Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Halmazok számossága, szöveges feladatok, intervallumok

Halmazok számossága:
Egy A halmaz számosságán az elemeinek a számát értjük. Jelölés: $|A|$.

TÉTEL: (Logikai – szita formula)
Tetszőleges A, B, illetve C halmazok esetén az összes elemeiknek a száma:

- 2 halmazra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 3 halmazra: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Megjegyzés:
A szita – formula több halmaz esetén is felírható az előző képletekhez hasonlóan.

DEFINÍCIÓ: (Egyenlő számosságú halmazok)
Ha két halmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor azt mondjuk, hogy a két halmaz számossága egyenlő (a két halmaz ekvivalens egymással).

DEFINÍCIÓ: (Véges, végtelen halmazok)
Egy halmazt végesnek nevezünk, ha nincs olyan valódi részhalmaza, amely vele egyenlő számosságú. Ellenkező esetben végtelen halmazról beszélünk.

Megjegyzés:
A véges halmaz számossága kifejezhető egy természetes számmal.

DEFINÍCIÓ: (Megszámlálhatóan végtelen halmazok)
Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha egyenlő számosságú a természetes számok halmazával. Jele: $\aleph_0$ (alefnull).

Megjegyzés:

- *Az alefnull számosság a legkisebb végtelen számosság.*
- *Az alefnull számosságú halmazok elemi sorba rendezhetőek.*

DEFINÍCIÓ: (Megszámlálható halmazok)
Egy halmazt megszámlálhatónak nevezünk, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

TÉTEL:
Megszámlálható halmaz részhalmaza is megszámlálható.

TÉTEL:
Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

TÉTEL:
A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen.

TÉTEL:
A valós számok halmaza nem megszámlálhatóan végtelen.

DEFINÍCIÓ: (Kontinuum számosság)
A valós számok halmazával egyenlő számosságú halmazokat kontinuum számosságúnak nevezzük.

Megjegyzés:

- *Példa: sík (tér) pontjai, irracionális számok halmaza, számegyenes egy intervalluma, …*
- *A valós számok halmazát számegyenes segítségével szemléltetjük.*
- *A racionális számok nem töltik ki teljesen a számegyenest, mert bármely két racionális szám között található újabb racionális szám.*

TÉTEL:
Egy kontinuum végtelen számosságú halmaz számossága nagyobb, mint egy megszámlálhatóan végtelen számosságúé.

TÉTEL:
Bármely két nem 0 hosszú szakasz pontjainak számossága egyenlő (kontinuum számosságú).

DEFINÍCIÓ: (Halmazok Descartes - szorzata)
Az A és B halmaz Descartes - szorzatán (direkt szorzatán) azon rendezett elempárok halmazát értjük, amelyeknek első eleme az A, második eleme a B halmazból való.
Jelölés: $A \times B$ (ejtsd: A kereszt B)

<u>Megjegyzés:</u>
Rendezettség alatt azt értjük, hogy az elempárok nem felcserélhetők.

TÉTEL:
Az összes rendezett természetes számpár halmaza megszámlálhatóan végtelen.

<u>Intervallumok:</u>
A számegyenes egy szakaszát intervallumnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Zárt intervallum)
Zárt intervallumnak nevezzük azt az intervallumot, amelynél a határoló elemek beletartoznak az intervallumba. Jelöléssel: $x \in [a; b]$, ha $a \leq x \leq b$.

DEFINÍCIÓ: (Nyílt intervallum)
Nyílt intervallumnak nevezzük azt az intervallumot, amelynél a határoló elemek nem tartoznak bele az intervallumba. Jelöléssel: $x \in]a; b[$, ha $a < x < b$.

DEFINÍCIÓ: (Félig nyílt – félig zárt intervallum)
Félig nyílt – félig zárt intervallumnak nevezzük azt az intervallumot, amelynél az egyik határoló elem beletartozik, a másik határoló elem pedig nem tartozik bele az intervallumba. Jelöléssel: $x \in]a; b]$, ha $a < x \leq b$, illetve $x \in [a; b[$, ha $a \leq x < b$.

<u>Megjegyzés:</u>

- *Az intervallumok esetében a végteleneket nyílt intervallumokkal jelöljük:* $]-\infty;\ +\infty[$.
- *A zárt intervallum határpontjait besatírozott, a nyíltét pedig üres karikákkal ábrázoljuk.*

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat E: emelt szintű feladat

1. **(K) Hány eleműek az alábbi halmazok?**

   A: $\{\ \ \}$ **B:** $\emptyset$ **C:** $\{\emptyset\}$ **D:** $\{\{\ \ \}\}$

   E: $\{\{\emptyset\}\}$ **F:** $\{\{\ \ \}; \emptyset\}$ **G:** $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ **H:** $\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$

2. **(K) Páros, vagy páratlan elemszámú az a H véges halmaz, amelyre igaz, hogy bármely elemének reciproka is eleme a halmaznak? Mi a helyzet akkor, ha a reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak?**

3. **(K) Adj meg két olyan halmazt, amelyek metszete véges elemszámú, uniója pedig végtelen!**

4. **(K) Adott két halmaz: $A = \{3 - mal\ osztható\ pozitív\ kétjegyű\ számok\}$ és $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 \leq x \leq 20\}$. Határozd meg, hogy hány eleműek a következő halmazok: $A; B; A \cup B; A \cap B; A \setminus B; B \setminus A$!**

5. **(K) Tekintsük a következőket: $A = \{a\ 100 - nál\ kisebb\ négyzetszámok\}$ és $B = \{a\ 9 - cel\ osztható\ legfeljebb\ kétjegyű\ pozitív\ egészek\}$. Határozd meg az $|A|; |B|; |A \cup B|; |A \cap B|; |A \setminus B|; |B \setminus A|$ értékeket!**

6. **(K) Legyen az A halmaz a 100 – nál kisebb pozitív egész számok halmaza, a B halmaz pedig a 200 – nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Határozd meg a következő értékeket: $|A|; |B|; |A \cup B|; |A \cap B|; |A \setminus B|; |B \setminus A|$!**

7. **(K) Jelöljük A – val 72 pozitív osztóinak, B – vel 120 pozitív osztóinak halmazát. Határozd meg a következő értékeket: $|A|; |B|; |A \cup B|; |A \cap B|; |A \setminus B|; |B \setminus A|$!**

8. **(K) Legyen A a 6 – tal, B pedig a 7 – tel osztható kétjegyű számok halmaza. Határozd meg a következő értékeket: $|A|; |B|; |A \cup B|; |A \cap B|; |A \setminus B|; |B \setminus A|$!**

9. (K) Legyen a $H = \{1; 2; \ldots; 99; 100\}$ alaphalmaz négy részhalmaza:

$A = \{páros\ számok\}$ $\qquad$ $B = \{3 - mal\ osztható\ számok\}$

$C = \{négyzetszámok\}$ $\qquad$ $D = \{prímszámok\}$.

Határozd meg az alábbi halmazok elemszámait!

A $\qquad$ B $\qquad$ $\overline{C}$ $\qquad$ $\overline{D}$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ $B \cap C$

$B \cap D$ $\qquad$ $A \setminus C$ $\qquad$ $\overline{A \cup C}$ $\qquad$ $\overline{A \setminus C}$ $\qquad$ $\overline{C \setminus A}$ $\qquad$ $\overline{C \cap D}$

10. (K) Ha $A \subseteq B$, akkor mivel egyenlők a következő műveletek?

$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \setminus B$ $\qquad$ $B \setminus A$ $\qquad$ $\overline{A} \setminus \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{B} \setminus \overline{A}$

Ha $|A| = a$ és $|B| = b$ $(a, b \in \mathbb{N})$, akkor mennyi lehet a fenti halmazok elemszáma?

11. (K) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $|A| = 7, |B| = 9, |A \setminus B| = 3$. Határozd meg az $|A \cap B|$ - t és $|A \cup B|$ - t!

12. (K) Az A és B halmazról tudjuk, hogy $|A| = 5, |B| = 8, |B \setminus A| = 3$. Határozd meg $|A \cap B|$ és $|A \cup B|$ értékét!

13. (K) Hány elemű az $A \cap B$ halmaz, ha $|A \cup B| = 82, |A| = 56$ és $|B| = 93$?

14. (K) Tudjuk, hogy $|A \cap B| = 4, |B \setminus A| = 2, |A \cup B| = 9$. Mennyi $|A|$ és $|B|$?

15. (K) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $|A \cup B| = 6, |A \setminus B| = 3, |A \cap B| = 2$. Határozd meg az A és B halmaz elemeinek számát!

16. (K) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $|A| = 7, |A \cup B| = 15$ és $|A \cap B| = 3$. Határozd meg az $|A \setminus B|$ és a $|B \setminus A|$ értékét!

17. (K) Tudjuk, hogy $|U| = 20$, $|A| = 8$, $|B| = 7$, $|C| = 7$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|B \setminus C| = 4$, $|A \setminus B| = 5$, $|C \setminus A| = 3$, $|A \cap B| = 3$. Határozd meg a következő halmazműveletek elemszámát: $|A \setminus C|$, $|B \cap C|$, $|\overline{C}|$!

18. (K) Hány eleműek az A, B és C halmazok, ha $|A \cup B \cup C| = 10$, $|A \cup B| = 8$, $|A \setminus B| = 3$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap B \cap C| = 2$, $|A \cap C| = 3$ és $|B \setminus C| = 2$?

19. (E) Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $|A \setminus B| = 5$, $|B \setminus C| = 5$, $|C \setminus A| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A \cup B| = 13$, $|A \cup C| = 12$ és $|C| = 7$. Határozd meg az A és B halmazok elemszámát!

20. (E) Az A, B, C halmazok közül egyiknek sem részhalmaza a műsik két halmaz bármelyike. A három halmazra teljesül a következő: $|A \cap B \cap C| + 1 = \frac{|A| + |B| + |C|}{3}$. Mekkora $|(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)|$?

21. (E) Az A, B, C halmazok számosságáról a következőket tudjuk:

$|A \cap B \cap C| = |A \cap C| = 5$

$|B| = |A| + 10$

$|C| = 12$

$2 \cdot |(A \cap B) \setminus (B \cap C)| = |A \setminus (B \cup C)|$

$2 \cdot |A \setminus B| = |B \setminus A|$

$|B \cap C| = 8$

Határozd meg az A, B halmazok és az $A \cup B \cup C$ halmaz számosságát!

22. (K) Legyen $|A| = 8$, $|B| = 11$. Mekkorák lehetnek az alábbi értékek?

$|A \cap B|$ $\quad$ $|A \cup B|$ $\quad$ $|A \setminus B|$ $\quad$ $|B \setminus A|$

23. (K) Hány elemű lehet $A \cup B$, ha $|A \cap B| = 3$ és $|A \setminus B| = 5$?

24. (K) Hány elemű lehet $A \cap B$, ha $|A \cup B| = 10$ és $|A \setminus B| = 6$?

25. (K) Hány elemű lehet $A \setminus B$, ha $|A \cup B| = 5$?

26. (K) Hány elemű lehet az A és B halmaz, ha a következőket tudjuk:

a) $|A \cap B| = 3$ **és** $|A \cup B| = 5$?

b) $|A \cap B| = 8$?

c) $|A \cup B| = 4$?

27. (K) Ismertek a következő adatok: $|A| = 7, |B| = 8, |C| = 9, |A \cap B \cap C| = 3$. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit $|A \cup B \cup C|$ felvehet?

28. (K) Az A, B és C halmazok elemszáma 3. Legalább hány eleme van az $A \cup B \cup C$ halmaznak, ha $|A \cap B \cap C| = 1$?

29. (K) Három halmaz páronként vett metszete nem üres, de közös részük üres halmaz. Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet $|A \cup B \cup C|$, ha adottak a következők:

a) $|A| = 7, |B| = 8, |C| = 9$?

b) $|A| = 7, |B| = 8, |C| = 10$?

30. (K) Mennyi a legkisebb és legnagyobb érték, amit felvehet $|A \cup B \cup C|$, ha tudjuk a következőket:

a) $|A \cup B| = 7, |A \cup C| = 7, |B \cup C| = 6$?

b) $|A \cup B| = 8, |A \cup C| = 7, |B \cup C| = 6$?

31. (K) Add meg azt az A és B halmazt, amelyekre teljesülnek a következők: $f \in B$, $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$, $B \setminus A = \{c; e\}$, $g \notin A \setminus B$ és $|B| = 4$!

32. (K) Határozd meg az A és B halmazokat, ha $|A| = |B|; A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $A \cap B \not\subset \{3; 4; 5\}$ $A \setminus B = \{1; 4\}$!

33. (K) Határozd meg az A, B, C halmazokat, ha a következők teljesülnek: $|C| = 4$; $|A| = 5$; $(A \cap B) \setminus C = \{2; 3\}$; $(C \setminus A) \cap (B \setminus A) = \{6\}$; $(A \setminus B) \cap C = \{4\}$; $A \cap B \cap C = \{5; 7\}$; $A \cup B \cup C = \{10-nél\ kisebb\ pozitív\ egész\ számok\}$!

34. (E) Határozd meg az A, B, C halmazokat, ha tudjuk a következőt: $B \setminus (A \cup C) = \{4\}$, $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, $A \cap B = \{2; 8; 10\}$, $A \setminus C = \{1; 2; 3; 9\}$, $(B \cap C) \setminus A = \emptyset$ és $|(A \cup B) \cap C| = 2$!

35. (E) Határozd meg az A, B, C halmazokat, ha tudjuk a következőt: $A \cap B \cap C = \emptyset$, $C \setminus B = \{8; 28; 38\}$, $A \cup B \cup C = \{2; 4; 6; 8; 12; 18; 28; 38\}$, $(A \cup B) \cap C = \{8; 18\}$, $A \setminus (B \cup C) = \{2; 4\}$, $B \setminus A = \{12; 18\}$ és $|A| = |C|$!

36. (E) Az A, B és C halmazokról tudjuk, hogy $A \setminus B = \{4; 6; 8\}$, $B \setminus C = \{2; 5; 9; 10\}$, $C \setminus A = \{3; 7; 11\}$, $A \cap B \cap C = \{1\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11\}$, $C \cup A = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11\}$. Határozd meg az A, B, C halmazokat, ha $|C| = 5$!

37. (K) Tekintsük a következő halmazokat: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$, $B = \{4; 5; 6; 7; 8; A\}$, $C = \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$. (A B halmaz egyik eleme az A halmaz.) Melyik igaz az alábbi állítások közül?

A: $|B| = 12$ **B: $|B| = 6$** **C: $|A| = 5$**

D: $|B| < |C|$ **E: $|A| = |B|$** **F: $|A| < |B|$**

38. (K) Adott két halmaz: $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}, k < 6\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 9, 3 \mid n\}$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

A: $|B| < |A|$ **B: $|A| + |B| = |A \cup B|$**

C: $|A \cap B| = |A| - |B|$ **D: $|A \setminus B| = |B \setminus A|$**

39. (K) Az A, B, C véges halmazok esetén melyik igaz az alábbi állítások közül?

A: $|A \cap B| \leq \frac{|A|+|B|}{2}$

B: $|A| - |A \setminus B| = |A \cap B|$

C: $|A \cap B \cap C| \leq \frac{|A| + |B| + |C|}{3}$

D: $|A| + |B| + |C| > |A \cup B \cup C|$

E: $|A| + |B| \geq |A \cup B|$

F: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

40. (K) Melyik igaz az alábbi állítások közül? (A, B véges halmaz)

A: Ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor $|B| > 0$.

B: Ha $A \subseteq B$, akkor $|A| < |B|$.

C: Ha $A \subseteq B$ és $|A| \neq |B|$, akkor $|A| < |B|$.

D: Ha $B \subset A$, akkor $|B| < |A|$.

E: Ha $|A| = |A \cup B|$, akkor $B \subseteq A$.

41. (E) Bizonyítsd be, hogy A, B véges halmazok esetén teljesül a következő összefüggés: $|A \,\Delta\, B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$!

42. (K) Hány olyan egész szám van 1 - től 300 - ig, amely osztható 4 – gyel, vagy 6 – tal?

43. (K) Hány olyan 200 – nál kisebb pozitív egész szám van, amelyik sem 4 – gyel, sem 5 – tel nem osztható?

44. (K) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 2 – vel, 5 – tel, vagy 11 – gyel?

45. (K) Hány olyan 400 - nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely nem osztható 3 - mal, 5 - tel és 7 - tel sem?

46. (K) Az 1000 – nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely

a) **a 2 és 3 közül legalább az egyikkel osztható?**

b) **a 2 és 3 közül legfeljebb az egyikkel osztható?**

c) **a 2 és 3 közül pontosan az egyikkel osztható?**

d) **ha osztható 2 – vel, akkor osztható 3 – mal is?**

e) **a 2 és 3 közül ha osztható az egyikkel, akor osztható a másikkal is?**

47. (K) Az 1000 – nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely

a) **a $2; 3; 5$ számok közül pontosan a 2 – vel osztható?**

b) **a $2; 3; 5$ számok közül pontosan kettővel osztható?**

c) **a $2; 3; 5$ számok közül pontosan egyikkel osztható?**

d) **a $2; 3; 5$ számok közül legalább egyikkel osztható?**

48. (K) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyik

a) **osztható 3 – mal, vagy 4 – gyel, de nem osztható 5 – tel?**

b) **osztható 3 – mal és 5 – tel, de nem osztható 4 – gyel?**

49. (K) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyik osztható 6 – tal és 8 – cal, de nem osztható 5 – tel?

50. (K) Egy osztály 28 tanulója közül 8 – an felvételiznek matematikából, 6 – an fizikából, 4 tanuló matematikából is és fizikából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem?

51. (K) Tudjuk, hogy egy 28 fős osztályban nincs jelese 23 tanulónak fizikából és 21 tanulónak matematikából. Hány tanulónak van matematikából és fizikából is jeles osztályzata, ha tudjuk, hogy matematikából vagy fizikából 10 – en kaptak jelest?

52. (K) Egy iskola az ősz során két kirándulást szervezett. A 370 fős diákságból 30 diák egyikre sem ment el, 20 tanuló mindkettőn részt vett, valamint a második kiránduláson háromszor annyian voltak, mint az elsőn. Hányan voltak, akik csak az egyik túrára mentek el?

53. (K) A felső tagozatos diákok két kerékpártúrán voltak a nyáron. 180 főből 20 fő egyéb elfoglaltság miatt nem kerékpározott a többiekkel. 40 fő mindkettőn ott volt és az elsőn 30 diákkal többen voltak. Hányan kerekeztek az egyes kirándulásokon?

54. (K) A 25 fős osztályból 2 fő nem ötös matematikából és magyarból sem. 3 főnek mindkét tárgyból ötös az érdemjegye és magyarból néggyel több ötös született. Mennyi matematika, illetve magyar ötös lett?

55. (K) Egy kiránduláson az osztály fele kért hideg reggelit, $\frac{2}{3}$ - része pedig meleget. 7 nagyétkű gyerek mindkét fajtát evett, ketten koplaltak. Hány fős az osztály?

56. (K) Egy matematikaversenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot az indulók $70\,\%$ - a, a másodikat pedig az indulók $60\,\%$ - a oldotta meg. Minden induló megoldott legalább egy feladatot, és 9 – en mindkét feladatot megoldották. Hányan indultak a versenyen?

57. (K) A bölcsődében két játékot szeretnek játszani: hintázni, vagy homokozni. Egy délutánon a 34 főből ketten csak kergetőztek, négyen csak homokvárat építettek, öten pedig hintáztak és homokoztak is. Hányan voltak, akik csak hintáztak?

58. (K) Egy 20 fős csoportban 14 – en beszélnek angolul, s 9 – en németül. Hányan beszélnek mindkét nyelven, ha tudjuk, hogy a csoportban nincs olyan, aki ne beszélné legalább az egyik nyelvet?

59. (K) Egy osztály tanulóinak $\frac{2}{3}$ – része közepesnél nem rosszabb, $60\,\%$ - a közepesnél nem jobb tanuló. Hány közepes tanuló van az osztályban, ha az osztálylétszám 30? Mennyi az osztályátlag, ha a közepesnél jobb tanulóké 4, a gyengébbeké pedig $2,5$?

60. **(K) Egy társasház lakói közül 168 – an gyűjtik külön a műanyag palackokat, 87 – en csak a papírszemetet, 45 – en pedig a műanyag palackokat és a papírszemetet is. Hány fő lakik a társasházban, ha van 19 ember, aki nem járul hozzá a szelektív hulladékgyűjtéshez? Hányan gyűjtik csak a műanyagot?**

61. **(K) Lili és Evelin majdnem minden órán leveleznek egymással a fiúkról. Ma pont saját osztálytársaikat vitatják meg, amikor a matematikatanár elcsípi az alábbi postát: „jóképű 7; okos 5; jóképű és okos 3; egyik sem 8”. Fiú, vagy lány jár több Liliék osztályába, ha a lányoknak van még 14 lány osztálytársa?**

62. **(K) Egy pizzaárus 100 egymás utáni pizzarendelést jegyzett fel. 92 vásárló kért sajtot vagy pepperonit a pizzájára, $\frac{3}{5}$ - e mindkettőt kért, míg $28\,\%$ - a nem kért pepperonit a pizzájára. Hányan rendeltek csak egyik féle feltéttel?**

63. **(K) Egy 40 fős baráti társaságban $85\,\%$ - a síelt már Olaszországban, vagy Ausztriában. Olaszországban $\frac{13}{20}$ – a volt, és Ausztriában pedig 18 – an nem voltak síelni. Hányan voltak már mindkét helyen síelni?**

64. **(K) Egy csoportban 13 tanuló készített matematika, 15 tanuló magyar nyelvtan házi feladatot. 8 – an készítették el a házi feladatukat mindkét tárgyból, de volt 3 olyan gyerek is, aki egyik órára sem készült. Hány fős a csoport? A csoportba járók hány százaléka készítette el csak a matek házi feladatot?**

65. **(K) A strandon a lángossütőnél a sima lángos $180\,Ft$, a tejfölös $220\,Ft$, a sajtos $240\,Ft$, a sajtos – tejfölös $380\,Ft$. Egy alkalommal az árus összeszámolta, hogy az utolsó két órában a 30 vásárlóból 8 – an kértek sajtot és tejfölt a lángosra, 18 olyan vásárló volt, aki kért rá tejfölt, és 15 olyan aki sajtot. Mennyi bevétele származott a lángosokból az árusnak ebben a két órában?**

66. **(K) Egy ornitológus megfigyelte, hogy a területén élő 200 szarka $60\,\%$ - ának a farka tarka, $70\,\%$ - ának hosszú a csőre. A tarka farkú és hosszú csőrű szarkák aránya az összes szarkához viszonyítva $40\,\%$. Hány egyed van, amelyiknek rövid csőréhez egyszínű faroktollazat tartozik?**

67. (K) A könyvespolcon háromféle könyv van: csak verseket, csak prózát, illetve verseket és prózát is tartalmazó könyvek, mindegyikből legalább egy. Tudjuk, hogy a könyvek közül 9 – ben vannak versek és 7 – ben van prózai szöveg. Hány könyv lehet a polcon?

68. (K) Az iskolában a matematika szakkörbe járó tanulók $80\ \%$ - a kosarazik, és a kosárlabdázók $30\ \%$ - a jár matematika szakkörbe. Ha összesen 15 tanuló jár matematika szakkörbe, akkor hány olyan tanuló van, aki kosarazik, de nem jár matematika szakkörre?

69. (K) Egy gimnáziumban az egyik nyáron két tanár is szervezett vízitúrát egy osztály számára – az egyik júliusban, a másik augusztusban. A júliusi evezésre 13 – an, az augusztusira 11 – en mentek el. Néhány diák mindkét túrán részt vett, ugyanannyi viszont egyikre sem jelentkezett. Bizonyítsd be, hogy páros számú tanuló jár az osztályba!

70. (E) Egy osztály tanulóinak az $50\ \%$ - a közepesnél nem jobb, míg a $\frac{4}{5}$ – része közepesnél nem rosszabb dolgozatot írt. Hányan járnak az osztályba, ha a dolgozatírásnál senki sem hiányzott, és közepesnél rosszabb dolgozatot 6 – an írtak? Mennyi volt a közepes?

71. (E) Eszter a kiránduláson vásárolt nyolc zacskó gumicukrot egyetlen nagy tálba öntötte. A gumicukrok $40\ \%$ - a állatfigurás, $80\ \%$ - a többszínű volt. Az egyszínű, nem állatfigurás cukorka az összesnek $10\ \%$ - a volt. Belőlük Csaba megevett 9 – et, így ebből a fajtából csak 6 darab maradt. Hány darab többszínű állatfigurás gumicukor volt eredetileg a tálban összesen?

72. (E) Egy 1000 házaspárból álló társaságban a feleségüknél magasabb férjek $\frac{2}{3}$ – a nehezebb is a feleségénél. A feleségüknél nehezebb férjek $\frac{3}{4}$ – e magasabb a feleségénél. Ha 120 feleség van, aki magasabb is és nehezebb is a férjénél, akkor hány férj magasabb és nehezebb a feleségénél?

73. (E) Egy gimnázium kémia – biológia tagozatos osztályába 76 tanuló felvételizett. A felvételizők közül volt, aki csak a kémia, és volt, aki csak a biológia tagozatot jelölte meg, de 29 – en mindkét tagozatra beadták a jelentkezési lapjukat. Bizonyítsd be, hogy a két tagozatra nem jelentkezhetett ugyanannyi diák!

74. (K) Egy matematikaversenyen három feladatot tűztek ki. A 30 induló közül első feladatot 19 – en, a másodikat 15 – en, a harmadikat 18 – an oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatra 7, a második és harmadik feladatra 10, az első és harmadik feladatra 9 tanuló adott helyes megoldást. Mindhárom feladat megoldása 3 diáknak sikerült. Hányan nem tudtak egyetlen feladatot sem megoldani?

75. (K) Kabán az idény első fociedzésén az új edző megkérdezte a jelenlévőket, hogy kik játszottak már a különböző pontokon, kiderült, hogy korábban védőt 19 – en, középpályást 20 – an, csatárt 22 – en játszottak. A további kérdésekből kiderült, hogy 10 fő játszott már védőt és középpályást, 9 fő csatárt és védőt, 11 – en csatárt és középpályást. 4 – en mindhárom poszton fociztak már. Hányan voltak ott az alakuló gyűlésen, ha az edző hozott magával 4 kapusjelöltet is? (Az említetteken kívül más nem volt ott, és a kapusok egyszer sem jelentkeztek.)

76. (K) Egy osztály tanulói 3 feladatból álló dolgozatot írtak matematikából. Az első feladatot 14 – en, a másodikat 13 – an, a harmadikat pedig 11 – en oldották meg. 7 tanuló az első és második, 6 a második és harmadik, 4 gyerek az első és harmadik példát is megoldotta. Mindössze 4 diák tudta mindhárom feladatot elkészíteni. Hányan vannak az osztályban, ha mindenki legalább egy feladatot megoldott?

77. (E) Egy alkalommal 100 embert kérdeztek meg hallgattak – e már dalokat a Tankcsapda, Kárpátia vagy az Edda együttestől. A megkérdezettek közül mindenki hallott már legalább az egyik együttestől zeneszámot. 63 – an a Tankcsapdától, 66 – an a Kárpátiától és 59 – en az Eddától hallgattak már nótákat, 35 fő a Tankcsapdától és a Kárpátiától, 37 fő a Tankcsapdától és az Eddától és 39 – en a Kárpátiától és az Eddától. Hányan hallottak már dalokat mindhárom együttestől?

78. (E) Az iskolai sítáborban 56 tanuló vett részt. A résztvevők mindegyike vagy barna hajú, vagy aktív sportoló, vagy jeles tanuló. 45 tanuló barna hajú, 39 – en aktív sportolók és 24 – en jeles tanulók. 29 aktív sportoló barna hajú, 15 barna hajú jeles tanuló, és 20 sportoló jeles tanuló is. Hány barna hajú jeles tanuló sportol aktívan? Hány olyan jeles tanuló van, aki nem sportol és nem is barna hajú?

79. (E) Az emberi vérben található többek között az A, B és Rh antigén. Vérvizsgálatkor többféleképpen osztályozzák az embereket. Egyrészt Rh-pozitív (röviden: Rh^+) valaki, ha vérében van Rh antigén, különben Rh-negatív (röviden: Rh^-). Másrészt az A, B vagy AB vércsoportba tartozik attól függően, hogy az A és B antigén közül a vére melyiket tartalmazza. Ha sem A – t, sem B – t, akkor az egyén a nullás vércsoportba tartozik. Egy vérvizsgálaton 1000 fő vett részt. A következő eredmények adódtak: A vércsoportú volt 410, B vércsoportú 482, nullás 64 fő. Rh^+ volt 120 fő – közülük A vércsoportú 42, B vércsoportú 61, és nem volt AB vércsoportú. Hány AB vércsoportú egyén volt a vizsgálaton? Hány nullás vércsoportú Rh^- egyén volt a vizsgálaton?

80. (E) A 35 fős $9.E.$ osztály az osztálykiránduláson, amelyre mind a 35 tanuló elment, salátát rendelt vacsorára. A vacsora végén kiderült, hogy háromfélét ettek: gyümölcssalátát, kukoricasalátát, tonhalsalátát, és mindenki rendelt valamilyet a három közül. Kukoricasalátát 14 - en, gyümölcssalátát 15 - en, tonhalsalátát 13 - an. Egy diák rendelt mindháromból. A kukoricasalátát rendelők közül 11 - en nem kértek gyümölcssalátát. 9 olyan diák volt, aki sem kukoricás, sem gyümölcssalátát nem evett. A csak gyümölcssaláták rendelők 1 - gyel többen voltak, mint a csak tonhalasat rendelők.

a) **Hány olyan tanuló volt, aki tonhalas és gyümölcssalátát is rendelt?**

b) **Hány olyan tanuló volt, aki csak kukoricás salátát rendelt?**

81. (E) Egy 36 főből álló csoporttal teszteltek három terméket, legyenek ezek: A, B és C. 20 főnek tetszett az A és a C termék, 8-nak a B és a C termék. Csak az A, illetve csak a B termék $2-2$ tesztelőnek felelt meg. Az A vagy a B terméket viszont 29 - en tartották jónak. A C termék szintén 29 embernek felelt meg. Mindhárom termék csupán 3 embernek tetszett.

a) **Hány tesztelőnek tetszett pontosan két termék?**

b) **Hozzájuk képest többen voltak - e, akiknek csak egy termék volt jó?**

c) **Mennyien vannak azok, akiknek egyetlen termék sem volt megfelelő?**

82. (E) A kosárlabda – bajnokság egy fordulójában összeszámolták, hogy hány játékos szerzett pontot kétpontos dobással a mezőnyből, hárompontos dobással a mezőnyből, illetve büntetőből. 70 játékos dobott kétpontos kosarat mezőnyből, 44 játékos dobott hárompontos kosarat mezőnyből, és 32 játékos szerzett pontot büntetőből. 19 – en dobtak mezőnyből kétpontos és hárompontos kosarat is, 16 – an dobtak kétpontos kosarat mezőnyből és szereztek pontot büntetőből. 21 – en dobtak hárompontos kosarat mezőnyből és szereztek pontot büntetőből, valamint 6 – an szereztek pontot mindhárom féleképpen. Mindenki szerzett pontot.

a) **Hány játékos dobott csak kétpontos kosarat mezőnyből?**

b) **Hány játékos szerzett pontot két – és hárompontos dobással mezőnyből, de nem szerzett pontot büntetőből?**

c) **Hány játékos szerzett pontot két – vagy hárompontos dobással mezőnyből?**

d) **Hány játékos nem szerzett pontot büntetőből?**

83. (E) Egy osztály 35 tanulójából mindenki tanul valamilyen nyelvet a választható angol, német, spanyol nyelvek közül. Pontosan két nyelvet 8 tanuló választott. Ebből hatan tanulnak angolt, és mindössze egy választotta mellé a spanyolt. Három nyelvet feleannyian tanulnak, mint kettőt. Az angolul tanulók száma egyenlő a legalább két nyelvet tanulók számának a kétszeresével. Csak németet feleannyian tanulnak, mint csak angolt. Melyik nyelvet hányan tanulják?

84. (E) A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre.
Okosabb – e a majom, mint az ember?
Szebb –e a majom, mint az ember?
Igaz – e, hogy a majom az ember őse?
Az első kérdésre 23 – an, a második kérdésre 17 – en, a harmadikra 23 – an szavaztak igennel. Az első kérdésre igennel szavazók közül 13 - an a második, 12 – en pedig a harmadik kérdésre feleltek nemmel. Igent mondott a második és harmadik kérdésre 6 akadémikus, de közülük 2 az első kérdésre nemmel szavazott. Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

85. (E) Az „Országúton” nevű cirkusz társulatának tíz tagja között négy bohóc, nyolc artista és négy állatidomár van. A társulat minden tagja fellép legalább az egyik „szerepkörben”, az artisták közül öt nem bohóckodik, két állatidomár is van. Csak egy olyan tag van, aki mindhárom szerepben jártas.

***a)* Hány olyan bohóc van, aki nem artista?**

***b)* Hány olyan állatidomár van, aki bohóc is?**

***c)* Hány esetben tudunk úgy kiválasztani két embert a társulatból, hogy az egyik kiválasztott „csak” artista, a másik pedig nem artista lehet?**

86. (E) Egy iskola végzős diákjai közt felmérést végeztek arról, hogy honnan tájékozódnak a hírekről. Három lehetséges forrást jelöltek meg, amiből választhattak: újság, televízió, internet. 20 – an jelölték be mindhárom forrást. A válaszolók mind bejelöltek legalább egyet a három közül. Az olyan diákok száma, akik egyetlen forrásból tájékozódnak (net, újság, TV) rendre: 30, 40 és 50. Azon tanulók száma, akik újságot olvasnak és az interneten is követik az eseményeket (esetleg TV – t is néznek) fele annyi volt, mint azok száma, akik Tv – t néznek és újságot is olvasnak (esetleg még neteznek is). A felmérésből az is kiderült, hogy azok, akik mindkét elektronikus médiát figyelemmel kísérik, újságot is olvasnak. Volt 10 olyan diák is, akik nem voltak hajlandóak válaszolni a kérdésekre. Hány embert kérdeztek meg a felmérésben, ha tudjuk, hogy 125 – en voltak olyanok, akik legalább az újságokat olvassák?

87. (E) Egy 28 fős érettségiző osztályban összeszámolták a nyelvvizsgákat és a következőket állapították meg: csak angol nyelvvizsgája 10 főnek, angol és német 4 főnek, német és francia 3 főnek van. A német nyelvvizsgák száma 11, az angol vagy francia nyelvvizsgáké pedig 21. Csak francia ugyanannyi van, mint angol és francia. Senkinek nincs 3 nyelvvizsgája. Hány tanulónak van pontosan egy nyelvvizsgája? Hányan nem rendelkeznek nyelvvizsgával az osztályban?

88. (E) A $9.\,d$ osztály 3 kirándulást szervezett az évben – Nyíregyházára, Esztergomba és Sárospatakra. A 37 tanuló mindegyike volt legalább egy kiránduláson. 7 – en csak Esztergomban, 8 – an csak Nyíregyházán, 9 – en pedig csak Sárospatakon voltak. Pontosan két túrán 8 tanuló vett részt, közülük 4 – en nem voltak Sárospatakon. Mindössze 5 olyan diák van, aki mindhárom helyen járt. A pataki túra résztvevői közül ugyanannyian voltak nyíregyen, mint Esztergomban. Hányan vettek részt az egyes kirándulásokon?

89. (E) Egy matematikai versenyen három feladatot tűztek ki. A 184 versenyző közül mindenki megoldott legalább egy feladatot. Az első példát 90, a másodikat 80, a harmadikat 50 induló oldotta meg helyesen, pontosan két jó feladatmegoldása 32 diáknak volt.

***a)* Hány olyan versenyző volt, aki az első feladatot nem oldotta meg?**

***b)* Hány olyan versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta?**

***c)* Ha azt is tudjuk, hogy 60 olyan diák volt, aki csak az első, és 50 olyan diák volt, aki csak a második feladatot oldotta meg, akkor hányan voltak azok, akik csak a harmadik feladatott oldották meg?**

90. (E) Egy színjátszó csoport már három külföldi fellépéssel büszkélkedhet: jártak Bécsben, Helsinkiben és Prágában. A társulat minden tagja fellépett az egyik helyen. Azon tagok, akik Ausztriában és Finnországban is felléptek 15 – en voltak. 21 – en Prágában és Bécsben is játszottak. Olyan nem volt, aki csak Helsinkiben és Prágában járt, de Bécsben nem.

***a)* Hányan léptek fel mindhárom fővárosban, ha az összesen 60 fős társulatnak $55\,\%$ - a csak egy városba jutott el?**

A színjátszók vezetőjétől tudjuk azt is, hogy azok közül, akik csak egy külföldi fellépésre tudtak elmenni, Prágában pont feleannyian jártak, mint Bécsben. Kizárólag Helsinkiben 3 fő járt.

***b)* Hány fővel lépett fel a társulat az egyes városokban?**

91. (E) Egy osztályban, ahol mindenki szeretne továbbtanulni, a tanulók három egyetemre adták be a jelentkezésüket: a Műszaki Egyetemre, az ELTE – re és a DE – re. Tízen voltak, akik ezen három közül többet is megjelöltek. Műszakira és az ELTE – re ugyanannyian szeretnének menni, mint amennyien a Műszakira és a DE – re, illetve ahányan csak az ELTE – re. Csak a Műszakira annyian, ahányan pontosan két helyre jelentkeztek. A DE – re jelentkezők között ugyanannyi van, aki csak egy helyre jelentkezett, mint aki többre is. Mindhárom helyre 1 ember jelentkezett. Hány fős az osztály és hányan jelentkeztek a ELTE – re?

92. (E) Egy gyümölcsfagylaltot gyártó cég felmérte a $11/B$ osztály tanulóit, hogy ki szereti az eper, a málna, illetve a citrom ízű fagylaltot. A következő eredményt kapták: csak egyféle ízt összesen 13 – an kedvelnek. Az epret és a málnát együtt 4, az epret és a citromot eggyel több, a citromot és málnát eggyel kevesebb fő jelezte, hogy szereti. Mindhárom ízt csak egy gyerek szereti. Hány fős az osztály, ha a felméréskor nem volt hiányzó és mindenki felemelte legalább egyszer a kezét?

93. (E) Dávidnak 30 képregénye van. Közülük 14 – ben szuperhősök, 9 – ben járművek és 20 – ban mesefigurák a főszereplők. (Olyan képregénye egy sincs, amelyikben a három közül valamelyik ne szerepelne.) 5 képregényben a mesefigurák járművekkel közlekednek, 3 – ban a járművek szuperhősöket szállítanak. Csak egy olyan képregénye van, amelyben a főszereplő járművek szuperhősöket és mesefigurákat is szállítanak. Hány olyan képregénye van, amelyben a mesefigurák és a szuperhősök gyalog járnak együtt?

94. (E) Egy osztály tanulói a tanév során háromszor voltak színházi előadáson. Az elsőn az osztály tanulóinak 80 % - a, a másodikon a 90 % - a, a harmadikon a 70 % - a volt jelen. Így 12 tanuló mindhárom előadást megtekintette, míg a többiek csak kettőt. Hányan járnak az osztályba?

95. (E) Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, oroszt és franciát, és minden diák legalább egy nyelvet tanul. Angolul 14 – en tanulnak, oroszul 15 – en, franciául pedig 5 – en. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

96. (E) Egy hatalmas kertben sok fát ültettek egymástól távol. Minden fa körül háromféle vadvirág legalább egyike nyílik az év során. Az összes fa $\frac{2}{3}$ – a körül nyílik ibolya, $\frac{7}{15}$ – e körül hóvirág, és a fák $\frac{1}{3}$ – a körül találunk pipacsot. Pipacs és hóvirág együtt a fák $\frac{1}{10}$ – e, pipacs és ibolya a fák $\frac{1}{5}$ – e, hóvirág és ibolya pedig az összes fa $\frac{7}{30}$ – a körül nyílik. Összesen 20 fát számolhatunk meg, amely körül az év során mindhárom virág nyílik. Hány fa található a hatalmas kertben?

97. **(E) Egy fiúosztályban 18 fiú szeret sakkozni, 23 futballozni, 21 kerékpározni és 17 kirándulni. Azok száma, akik sakkozni és futballozni szeretnek 9. Sakkozni és kerékpározni 7 – en, sakkozni és kirándulni 6 – an, futballozni és kerékpározni 12 – en, futballozni és kirándulni 9 – en, kerékpározni és kirándulni 12 – en szeretnek. 4 olyan fiú van, aki sakkozni, futballozni és kerékpározni is szeret, 3 olyan, aki szeret sakkozni, futballozni és kirándulni is. 5 – en szeretnek sakkozni, kerékpározni és kirándulni, 7 – en szeretnek futballozni, kerékpározni és kirándulni. Olyan fiú, aki sakkozni, futballozni, kerékpározni és kirándulni egyaránt szeret, 3 van. Tudjuk azt is, hogy mindenki szeret sakkozni, futballozni, kerékpározni vagy kirándulni. Hány fiú van az osztályban?**

98. **(E) Mi a hiba az alábbi feladat megoldásában?**

„Feladat:
Egy osztályban a diákok három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Tudjuk, hogy angolul 16 – an, németül 10 – en, franciául 15 – en tanulnak; angolul és franciául 8 – an, angolul és németül 2 – en, németül és franciául 4 – en, valamint mindhárom nyelven 3 – an tanulnak. Mennyi az osztálylétszám, ha valamilyen nyelvet mindenki tanul?”

Megoldás:
Jelöljük az angolul, németül, illetve franciául tanuló diákok halmazát rendre A – val, N – nel és F – fel, s alkalmazzuk a logikai szita formulát!
Ekkor az $|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |N \cap F| - |A \cap F| + |A \cap N \cap F|$ összefüggés alapján azokszáma, akik valamelyik nyelvet tanulják: $16 + 10 + 15 - 8 - 2 - 4 + 3 = 30$ – an vannak. Mivel valamilyen nyelvet mindenki tanul az osztályban, az osztálylétszám 30.

99. **(E) Az új tanárnak egy diák az osztályát a következőképpen mutatta be:**
„Az osztálynak 45 tanulója van, köztük 25 fiú. A jó vagy jeles rendű tanulók száma 30, köztük 16 fiú. 28 – an sportolnak, köztük 18 fiú, illetve 17 jó vagy jeles eredményű tanuló van. 15 olyan fiú van, aki jó vagy jeles eredményű, és sportol is.” A tanár szólt a hetesnek, hogy a jelentés hibás volt. Honnan tudta, ha korábban senkit sem ismert az osztályból?

100. **(E) Egy cég felmérést készít egyik kis üzlete forgalmáról. Az üzletben háromféle cikket árulnak: A – t, B – t és C – t. Az eladó így számolt be a napi forgalomról: „Az üzletben 40 – en fordultak meg, közülük 15 – en nem vettek semmit. Az A árucikkből 15 – en vásároltak, a B – ből 12 – en, a C – ből 10 –en. 6 vevő vásárolt az A – ból és B – ből, 1 vevő B – ből és C – ből, 3 vevő C – ből és A – ból.” Ha te lennél az eladó főnöke, mit mondanál a fenti beszámoló után a beosztottadnak?**

101. (E) Egy 30 fős társaságban franciául 20 – an, németül 22 – en, angolul 25 – en beszélnek. (Legalább az egyik nyelvet mindenki beszéli.) Hányan beszélhetnek mindhárom nyelven? Legalább hányan beszélnek két nyelven?

102. (E) Egy felmérésből kiderült, hogy egy iskola tanulói közül 90 – en rendszeresen sportolnak, 77 – en kedvelik a komolyzenét és 152 – en rajonganak az AMFM együttesért.

***a)* Lehet – e az iskola tanulóinak száma 350?**

***b)* Legalább hány tanulója van az iskolának?**

***c)* Ha az iskola tanulóinak száma 165, akkor legfeljebb hány olyan tanulója van, aki kedveli a komolyzenét, de nem sportol?**

103. (E) Az egyik angol focicsapatban (a tartalék játékosokat is beleértve) 17 – en beszélnek angolul, 4 – en flamandul, a csapat játékosai közül 1 játékos tud arabul, ő viszont nem beszéli a többi nyelvet. Hányan vannak a csapatban, ha azt is tudjuk, hogy két nyelven ugyanannyian beszélnek, mint ahányan csak flamandul? (Az említett három nyelven kívül más nyelvet nem beszélnek a játékosok.)

104. (E) Egy matematika olimpián 100 tanuló vett részt, és 4 feladatot tűztek ki. Az első problémát pontosan 90 tanuló oldotta meg, a másodikat pontosan 80, a harmadikat pontosan 70 és a negyediket pontosan 60. Egyetlen résztvevő sem oldotta meg mind a négy feladatot. Aki a harmadik és a negyedik feladatot megoldotta, díjat nyert. Hányan nyertek díjat?

105. (E) Tudjuk, hogy a férfiak $80\ \%$ - a legalább $170\ cm$ magas, $85\ \%$ - ának barna haja van, $90\ \%$ - a legalább $70\ kg$ és $95\ \%$ - a nem bajszos. A férfiak hány százaléka rendelkezik biztosan az összes felsorolt tulajdonsággal?

106. (E) Osztályunk 20 tanulója közül 14 barna szemű, 15 sötét hajú, 17 gyerek $50\ kg$ – nál nehezebb, 18 pedig $160\ cm$ – nél magasabb. Mutasd meg, hogy legalább 4 gyerek mind a négy tulajdonsággal rendelkezik?

107. (E) Egy toronyba 102 lépcsőfok vezet. Dorka 1, Gabi 2, Zsuzsi 3 lépcsőfokot megy fel egy lépéssel. Hány lépcsőfok van, amelyet pontosan ketten használnak közülük, amíg felérnek?

108. (E) Határozd meg az $A \times B$, a $C \times B$ és a $C \times C$ halmazokat, ha $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 4; 5\}$ és $C = \{2; 7\}$! Mennyi eleme van az $A \times A$, a $B \times A$ és az $A \times C$ halmazoknak?

109. (E) Határozd meg az $(A \times A) \cap (B \times B)$ halmaz elemeit, ha $A = \{1; 2\}$ és $B = \{1; 2; 3; 4\}$!

110. (E) Hány közös eleme van az $A \times B$ és $B \times A$ halmaznak, ha $A = \{0; 1; 2; 3\}$ és $B = \{0; 1; 2; 4\}$?

111. (E) Hány elemű az $A \times A$, az $A \times B$ és a $B \times B$ halmaz, ha $A = \{5; 6; 11\}$ és $B = \{2; 6; 18; 24\}$?

112. (E) Legyen $A = \{1; 2; 3\}$ és $B = \{2; 3; 4\}$. Határozd meg a következő halmazok elemszámát!

$$(A \setminus B) \times (B \setminus A) \qquad (A \setminus B) \times (A \cap B)$$

$$(A \cup B) \times (A \cap B) \qquad (B \setminus A) \times (B \cup A)$$

113. (E) Legyen A a 100 – nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 200 – nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza. Hány eleme van az $(A \times B) \setminus (B \times A)$ és a $(B \times A) \setminus (A \times B)$ halmaznak?

114. (E) Adott $A = \{0; 1; 2; 3\}$ és $B = \{0; -1; -2\}$ halmaz. Hány elemű a következő halmaz: $(A \times B) \cup (A \times A)$?

115. (E) Legyen $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, B = \{b \in \mathbb{N} \mid 4 \leq b \leq 7\}$. Hány elemű az $A \times B$ és az $(A \times B) \cap (B \times A)$ halmaz?

116. (E) Az A és B halmazokra teljesül az $|A \times B| = 12$ összefüggés. Határozd meg $|A \cap B|$ és $|A \cup B|$ lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét!

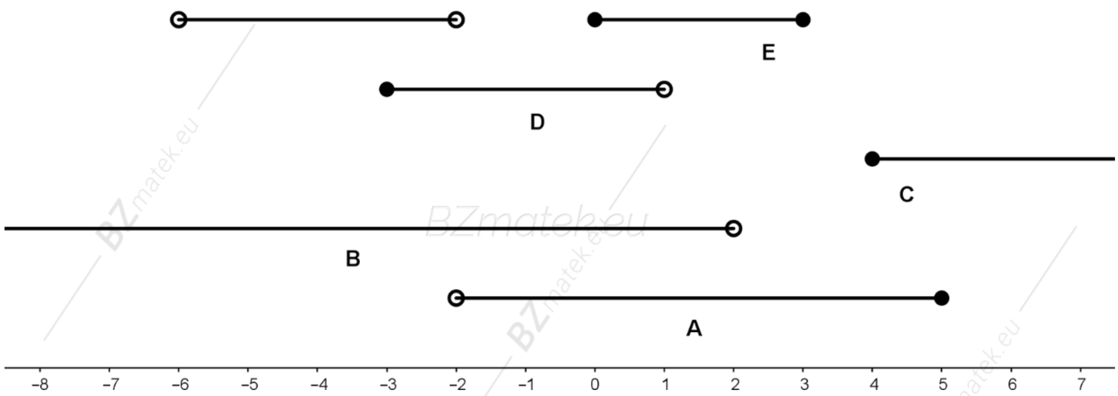
117. (E) Ha $|A| = a$ és $|B| = b$ $(a, b \in \mathbb{N})$, akkor mennyi lehet az alábbi halmazok elemszáma?

$A \times A$ $\quad$ $A \times B$ $\quad$ $A \times \emptyset$ $\quad$ $A \,\Delta\, A$ $\quad$ $A \,\Delta\, B$ $\quad$ $A \,\Delta\, \emptyset$

118. (E) Mivel egyenlő tetszőleges A halmaz esetén: $A \times \emptyset$ és $A \,\Delta\, A$?

119. (E) Igaz – e, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $A \times B \subseteq B \times B$? Igaz – e a megfordítása?

120. (K) Add meg intervallumjelülésekkel a számegyenesen látható intervallumokat!



121. (K) Ábrázold számegyenesen a következő számhalmazokat!

$A = \{x \mid -5 < x \leq 3;\, x \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $B = \{2x + 3 \mid -2 \leq x \leq 1;\, x \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{3x - 2 \mid -1 \leq x < 2;\, x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $D = \{x \mid 2 > |x|;\, x \in \mathbb{R}\}$

Igaz – e, hogy a $B \setminus A$ halmaz elemeinek a száma véges?

122. (K) Legyen az $A =]-5; 4]$ és $B = [-3; 6]$. Add meg az $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!

123. (K) Adott az $A = [3; 6[$ és $B =]5; 7]$. Határozd meg az $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!

124. (K) Adott az $A = [-4; 5[$ és $B = [-1; 6[$. Határozd meg az $A \cup B; A \cap B; A \setminus B$ és $B \setminus A$ halmazokat!

125. (K) Adottak a következő halmazok: $A =]-2,11; -2,1]$ és $B =]-2,105; -2,1]$. Írd fel intervallum jelöléssel a következő halmazokat: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$!

126. (K) Adottak a következő intervallumok: $A = [-3; 4[; B = [2; +\infty[$ és $C =]-\infty; 3[$. Add meg a következő halmazokat: $A \cup B; B \cap C; C \setminus A; B \setminus C$!

127. (K) Tekintsük a következő intervallumokat: $A = [1; 3[$, $B =]-1; 2]$, $C = [0; +\infty[$, $D =]-\infty; 4[$. Add meg a következő intervallumokat: $C \cup D$, $A \setminus C$, $D \setminus C$, $B \cap C$!

128. (K) Adott négy intervallum: $I =]-1; 3[, J =]2; 4], K = [1; 3]$ és $L = [0; 2[$.

***a)* Határozd meg az $I \setminus K; J \cap K; K \cup L; I \setminus J; L \setminus I$ intervallumokat!**

***b)* Vannak – e diszjunkt intervallumok ezek között?**

***c)* Van – e olyan intervallum, amely tartalmaz egy másikat?**

129. (K) Határozd meg az $A \setminus B$ és $A \cap B$ halmazok azon elemit, melyek egészek, ha $A = [2; 8]$ és $B =]3; +\infty[$!

130. (K) Mely természetes számokat tartalmazzák az alábbi halmazok?

$$A = [-3,5; 3[\cap [-2; 4] \qquad B =]0; 17,2[\setminus [9; 11[$$

131. (K) Add meg halmazként az $I = \left]-\frac{4}{5}; -\frac{7}{15}\right]$ intervallumot! Adj meg 4 olyan racionális számot, amely ebbe az intervallumba esik!

132. (K) Add meg az alábbi halmazok közötti műveletek eredményét!

A: $\left]1; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right[$

B: $[-2; 2] \cap]-8; -1[$

C: $[-2; 0] \cup \left[-\frac{1}{2}; 7\right]$

D: $[-4; 0] \setminus \left[-3,5; \frac{1}{2}\right]$

E: $]1; 2] \setminus \left]\frac{3}{2}; 5\right]$

F: $([\pi; 6] \cup]5; 12[) \cap]0; \pi]$

G: $(]-2,5; 11] \setminus]-2; 7]) \cap [6; 7]$

H: $[8; 16] \setminus \{8; 16\}$

I: $[-4; -1] \cap [-3; -1,5] \cap [-8; -2]$

J: $[1; 6] \cap]2; 4[\setminus [3; 5[$

133. (K) Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak, vagy hamisak!

A: $-\frac{3}{5} \in \left[-\frac{5}{7}; -\frac{7}{11}\right]$

B: $]-8,5; -4] \subseteq [-8,5; 4]$

C: $[2; 7] \setminus \{2\} = \{7\}$

D: $]0; 3[\cup \{0; 3\} = [0; 3]$

E: $\left[-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right[\cap \left]\sqrt{2}; \sqrt{3}\right[= \{\sqrt{2}\}$

F: $]-\infty; +\infty[\setminus]-8; 8[=]-\infty; -8[\cup]8; +\infty[$

134. (K) Legfeljebb hány részre osztja a számegyenest három zárt intervallum?

135. (E) Adottak az $I = [4; 7], J = [6; +\infty[, K =]3; 6[$ és $L =]2; 5]$ intervallumok.

a) **Írd fel intervallum formában a következő halmazokat!**

$L \cap K$ $\quad$ $K \cap I$ $\quad$ $I \setminus J$

$J \setminus I$ $\quad$ $(L \cup I) \setminus K$ $\quad$ $(K \cup J) \setminus L$

b) **Legyen $U =]2; +\infty[$. Határozd meg a következő halmazokat!**

$\overline{L}$ $\quad$ $\overline{J}$ $\quad$ $\overline{K \cap L}$

$\overline{I \cup J}$ $\quad$ $\overline{I \cup K}$ $\quad$ $\overline{J \cup L \cup K}$

136. (E) Legyen a H alaphalmaz $H = [-10; 10]$, továbbá $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 5\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 5\}$. Határozd meg az alábbi halmazokat!

$\overline{C \cup D}$ $\quad$ $\overline{C \cap D}$ $\quad$ $\overline{C \setminus D}$ $\quad$ $\overline{D \setminus C}$ $\quad$ $\overline{D}$ $\quad$ $\overline{\overline{C}}$

137. (E) Az alaphalmaz $H = [-5; 15]$, továbbá adottak a következő intervallumok: $A = [-2; 7], B =]1; 10], C =]6; 11[$. Határozd meg az alábbi halmazokat!

$\overline{A}$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{B \cap C}$	$\overline{C \setminus A}$
$\overline{A \cup B \cup C}$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{(B \setminus C) \setminus A}$	$\overline{B \setminus (C \setminus A)}$
$\overline{(A \cup B) \cap C}$	$\overline{A \cup (B \cap C)}$	$\overline{(A \cap B) \cup C}$	$\overline{A \cap (B \cup C)}$

138. (E) Adottak az $I_n =]0; n]$ intervallumok, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$. Található – e közöttük halmaz - részhalmaz párok? Írd fel intervallummal az $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots$, illetve az $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ halmazt!

139. (E) Adottak az $I_n = \left[-\frac{1}{n}; 0\right[$ és $J_n = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{1}{n}\right\}$ halmazok ($n = 1, 2, \ldots$). Van – e olyan pontja a számegyenesnek, amely minden I_n, illetve J_n halmaznak eleme?

140. (E) Legyenek $J_n = [n-1; n+1]$ intervallumok a számegyenesen, ahol $n = 1, 2, 3, \ldots$ Határozd meg a $J_1 \cap J_2 \cap J_3$ és a $(J_2 \cup J_4) \setminus J_3$ halmazokat!

141. (K) Ábrázold derékszögű koordináta – rendszerben azon pontok halmazát, amelyek

a) **az x – tengelytől nagyobb, mint 3 egység távolságra vannak!**

b) **az y – tengelytől legfeljebb 4 egység távolságra vannak!**

c) **a $P\ (3; 0)$ ponttól kisebb, mint 2 egység távolságra vannak!**

d) **a $Q\ (5; 0)$ ponttól legalább 1 egység távolságra vannak!**

e) **a $P\ (3; 0)$ ponthoz közelebb vannak, mint a $Q\ (5; 0)$ ponthoz!**

f) **az x és y tengelytől is egyenlő távolságra vannak!**

142. (K) Ábrázold az előző feladat a) és b) részében szereplő ponthalmaz metszetét!

143. (K) Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}, B = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y \leq 3\}$. Milyen ponthalmazt határoznak meg a derékszögű koordináta – rendszerben az $(x; y)$ koordinátapárok?

144. (E) Legyen az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon értelmezve a következő ponthalmaz: $\boldsymbol{P = \{\text{origó középpontú, 5 sugarú zárt körlap}\}}$. Hány elemű a $\boldsymbol{P} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ halmaz? Mennyi az eleme, ha a körlap nyílt?

145. (E) Adj meg olyan $\boldsymbol{B}$ ponthalmazt a síkon, amelyre igaz a következő állítás: $\boldsymbol{B}$ a sík egyenesei közül csak a koordináta - rendszer tengelyeit nem metszi, a többit igen!

146. (E) Lehetséges - e, hogy egy racionális számokból álló véges számhalmaz elemeinek $\frac{2}{3}$ – a $\frac{1}{2}$ – nél határozottan nagyobb, $\frac{3}{4}$ – e $\frac{5}{3}$ – nál határozottan kisebb, és a számok fele $\frac{1}{2}$ és $\frac{5}{3}$ közé esik?

147. (E) Az alábbi halmazok közül válassz ki három olyan halmazt, amely végtelen és bármelyik két halmaz közös része is végtelen!

$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 4\}}$

$\boldsymbol{B = \left\{x \in \overline{\mathbb{Q}} \mid x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]\right\}}$

$\boldsymbol{C = \mathbb{Q}}$

$\boldsymbol{D = \,]0; 1[}$

$\boldsymbol{E = \mathbb{N}}$

$\boldsymbol{F = \{\text{a pozitív páros számok halmaza}\}}$

148. (E) Bizonyítsd be, hogy pontosan annyi páros szám van, mint természetes szám!

149. (E) Mutasd meg, hogy az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ halmazok számossága megegyezik!

a) $\boldsymbol{A = \mathbb{Z}^+}$ **és** $\boldsymbol{B = \mathbb{N}}$

b) $\boldsymbol{A = \mathbb{Z}}$ **és** $\boldsymbol{B = \mathbb{N}}$

c) $\boldsymbol{A = \mathbb{Z}^+}$ **és** $\boldsymbol{B = \{11; 12; 13; \ldots\}}$

d) $\boldsymbol{A = \mathbb{Z}^+}$ **és** $\boldsymbol{B = \{0; 1; 4; 9; 16; \ldots\}}$

e) $\boldsymbol{A = \{6; 8; 10; 12; \ldots\}}$ **és** $\boldsymbol{B = \{-3; 0; 3; 6; 9; \ldots\}}$

f) $\boldsymbol{A = \{\text{prímszámok}\}}$ **és** $\boldsymbol{B = \{\text{köbszámok}\}}$

g) $\boldsymbol{A = \mathbb{Q}}$ **és** $\boldsymbol{B = \{\text{pozitív páros számok}\}}$

150. (E) Döntsd el, hogy az A, vagy a B számossága a nagyobb?

a) $\boldsymbol{A = \{egész\ számok\}}$ **és** $\boldsymbol{B = \{egy\ 10\ cm\ sugarú\ körvonal\ pontjai\}}$

b) $\boldsymbol{A = \mathbb{Q}^+}$ **és** $\boldsymbol{B = [0; 1]}$

c) $\boldsymbol{A = \mathbb{Q}}$ **és** $\boldsymbol{B =]0; 10^{-20}[}$

d) $\boldsymbol{A = \{prímszámok\}}$ **és** $\boldsymbol{B = \{egy\ 1\ cm\ sugarú\ körlemez\ pontjai\}}$

e) $\boldsymbol{A = \mathbb{Q}}$ **és** $\boldsymbol{B = \mathbb{R}}$

f) $\boldsymbol{A = \mathbb{Z}}$ **és** $\boldsymbol{B = \mathbb{Q}}$

g) $\boldsymbol{A = |[0; 3]|}$ **és** $\boldsymbol{B = |[0; 1]|}$

151. (E) Igaz – e, hogy ha egy megszámlálhatóan végtelen halmazhoz hozzávesszünk n (ahol n tetszőleges pozitív egész szám) új elemet, akkor a halmaz továbbra is megszámlálhatóan végtelen marad?

152. (E) Legyen K és L két megszámlálhatóan végtelen halmaz. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

A: $\boldsymbol{K \subseteq \mathbb{Z}}$

B: K elemei sorba rendezhetők.

C: K elemei nagyság szerint növekvő sorozatba rendezhetők.

D: K elemei között van legkisebb vagy legnagyobb.

E: K bármely végtelen elemszámú részhalmaza is megszámlálhatóan végtelen.

F: K és $\mathbb{N}$ elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

G: K és $\mathbb{Z}$ elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

H: Ha K valódi részhalamaza L – nek, akkor L számossága nagyobb.

I: K és L elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

J: $K \cup L$ megszámlálhatóan végtelen halmaz.

153. (E) Az alábbi állításokban A és B megszámlálható (véges vagy végtelen) halmazok. A megszámlálhatóan végtelen halmazok számosságát az elemszámhoz hasonlóan jelöljük, tehát pl. $|H| = |\mathbb{N}| = \infty$. Melyik állítás igaz, s melyiknek igaz a megfordítása?

A: Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $|A| = |B|$.

B: Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor $|A| < |B|$.

C: Ha $A \subseteq B$, akkor $|A| \leq |B|$.

D: Ha $|A| = |B|$, akkor az A és B halmaz eleemi között megadható egy kölcsönösen egyértelmű leképezés.

E: Ha van olyan kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, amely az A halmaz elemeit a B halmaz egy valódi részhalmazára képezi le, akkor $|A| \neq |B|$.

F: Ha van olyan kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, amely az A halmaz elemeit a B halmaz egy valódi részhalmazára képezi le, akkor $|A| < |B|$.

G: Ha az A végtelen számhalmaz elemei nagyság szerint növekvő sorba rendezhetők, akkor az A halmaz megszámlálhatóan végtelen.

H: Ha az A végtelen számhalmaz elemei nem rendezhetők nagyság szerint növekvő sorba, akkor az A halmaz nem megszámlálhatóan végtelen.

154. (E) Adott egy szálloda, melyben végtelen sok szoba található (a számozásuk 1 – től kezdődik). A hét egyik napján a szállodában teltház van. A recepciós a hangosbemondón keresztül mire kérje a már megszállt vendégeket, ha

a) **érkezik még egy 4 fős társaság?**

b) **érkezik egy végtelen sok üléssel rendelkező, megtelt busz?**

c) **érkezik még végtelen sok végtelen üléssel rendelkező, megtelt busz?**

d) **éjszaka érkeznek még véges sokan (előre nem tudják mennyien), s ők mindenképpen egymás mellett szeretnének lakni?**

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2002.; Matematika 9.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 9; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2012.; Matematika 12; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Vancsó Ödön; 2002.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(14) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $9-10.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2007.; Plusz 15 próbaérettségi matematikából (középszint); Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából (emeltszint); Maxim Kiadó; Szeged

(18) Ruff János; 2016.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(21) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(22) Saját anyagok