Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

# Bizonyítások

**Bizonyítási módszerek:**

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely $k$ természetes számra igaz az állítás (a $k$ létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság $k$ – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van $n$ darab sktulyánk, és ezekbe $n$ - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az $n$ skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe $k$ – nál több dolog kerül.

**TÉTEL:**
Egy tetszőleges $g$ alapú számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható $g$ - vel (illetve $g$ osztóival), ha az utolsó számjegye osztható $g$ - vel (illetve $g$ osztóival).

Bizonyítás:
Tekintsünk egy tetszőleges $A$ számot, s írjuk fel a helyiértékek segítségével a következő alakban: $A = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + a_1 \cdot g^1 + a_0 \cdot g^0$ (ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ a számjegyeket jelölik).

Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$A = g^1 \cdot (a_n \cdot g^{n-1} + a_{n-1} \cdot g^{n-2} + \dots + a_2 \cdot g^1 + a_1 \cdot g^0) + a_0.$$

Mivel a zárójeles kifejezés $g$ - vel szorozva biztosan osztható lesz $g$ - vel és $g$ osztóival, ezért az $A$ szám csak akkor lesz osztható $g$ - vel, illetve $g$ osztóival, ha a zárójel után álló tag is osztható $g$ - vel, illetve $g$ osztóival.

A zárójel után álló tagot megvizsgálva azt kapjuk, hogy az éppen az $A$ szám utolsó számjegye.

Ezek alapján az $A$ szám csak akkor osztható $g$ - vel, illetve $g$ osztóival, ha a szám utolsó számjegye osztható $g$ - vel, illetve $g$ osztóival.

■