Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Ha egy szám osztója egy összeg minden tagjának, akkor osztója az összegnek is.

Bizonyítás:
Ha az a szám osztja a b számot, akkor a b felírható a következő alakban: $b = k \cdot a$.

Ha az a szám osztja a c számot, akkor a c felírható a következő alakban: $c = m \cdot a$.

Ebből a következő adódik: $b + c = k \cdot a + m \cdot a = (k + m) \cdot a$.

Ezek alapján a $(b + c)$ összeg is osztható lesz a – val.

■

TÉTEL:
Ha egy szám osztója egy szorzat valamelyik tényezőjének, akkor osztója a szorzatnak is.

Bizonyítás:
Ha az a szám osztja a b számot, akkor a b felírható a következő alakban: $b = k \cdot a$.

Tekintsük a b szám és egy másik c szám szorzatát: $b \cdot c = k \cdot a \cdot c = (k \cdot c) \cdot a$.

Ezek alapján a $(b \cdot c)$ szorzat is osztható lesz a – val.

■

TÉTEL:
Egy természetes szám pontosan akkor osztható 4 - gyel, ha az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4 – gyel.

Bizonyítás:
Tekintsünk egy tetszőleges A számot, s írjuk fel a helyiértékek segítségével a következő alakban: $A = 10^n \cdot a_n + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0$ (ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ a számjegyeket jelölik).

Alakítsuk át a kifejezést a következőképpen:

$$A = 10^2 \cdot (10^{n-2} \cdot a_n + \dots + 10^1 \cdot a_3 + 10^0 \cdot a_2) + 10 \cdot a_1 + a_0.$$

Mivel a zárójeles kifejezés $10^2 = 100$ - zal szorozva biztosan osztható lesz 4 - gyel, ezért az A szám csak akkor lesz 4 – gyel osztható, ha a zárójel után álló tagok összege is osztható 4 - gyel.

A zárójel után álló tagokat megvizsgálva azt kapjuk, hogy azok összege éppen az A szám utolsó két számjegyéből képzett szám.

Ezek alapján az A szám csak akkor osztható 4 - gyel, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 4 - gyel.

■

TÉTEL:
Egy természetes szám pontosan akkor osztható 3 - mal, illetve 9 – cel, ha a számjegyek összege osztható 3 – mal, illetve 9 - cel.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsünk egy tetszőleges A számot, s írjuk fel a helyiértékek segítségével a következő alakban: $A = 10^n \cdot a_n + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0$ (ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ a számjegyeket jelölik).

Alakítsuk tovább a kifejezést a következőképpen:

$$A = 10^n \cdot a_n + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0 = (1 + 99 \dots 9) \cdot a_n + \dots + (1 + 9) \cdot a_1 + a_0 =$$

$$= a_n + 99 \dots 9\, a_n + \dots + a_1 + 9\, a_1 + a_0 = 99 \dots 9\, a_n + \dots + 9\, a_1 + a_n + \dots + a_1 + a_0 =$$

$$= 9 \cdot (11 \dots 1\, a_n + \dots + a_1) + a_n + \dots + a_1 + a_0.$$

Mivel a zárójeles kifejezés 9 - cel szorozva biztosan osztható lesz 3 - mal és 9 - cel, ezért az A szám csak akkor lesz osztható 3 - mal, illetve 9 - cel, ha a zárójel után álló tagok összege is osztható 3 - mal, illetve 9 - cel.

A zárójel után álló tagokat megvizsgálva azt kapjuk, hogy azok éppen az A szám számjegyei.

Ezek alapján az A szám csak akkor osztható 3 - mal, illetve 9 - cel, ha a számjegyeinek összege osztható 3 - mal, illetve 9 - cel.

■

TÉTEL:
Egy természetes szám pontosan akkor osztható 11 - gyel, ha számjegyeit az utolsótól kezdve váltakozó előjellel összeadva a kapott összeg osztható 11 – gyel.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsünk egy tetszőleges A számot, s írjuk fel a helyiértékek segítségével a következő alakban: $A = 10^n \cdot a_n + \dots + 10^1 \cdot a_1 + 10^0 \cdot a_0$ (ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ a számjegyeket jelölik).

Alakítsuk tovább a kifejezést a következőképpen:

$$A = (10^1 + 1) \cdot a_1 + (10^2 - 1) \cdot a_2 + \dots + (10^n \pm 1) \cdot a_n + (a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pm a_n)$$

Mivel a kifejezésben a számjegyek 11 – gyel osztható számokkal vannak megszorozva $(11; 99; 1001; \dots)$, ezért az A szám csak akkor lesz osztható 11 – gyel, ha a kifejezés végén álló zárójeles összeg is osztható 11 – gyel. A zárójelben álló tagokat megvizsgálva azt kapjuk, hogy azok éppen az A számjegyei.

Ezek alapján az A szám csak akkor osztható 11 - gyel, ha számjegyeit az utolsótól kezdve váltakozó előjellel összeadva a kapott összeg osztható 11 – gyel.

■

TÉTEL:
Végtelen sok prímszám létezik.

Bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy véges sok prímszám van, s legyenek ezek $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Tekintsük a prímszámok szorzatánál 1 – gyel nagyobb számot: $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

Ha az A szám prímszám, akkor találtunk a $p_1, p_2, \dots, p_n$ prímektől különböző prímet.

Ha az A szám összetett szám, akkor a számelmélet alaptételéből következik, hogy az A - nak létezik prímosztója. Azonban az A alakja miatt $p_1, p_2, \dots, p_n$ nem osztója A – nak, vagyis léteznie kell az előzőktől különböző prímosztónak.

Ekkor ellentmondás adódik a kezdeti feltevéssel, s így az nem teljesülhet.

Ezek alapján végtelen sok prímszám van.

■