meg a $\overline{0,abc_7}$ tizedes törtet, amelynek tízes számrendszerbeli alakja $\frac{176}{343}$!

220. (E) Határozd meg az a és a b értékét, ha tudjuk, hogy a tizenegyes számrendszerben $\overline{a0b}$, a kilences számrendszerben pedig $\overline{b0a}$ alakban felírt számok megegyeznek!

221. (E) Határozd meg azt a 9 – es számrendszerben felírt háromjegyű számot, amelyet a 7 – es számrendszerben ugyanazokkal a számjegyekkel írhatunk le, csak fordított sorrendben!

222. (E) A 740 – et az x alapú számrendszerbe átszámítva olyan négyjegyű számot kapunk, amelynek utolsó jegye 5. Határozd meg az x értékét és a hiányzó jegyeket!

223. (E) Az x (10 – nél nem nagyobb) alapú számrendszerben határozd meg a négyjegyű $\overline{aabb_x}$ számot úgy, hogy az négyzetszám legyen, ha $x + 1$ prímszám!

224. (E) Van - e olyan x alapú számrendszer, amelyben a következő számok prímek?

A: 121_x B: 10201_x C: 10101_x D: 101010_x E: 12221_x

225. (E) Lehet - e egy legalább négyjegyű, páros sok 1 – esből álló szám prímszám valamilyen számrendszerben?

226. (E) Milyen x – re lesz 1331_x négyzetszám? Ha p egy 3 – nál nagyobb prímszám, akkor lehet - e 1331_p négyzetszám?

227. (E) Van - e prímszám azon 9 – es számrendszerbeli kilencjegyű számok között, amelyekben minden számjegy különböző?

228. (E) Van - e prímszám azon 7 – es számrendszerbeli hétjegyű számok között, amelyekben minden számjegy különböző?

229. (E) Ha egy szám 5 – re vagy 6 – ra végződik valamely n – alapú számrendszerben, akkor nem tudjuk eldönteni, hogy a szám összetett szám - e, vagy sem. Tudjuk, hogy a számrendszer alapszáma 13 – nál kisebb. Melyik lehet ez a számrendszer?

230. (E) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 8 – as számrendszerben felírva 3 – ra, 9 – es számrendszerben felírva pedig 4 – re végződik?

231. (E) Igaz - e, hogy minden $abab_3$ szám a tízes számrendszerben 0 – ra végződik?

232. (E) Hányszorosára nő az x alapú számrendszerben felírható pozitív egész szám, ha a végére egy 0 – t, két 0 – t, illetve három 0 – t írunk?

A: $x = 2$ **B: $x = 5$** **C: $x = 7$**

233. (E) Írd fel az $(n + 1)^2$ – t n alapú számrendszerben!

A: $n = 2$ **B: $n = 3$** **C: $n > 3; n \in \mathbb{Z}$**

234. (E) Oldd meg a következő egyenletet: $ab_x \cdot ab_x = abab_x$!

235. (E) Oldd meg a következő egyenletet: $a_x + a0_x + a00_x + a000_x = 2000_{10}$!

236. (E) Oldd meg a következő egyenletet: $2ab0_4 = c2d3_5$!

237. (E) Bizonyítsd be, hogy egy páratlan alapú számrendszerben felírt egész szám akkor és csak akkor páratlan, ha páratlan sok páratlan számjegyet tartalmaz!

238. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely $x > 3$ természetes szám esetén az 1320_x szám osztható 6 – tal!

239. (E) Bizonyítsd be, hogy minden $x > 5$ egész számra $100040_x - 5000_x$ szám osztható 120 – szal?

240. (E) Bizonyítsd be, hogy 144_x tetszőleges 4 – nél nagyobb x alapú számrendszerben teljes négyzet!

241. (E) Bizonyítsd be, hogy $14\,641_n$ négyzetszám minden 6 – nál nagyobb n – re!

242. (E) Bizonyítsd be, hogy 1331_x tetszőleges $x > 3$ alapú számrendszerben teljes köb!

243. (K) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis a következő állítás!

A: 2563 – nak a 100 – zal való oszási maradéka 63.

B: $13\,625$ – nek az 1000 – rel való osztási maradéka 625.

C: Ha két szám között a különbség 2, akkor relatív prímek.

D: Ha a és b relatív prímek, b és c is relatív prímek, akkor a és c is relatív prímek.

E: Ha $(a; b) = 1, (b; c) = 1$ és $(a; c) = 1$, akkor $(a; b; c) = 1$.

F: Ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörösük a két szám szorzata.

G: A 7 – es számrendszerben felírt számban legfeljebb 6 különböző számjegy állhat.

H: Van olyan tízes számrendszerbeli szám, amelynek az értéke az ötösben 12345_5.

244. (K) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis a következő állítás! $(x; y \in \mathbb{Z}^+)$

A: Az $x - 2y$ kifejezés értéke páratlan, ha x páros és y páratlan.

B: Az $5x + 3y$ kifejezés értéke páratlan, ha x páros és y páratlan.

C: A $7x$ kifejezés értéke páratlan, ha x páros.

D: Az x^2 kifejezés értéke osztható 4 – gyel, ha x páros.

E: A $3x + 2$ kifejezés értéke 3 – mal osztva 2 maradékot ad.

F: A $11y - 9$ kifejezés értéke 11 – gyel osztva 2 maradékot ad.

G: Az $x \cdot y$ kifejezés értéke osztható 4 – gyel, ha x és y is páros.

H: Ha $(a; b) = 1$, akkor bármely k pozitív egészre $(a; k \cdot b) = 1$.

245. (E) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis a következő állítás!

A: Ha x hetes maradéka 2, és y hetes maradéka 4, akkor $7 \mid 4x + 5y$.

B: Ha $(a; b) = d > 1$, akkor $\left(\frac{a}{b}; \frac{b}{d}\right) = 1$.

C: Minden pozitív egész szám előállítható a 2 különböző nem negatív egész kitevőjű hatványainak összegeként.

D: Minden pozitív egész szám előállítható a 3 különböző nem negatív egész kitevőjű hatványainak összegeként.

E: A legkisebb pozitív egész szám, amelynek 5 osztója van, az a 16.

F: A legkisebb pozitív egész szám, amelynek 6 osztója van, az a 32.

G: A legkisebb pozitív egész szám, amelynek 10 osztója van, az a 48.

H: Van olyan x és y természetes szám, amelyre teljesül, hogy a 17 osztója a $(20x - 11y)$ – nak, de nem osztója a $(46x + 7y)$ – nak.

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 12; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(14) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2007.; Plusz 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából (emeltszint); Maxim Kiadó; Szeged

(18) Ruff János; 2016.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(22) Saját anyagok