Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Mértani sor

DEFINÍCIÓ: (Sor)
Legyen adott egy (a_n) valós számsorozat. A sorozat összes tagjának összegét, vagyis az $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n + \cdots$ végtelen sok tagú „formális” összeget sornak vagy végtelen valós számsornak (röviden: végtelen sornak) nevezzük.

Megjegyzés:

- *A végtelen sor első n tagjából álló összeget S_n részletösszegnek nevezzük.*
- *Nem feltétlen kell az első tagtól összegezni, képezhetjük akár egy részsorozat összegét is.*

Példa
Tekintsük az $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sorozatot és adjuk össze a tagjait: (S_i jelöli az aktuális részösszeget)

$S_1 = a_1 = 0{,}5; S_2 = a_1 + a_2 = 0{,}75; S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0{,}875; \ldots$

Egyre nagyobb n – eket véve azt látjuk, hogy akár végtelen sok tagot is összeadva, az ebből nyert sor összege nem lesz nagyobb 1 – nél. Minél több tagot összeadva, az összeg minden határon túl megközelíti az 1 – et. Ezáltal mondhatjuk, hogy a végtelen sok tag összege 1.

Minden sorhoz hozzárendeljük a részletösszegek $S_1; S_2; \ldots; S_n; \ldots$ sorozatát, s ez fordítva is igaz, minden sorozathoz lehet sort rendelni a tagjait megadva: $a_1 = S_1$ és $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$.

DEFINÍCIÓ: (Sor összege)
Egy valós sor konvergens, ha a részletösszegeiből képzett S_n sorozat konvergens. A sor összegén az $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; \ldots; S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ részletösszegek sorozatának határértékét értjük, amennyiben az konvergens. Jelöléssel: $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Megjegyzés:
Ha a részletösszegek sorozata nem konvergens, akkor a sornak nem létezik összege.

TÉTEL:
Ha egy végtelen valós számsornak van véges összege, akkor általános tagja 0 – hoz tart.

DEFINÍCIÓ: (Mértani sor)
Ha az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ végtelen sorban az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tagok egy mértani sorozat tagjai, akkor a sort mértani sornak nevezzük.

TÉTEL:
Ha egy mértani sor q kvóciensére $|q| < 1$ teljesül, akkor a mértani sor konvergens és összege $S = \frac{a_1}{1-q}$. Minden más esetben $(|q| \geq 1)$ a mértani sor nem konvergens.

Gyakorló feladatok

1. Számítsd ki a végtelen mértani sor összegét, ha ismert a sor első tagja és hányadosa!

$a_1 = \frac{3}{2}; q = \frac{1}{2}$ $b_1 = 5; q = \frac{1}{3}$ $c_1 = -2; q = -\frac{1}{2}$

$d_1 = 100; q = 0,2$ $e_1 = -2; q = -0,1$ $f_1 = -60; q = -\frac{1}{3}$

$g_1 = 1; q = -\frac{1}{2}$ $h_1 = 3; q = -0,4$ $i_1 = 8; q = 0,5$

$j_1 = 12; q = \frac{7}{6}$ $k_1 = -2; q = 0,1$ $l_1 = -8; q = \frac{3}{4}$

$m_1 = 3; q = 0,4$ $n_1 = 2 \cdot \sqrt{5}; q = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$ $p_1 = 3 \cdot \sqrt{2}; q = 1 - \sqrt{2}$

2. Ismert a végtelen mértani sor első két tagja. Add meg a hányadosát és az összegét!

$a_1 = 4; a_2 = -1$ $b_1 = 3; b_2 = 2$ $c_1 = 2; c_2 = 1,5$

$d_1 = 1; d_2 = 5$ $e_1 = 2; e_2 = \sqrt{2}$ $f_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}; f_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{3} - 1}{6}$

3. Ismert a végtelen mértani sor két tagja. Add meg a hányadosát és az összegét!

$a_2 = 6; a_3 = -3$ $b_4 = 8; b_5 = 12$ $c_1 = 8; c_3 = 2$

4. Ismert a végtelen mértani sor első tagja és összege. Határozd meg a hányadosát!

$a_1 = 3; S = \frac{7}{2}$ $b_1 = 6; S = 600$ $c_1 = 1; S = 4$

5. Határozd meg a mértani sorozat első tagját, ha a hányadosa $\frac{1}{2}$ és a sorozatból képzett sor összege 3!

6. Határozd meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha $a_2 = 1,5$ és $S = 6$!

7. Egy végtelen mértani sor összege $\frac{125}{6}$. Határozd meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha a második és első tag különbsége -30!

8. Egy végtelen mértani sor összege $\frac{32}{3}$. Határozd meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha az első és második tag összege 10!

9. Egy végtelen mértani sor összege 4. Határozd meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha a harmadik és negyedik tag különbsége 1!

10. Egy végtelen mértani sor összege $2a_1$. Határozd meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha az ötödik tagja 1!

11. Egy végtelen mértani sor összege $(1-q)^2$. Határozd meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát, ha a negyedik tagja $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^6$!

12. Mennyi a mértani sor összege, ha ismert két részletösszege: $S_2 = 6$ és $S_3 = 7$?

13. Számítsd ki az $a_n = 1$, illetve a $b_n = (-1)^n$ sorozatokból képzett sorok összegét!

14. Számítsd ki a következő mértani sorok összegét!

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ $B = (-1) + (-2) + (-4) + \cdots$ $C = 3 + 9 + 27 + \cdots$

$D = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ $E = 2 - \frac{10}{3} + \frac{50}{9} - \cdots$ $F = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$

$G = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ $H = 4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \cdots$ $I = 1 + 2 + 4 + \cdots$

15. Számítsd ki a következő mértani sorok összegét!

$A = 10 + 5 + \frac{5}{2} + \dots + \frac{10}{2^{n-1}} + \dots$

$B = 18 + 6 + 2 + \dots + \frac{18}{3^{n-1}} + \dots$

$C = -4 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} - \dots - \frac{4}{5^{n-1}} + \dots$

$D = -6 + 3 - \frac{3}{2} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{6}{2^{n-1}} + \dots$

$E = -4 + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \dots + 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \dots$

$F = 2 - 1 + \frac{1}{2} + \dots + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$

$G = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$

$H = 1 + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6^{n-1}} + \dots$

$I = 9 - 3 + 1 - \dots + (-1)^{n+1} \cdot 3^{3-n} + \dots$

$J = 4 - 3 \cdot \sqrt{2} + 4,5 - \dots$

$K = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} + \dots$

$L = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$

16. Számítsd ki a következő mértani sorok összegét!

$A = \sin 60° + sin^2\, 60° + sin^3\, 60° + \dots + sin^n\, 60° + \dots$

$B = \sin 30° + sin^2\, 30° + sin^3\, 30° + \dots + sin^n\, 30° + \dots$

$C = \cos 45° + cos^2\, 45° + cos^3\, 45° + \dots + cos^n\, 45° + \dots$

$D = \cos 60° + cos^2\, 60° + cos^3\, 60° + \dots + cos^n\, 60° + \dots$

17. Számítsd ki a következő mértani sorok összegét!

$A = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2} + \dots + \frac{1}{(x^2+1)^n} + \dots$

$B = 1 + \frac{x}{x^2+1} + \dots + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{n-1} + \dots$

$C = 1 + \frac{x^2}{x^4+1} + \dots + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{1-n} + \dots$

18. Határozd meg az alábbi mértani sorok összegét!

$A = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n$

$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

19. Igazold, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$!

20. Igazold, hogy az $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$ végtelen sok tagú összeg értéke $\frac{1}{3}$!

21. Számítsd ki a $\log_2\left(\log_5\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[9]{5}\cdot\sqrt[27]{5}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{5}\cdot\ldots\right)\right)$ kifejezés pontos értékét!

22. Oldd meg a következő egyenletet: $x^2+x^3+x^4+\cdots=sin^2 45°$!

23. Egy végtelen mértani sor első tagja $1+2x$, a második tagja $4x^2-1$. Add meg az x értékét úgy, hogy legyen a sornak összege és határozd meg az összeget!

24. Írd fel közönséges tört alakban a következő számokat!

$A=0,\dot{2}$ $\quad B=0,\dot{1}\dot{5}$ $\quad C=0,\dot{2}3\dot{5}$

$D=0,12\dot{2}\dot{8}$ $\quad E=0,\dot{3}$ $\quad F=0,\dot{2}\dot{3}$

$G=0,\dot{1}3\dot{2}$ $\quad H=0,\dot{5}432\dot{1}$ $\quad I=0,\dot{3}\dot{9}$

25. Írd fel közönséges tört alakban a következő számokat!

$A=0,\dot{5}$ $\quad B=0,\dot{1}\dot{2}$ $\quad C=0,0\dot{3}\dot{9}$

$D=0,\dot{1}0\dot{8}$ $\quad E=0,\dot{9}$ $\quad F=0,61\dot{6}0\dot{3}$

$G=0,\dot{2}\dot{1}$ $\quad H=0,12\dot{3}4\dot{5}$ $\quad I=0,\dot{4}$

26. Írd fel $\frac{p}{q}$ tört alakban a következő végtelen szakaszos tizedestörteket! $(p,q\in\mathbb{Z}; q\neq 0)$

$A=1,\dot{4}$ $\quad B=2,\dot{1}\dot{4}$ $\quad C=3,1\dot{2}0\dot{5}$

$D=52,26\dot{1}56\dot{5}$ $\quad E=1,\dot{3}\dot{4}$ $\quad F=2,\dot{4}5\dot{6}$

$G=1,12\dot{4}0\dot{5}$ $\quad H=12,34\dot{5}\dot{6}$ $\quad I=1,23\dot{4}\dot{5}$

27. Írd fel $\frac{p}{q}$ tört alakban a következő végtelen szakaszos tizedestörteket! $(p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0)$

$A = 5,\dot{4}$ $\quad B = -12,\dot{3}\dot{9}$ $\quad C = 2,\dot{1}5\dot{7}$

$D = 2,3\dot{4}\dot{5}$ $\quad E = 1,2\dot{3}4\dot{5}$ $\quad F = 4,\dot{3}21\dot{4}$

$G = 3,0\dot{3}$ $\quad H = 3,\dot{2}1\dot{4}$ $\quad I = 13,12\dot{3}\dot{4}$

28. Írd fel két egész szám hányadosaként a következő végtelen szakaszos tizedes törteket két különböző módszerrel!

$A = 0,\dot{1}$ $\quad B = 0,\dot{2}0\dot{3}$ $\quad C = 9,8\dot{7}\dot{6}$

29. Add meg a művelet eredményét $\frac{p}{q}$ tört alakban, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q \neq 0$.

$A = 0,\dot{8} + 0,\dot{7}$ $\quad B = 1,\dot{3} \cdot 2,\dot{1}$ $\quad C = \left(0,\dot{1}\right)^3$

$D = \frac{1}{0,\dot{3}\dot{6}}$ $\quad E = 0,\dot{6}^2 - 0,\dot{5}^2$ $\quad F = 1,\dot{2} \cdot 2,\dot{8}$

$G = \left(2,\dot{7}\right)^3$ $\quad H = \frac{1}{0,\dot{2}\dot{5}}$ $\quad I = \left(0,\dot{8}0\dot{1} + \frac{1}{0,\dot{8}0\dot{1}}\right)^2$

$J = \frac{0,\dot{4} \cdot 0,\dot{7}}{0,\dot{4}\dot{7}}$ $\quad K = \left(2 - 0,\dot{2}0\dot{7}\right)^2$ $\quad L = (1,\dot{7}00\dot{2})^3 - (0,\dot{8}00\dot{1})^3$

30. Add meg a művelet eredményét $\frac{p}{q}$ tört alakban, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q \neq 0$.

$$1 + \frac{1}{0,\dot{4}\dot{5}} + \frac{1}{\left(0,\dot{4}\dot{5}\right)^2} + \frac{1}{\left(0,\dot{4}\dot{5}\right)^3} + \frac{1}{\left(0,\dot{4}\dot{5}\right)^4}$$

31. Igazold a következőket!

$A = 0,\dot{9} = 1$ $\quad B = 0,4\dot{9} = 0,5$ $\quad C = 0,\dot{1}\dot{7} = \frac{17}{99}$ $\quad D = 1,1\dot{9} = \frac{6}{5}$

32. Bizonyítsd be, hogy az $A = 3,999\ldots. = 4$ (a végtelen sok tizedesjegy mindegyike 9)!

33. Határozd meg az x számjegy értékét, ha tudjuk, hogy az $A = 0,\dot{4}\dot{x}$ szám egy racionális szám négyzete!

34. Tudjuk, hogy az $A = \frac{0,\dot{x}\dot{2}}{0,\dot{1}\dot{x}}$ hányados egész szám. Határozd meg az x számjegy értékét!

35. Oldd meg az x számjegyre az $1,\dot{x} \cdot 3,\dot{x} = \frac{9x-1}{10}$ egyenletet!

36. Zoli a számológépével kísérletezett és érdekes dolgot tapasztalt. Kezdetben beírt egy kétjegyű természetes számot, elosztotta 9 – cel, majd az így kapott számot oszotta 9 – cel, ezután ezt osztatotta 9 – cel és így tovább. Zoli azt vette észre, hogy akármelyik kezdeti számból indult is ki, előbb – utóbb eredményül mindig 0 – t kapott. Hogy lehetséges ez? (Hiszen pozitív számnak a fele is mindig pozitív.) Mit kap eredményül Zoli, ha az előző eljárásban:

***a)* tetszőlegesen nagy (2 – nél többjegyű) számmal kezd;**

***b)* 9 helyett csak 2 – vel végzi az osztásokat;**

***c)* negatív számmal kezd?**

37. Ildi az $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$ végtelen összeg értékét szeretné meghatározni. Ha az $(1-1) + (1-1) + \cdots$ zárójelezést alkalmazza, az összeg értéke 0 lesz; ha pedig az $1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$ zárójelezést, akkor az összeg értéke 1. Hogyan lehetséges ez? Melyik a helyes eredmény?

38. Egy α hegyesszög egyik szárán a csúcstól x távolságra jelöljünk ki egy P pontot. Vetítsük ezt merőlegesen a másik szárra. A most kapott P_1 pontot vetítsük vissza merőlegesen a másik szárra. Folytassuk ezt végtelen sokszor. Mekkora az így keletkező törött vonal hossza?

39. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszögnek rajzoljuk meg a középvonalait. A kapott középvonal - háromszögnek újra rajzoljuk meg a középvonalait. Folytassuk ezt végtelen sokszor. Határozd meg a keletkezett középvonal - háromszögek kerületének, illetve területének összegét!

40. **Vegyünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget (Δ_1), majd távolítsuk el a középvonalai által alkotott háromszög belsejét (Δ_2). Tegyük ezt meg újra a fennmaradó három háromszöggel (Δ_3), majd ezt ismételjük a végtelenségig. A keletkezett alakzat neve Sierpinski – háromszög. Mekkora az eltávolított részek területe? Mekkora az összes berajzolt középvonalak hossza?**

41. **Egy kartonlapból egységnyi területű szabályos háromszöget készítünk, majd a középvonalak által meghatározott négy háromszög közül a felsőt pirosra, a bal oldalit sárgára és a jobb oldalit kékre színezzük (a háromszöget az alapjára állítottuk). Ezután az eljárást a középső, még színezetlen háromszöggel folytatjuk: behúzzuk a középvonalait, s az így kapott négy háromszög közül a felsőt pirosra, a bal oldalit sárgára és a jobb oldalit kékre színezzük stb. Tetszőlegesen sokáig folytatva a színezést, mekkora lesz a piros, sárga, kék és fehér (színezetlen) területek nagysága?**

42. **Tekintsünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget, majd harmadoljuk minden oldalát. A középső harmadokra írjunk kifelé újabb szabályos háromszögeket. Az előbbi lépést ismételjük meg most már ezen alakzat oldalaival: harmadoljuk mindet, majd írjunk a középső harmadokra kifelé szabályos háromszögeket. Most képzeletben folytassuk ezt a tevékenységet a végtelenségig. Ezzel egy „csillag" keletkezik: a végső formát Koch – féle hópehelynek nevezik, amely önhasonló alakzat (fraktál), vagyis bármilyen kis részletet tekintünk belőle az hasonló az egészhez. Mekkora a kialakuló alakzat kerülete és területe?**

43. **Egy 2 egység oldalú szabályos háromszög beírt körébe szabályos háromszöget írunk. E háromszög beírt körébe szintén szabályos háromszöget írunk. Határozd meg az összes háromszög kerületének, illetve az összes kör területének összegét, ha az eljárást végtelen sokszor ismételjük!**

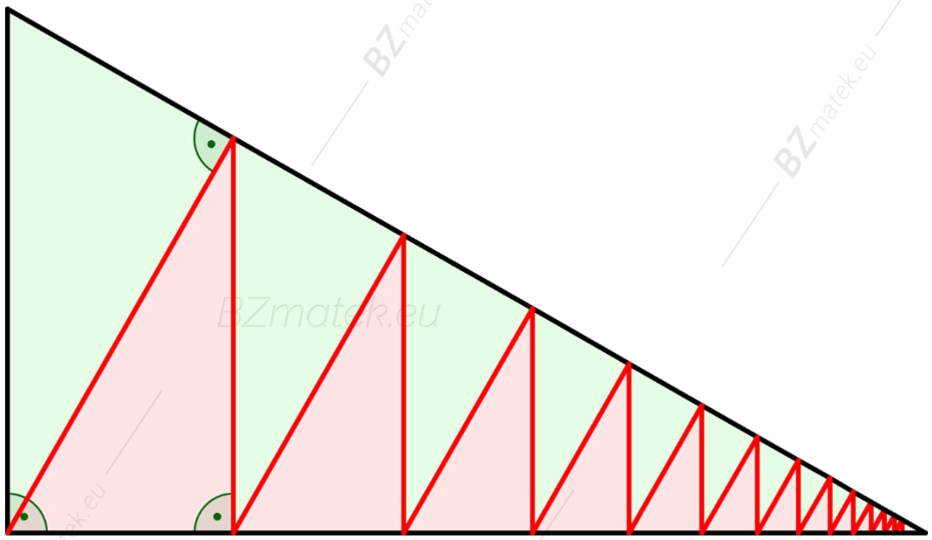
44. **Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben vegyük fel az átfogóval párhuzamos középvonalat! A keletkezett új egyenlő szárú derékszögű háromszögben ismét rajzoljuk be az átfogóval párhuzamos középvonalat. Az eljárást végtelen soksor ismételve határozd meg a középvonalak hosszának összegét, ha $AC = CB = 1$!**

45. **Egy derékszögű háromszög egyik szöge $30°$, szemközti oldala a hosszúságú. Állítsunk merőlegest az átfogóra a derékszögű csúcsból, a kapott P_1 talppontból pedig a hosszabbik befogóra. Az így kapott P_2 talppontból újra állítsunk merőlegest az átfogóra. Ismételjük meg ezt végtelenszer. Mekkora a keletkező törött vonal hossza?**

46. Az ábrán egy kis ország derékszögű háromszög alakú zászlaját látjuk. A háromszög rövidebb befogója $80\ cm$, a hosszabb $140\ cm$. Minden egyszínű kis háromszög hasonló a zászlóhoz.

a) **Add meg a színes részeket elválasztó töröttvonal hosszát!**

b) **Hányszor nagyobb a zöld színű részek területe a piros színű részeknél?**



47. Rajzoljunk egy a oldalú négyzetet. A négyzet oldalfelező pontjai által meghatározott négyszögben kössük össze az oldalfelezőpontokat. Ismételjük ezt meg végtelen sokszor. Mekkora a keletkező négyzetek kerületének és területének összege?

48. Az a oldalú négyzet oldalait osszuk fel az egyik csúcspontjától kezdve $2:3$ arányban. A kapott osztópontok ismét négyzetet határoznak meg. Ennek az oldalait is osszuk fel az adott arányban. Folytassuk ezt végtelen sokszor. Mekkora a kapott négyszögek kerületének, illetve területének összege?

49. Egy egységnégyzet egyik oldalát harmadoljuk, és a középső harmad fölé befelé írt négyzetet távolítsuk el. Ezután az üres hely legbelső oldalát ismét harmadoljuk, majd írjunk a középső harmad fölé kifelé négyzetet. Ezt folytassuk, váltakozva a befelé írt négyzet kivágásával és a kifelé írt négyzet hozzáadásával. Mennyi a keletkezett alakzat területe?

50. Képzeljük el a következő alakzatot. Induljunk ki egy négyzetből, harmadoljuk minden oldalát, és a középső harmadokra kifelé rajzoljunk újabb négyzeteket. Az így létrejött külső határoló szakszokat ismét harmadoljuk, majd a középső harmadokra kifelé rajzoljunk négyzeteket – és így tovább, folytassuk a végtelenségig az eljárást. Mekkora a végül kialakuló alakzat kerülete? Mekkora a területe?

51. Tekintsünk egy egység oldalú négyzetet. Osszuk fel az oldalakkal párhuzamos egyenesek segítségével 9 egybevágó négyzetre, majd hagyjuk el a középső négyzetet. A megmaradt 8 négyzettel ismételjük meg az eljárást. Add meg az n – edik lépés után keletkező síkidom kerületét (a határoló szakaszok hosszának összegét) és területét!

52. Egy r sugarú körbe négyzetet írunk, amibe érintőkört, majd ismét négyzetet. Folytassuk ezt végtelenszer. Mekkora a körök, illetve négyzetek kerületeinek összege? Határozd meg a körök és négyzetek területeinek összegét!

53. Írjunk egy r sugarú körbe szabályos hatszöget. A kapott hatszög beírt körébe írjunk újra szabályos hatszöget, és így tovább. Mekkora lesz a beírt hatszögek kerületeinek, illetve területeinek az összege?

54. Az AB szakasz hossza $10\ cm$. Az ábra alapján csigavonalat rajzolunk félkörök segítségével úgy, hogy mindegyik körív sugara fele az előzőnek.

a) Milyen hosszú az n – edik félkörív hossza?

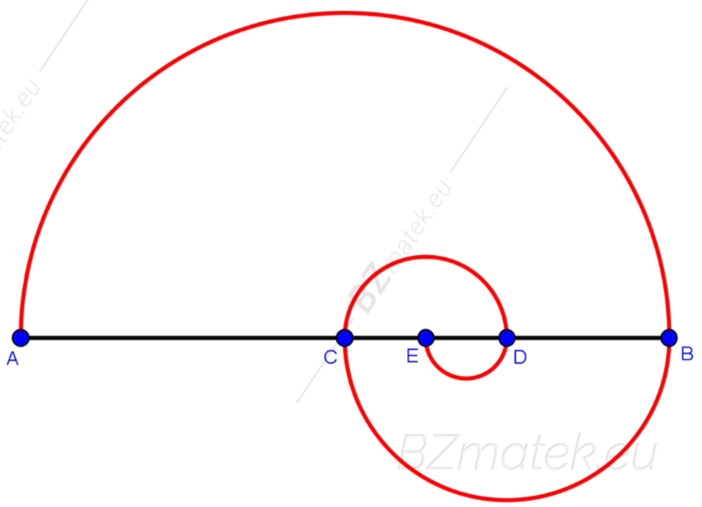
b) Milyen hosszú az első 10 félkörívből álló csigavonal?

c) Mikor lesz a csigavonal hossza kb. $30\ cm$?

d) Lehet - e a csigavonal hossza kb. $50\ cm$?

e) Hány lépés után kapunk hosszabb spirálist, mint az AB átmérőjű kör kerülete?

f) Mekkora lesz 10 lépés után a spirális hossza, ha nem befelé, hanem kifelé haladunk? (A második félkör sugara $10\ cm$, a harmadiké $20\ cm$, stb.)



55. Egy r sugarú gömbbe kockát írunk, a kapott kockába pedig gömböt. E gömbbe újra kockát írunk, és így tovább. Hatáozd meg a kockák térfogatának összegét! Hányszorosa az eredeti gömb felszínének a kapott kockák felszínének összege?

56. Egy fáraó négyzet alapú, egymásra épült csonka gúlákból építteti a saját és utódai piramisát úgy, hogy a csonka gúlák hasonlók, és térfogatuk a közvetlen alattuk lévők térfogatának fele. Elérheti - e a piramistorony a $10\ m$ magasságot, ha a legalsó magassága $2\ m$?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Schlegl István; 2015.; Sokszínű matematika - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Trembeczki Csaba; 2016.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 1.; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 3. feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(9) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(10) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(11) Saját anyagok