Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Sorozatok határértéke

A határérték szemléletes megfogalmazása:
Tekintsük az $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ sorozat tagjait:

$a_1 = 3; a_2 = 2{,}5; a_3 = 2{,}\dot{3}; a_4 = 2{,}25; a_5 = 2{,}2; \ldots; a_{10} = 2{,}1; \ldots; a_{100} = 2{,}01; \ldots$

Azt sejtjük, hogy a sorozat tagjai a végtelenhez tartva megközelítik az $A = 2$ értéket.

A számegyenesen legyen a 2 egy katonai bázis helye, a sorozat tagjai pedig a közeledő ellenség katonái. A bázishoz tartozik egy védett terület (környezet), amelyet egy kerítés (küszöb) véd. Amennyiben a fél terület szélessége, vagyis a bázistól a kerítésig terjedő szakasz hossza (a környezet sugara) $0{,}01$, akkor a sorozat első 100 tagja (ellenséges katona) nem tartózkodik a kerítésen belül, vagyis kívül esnek a környzeten, nem lépték át a küszöböt. Ha tovább szűkítjük a terület fél szélességét $0{,}001$ – re, akkor a sorozat első 1000 tagja marad a területen kívül. Ebből következik, hogy bármennyire szűkítjük a területünket, a határon belül végtelen sok, rajta és azon kívül véges sok tagja szerepel a sorozatnak. Azaz 2 bármely környezetén kívül mindig csak véges sok tagját, azon belül viszont végtelen sok tagját találjuk a sorozatnak. Másképpen fogalmazva, ha felállítottuk a kerítést valahová (megadtuk a környezet sugarát), akkor a sorozat tagjai között egy idő után csak olyanokat találunk, amelyek a területen belül tartózkodnak. Ezek alapján minden környezethez megadható egy olyan küszöbszám, hogy az utána következő összes tag már a 2 adott környezetén belül legyen. A küszöb értéke függ az udvar szélességétől: nagyobb területre hamarabb, kisebb udvarra később jut be a sorozat.

DEFINÍCIÓ: (Távolság)
A számegyenes A és B pontjának (az A és B valós számoknak) $d\,(A, B)$ – vel jelölt távolságán a $d\,(A, B) = |A - B|$ valós számot értjük.

DEFINÍCIÓ: (Környezet)
Egy tetszőleges A valós szám $\varepsilon > 0$ (epszilon) sugarú környezetén azokat az x valós számokat értjük, amelyek A – tól vett távolsága a számegyenesen kisebb, mint ε.
Jelöléssel: $|x - A| < \varepsilon$, vagy $x \in \,]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$, vagy $A - \varepsilon < x < A + \varepsilon$.

TÉTEL:
Végtelen sok egymásba skatulyázott, zárt intervallumnak van közös pontja. Amennyiben az intervallumok hossza minden pozitív számnál kisebbé válik, akkor egy közös pont van.

DEFINÍCIÓ: (Sorozat határértéke)
Az A számot az (a_n) valós számsorozat határértékének nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található olyan N pozitív egész, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (ejtsd: limesz n tart a végtelenhez); $a_n \to A$.

Megjegyzés:

- *Az A számot az (a_n) valós számsorozat határértékének nevezzük, ha A bármely környezetén belül a sorozatnak végtelen sok, azon kívül pedig csak véges sok tagja van.*

- *Az $|a_n - A|$ kifejezés a sorozat n – edik tagjának A – tól való eltérését jelöli.*

- *A legkisebb N számot küszöbindexnek (küszöbszámnak) nevezzük.*

- *A küszöbszám függ a környezet sugarától: minél szűkebb a környezet (minél kisebb az ε értéke), annál későbbi taggal lép a sorozat a környezetbe (az N értéke annál nagyobb).*

- *A sorozat határértékének vizsgálata megegyezik a függvények $+\infty$ - ben vett határértékének vizsgálatával.*

- *A sorozat határértéke nem feltétlenül eleme a sorozatnak.*

DEFINÍCIÓ:
Egy (a_n) valós számsorozat a $+\infty$ - hez ($-\infty$ - hez) tart, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N szám, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > \varepsilon$ ($a_n < \varepsilon$). Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, illetve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

DEFINÍCIÓ: (Konvergens sorozat)
Ha egy sorozatnak van $A \in \mathbb{R}$ határértéke, akkor konvergens sorozatnak nevezzük.

Megjegyzés:

- *A konvergens sorozat tetszőlegesen közel kerül határértékéhez.*

- *Ha a sorozat a határértéket egy oldalról közelíti meg, akkor bal oldali, vagy jobb oldali határértékről beszélünk. Gyakori azonban a mindkét oldali közelítés. Pl.: $(a_n) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$*

DEFINÍCIÓ: (Nullsorozat)
Ha egy sorozat konvergens, s határértéke 0, akkor nullsorozatnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Divergens sorozat)
Ha egy sorozatnak nincs határértéke, vagy a határértéke $\pm\infty$, akkor divergens sorozatnak nevezzük.

Megjegyzés:
Példák divergens sorozatokra: $(a_n) = n^2 + 3; (b_n) = -n^{11}; (c_n) = (-3)^n$.

TÉTEL:
Minden konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

TÉTEL:
Minden monoton és korlátos sorozat konvergens.

TÉTEL:
Ha egy sorozat monoton és konvergens, akkor korlátos.

TÉTEL:
Minden konvergens sorozat korlátos.

Megjegyzés:

- *A korlátosság a határérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele.*
  Pl.: $(a_n) = (-1)^n$ *korlátos, de nem konvergens sorozat.*
- *Ha a sorozat korlátos és konvergens, attól még nem biztos, hogy monoton.*
- *Növekvő (csökkenő) sorozat esetén az alsó (felső) korlát az első elem, a felső (alsó) korlát pedig a határérték.*
- *Komplex vizsgálat esetén célszerű először a határértéket kiszámolni, majd a monotonitást áttekinteni, s ezután megadni a korlátosságot.*

TÉTEL:
Ha az a_n nullsorozat és a b_n sorozat korlátos, akkor a két sorozat megfelelő tagjai szorzatából képzett sorozat is nullsorozat.

TÉTEL:
Ha az a_n és b_n konvergens sorozatok, továbbá $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, illetve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, ekkor teljesülnek a következők:

1. az $(a_n + b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

2. az $(a_n - b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

3. az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

4. az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $(B; b_n \neq 0)$

5. a $(c \cdot a_n)$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ $(c \in \mathbb{R})$

6. az $({a_n}^{b_n})$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = A^B$

TÉTEL:
Ha az a_n konvergens sorozat $(a_n \geq 0)$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, akkor a $\sqrt{a_n}$ sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

TÉTEL:
Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

TÉTEL: (Rendőr - elv)
Ha bármely n – re $a_n \leq c_n \leq b_n$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, illetve $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, akkor $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

DEFINÍCIÓ: (Cauchy - sorozat)
Az (a_n) valós számsorozatot Cauchy – sorozatnak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz található olyan N pozitív egész, hogy minden $m, n > N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Megjegyzés:
Az, hogy egy számsorozat tetszőlegesen megközelít egy számot, megegyezik azzal, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást.

TÉTEL:
Az (a_n) valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy – sorozat.

TÉTEL:
Minden korlátos valós számsorozatnak van legalább egy konvergens részsorozata.

TÉTEL:
Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens és határértéke egyenlő az eredeti sorozat határértékével.

TÉTEL:
Ha egy sorozatnak van két konvergens részsorozata, amelyek határértéke különböző, akkor a sorozat divergens.

TÉTEL:
Ha az a_n és b_n konvergens sorozatok, továbbá $a_n \leq b_n$ minden $n \geq k$ (k rögzített szám), akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

TÉTEL:
Legyen a_n és b_n valós számsorozat.

1. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = +\infty$, illetve $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \pm\infty$ aszerint, hogy $B > 0$, vagy $B < 0$.

2. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$, illetve $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \pm\infty$ aszerit, hogy $B < 0$, vagy $B > 0$.

3. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

4. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

5. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

6. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

7. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

8. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$ aszerint, hogy $B > 0$, vagy $B < 0$.

9. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$ aszerint, hogy $B < 0$, vagy $B > 0$.

10. Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $(a_n > 0)$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \pm\infty$, aszerint, hogy $a_n > 0$, vagy $a_n < 0$.

Megjegyzés:
A sorozatok határértékére vonatkozó műveletek alóli kivételek, úgy nevezett határozatlan esetek a következők: $(\pm\infty) - (\pm\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \cdot (\pm\infty)$; 1^{∞}; 0^0; $(\pm\infty)^0$.

Nevezetes határértékek:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, ha\ q > 1 \\ 1, ha\ q = 1 \\ 0, ha\ |q| < 1 \\ nem\ létezik, ha\ q \leq -1 \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a > 0$

- $P\ (n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \qquad (a_k \neq 0; k \geq 1)$

  A P polinomfüggvény határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty, ha\ a_k > 0 \\ -\infty, ha\ a_k < 0 \end{cases}$

- $P\ (n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 \qquad (a_k \neq 0; k \geq 1)$

  $Q\ (n) = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0 \qquad (b_q \neq 0; q \geq 1)$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, ha\ k < q \\ \frac{a_k}{b_q}, ha\ k = q \\ +\infty, ha\ k > q \text{ és } \frac{a_k}{b_q} > 0 \\ -\infty, ha\ k > q \text{ és } \frac{a_k}{b_q} < 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e \approx 2{,}718$ (Euler – féle irracionális szám)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$

Gyakorló feladatok

1. **Add meg a P középpontú, ε sugarú környezetet intervallumként!**

A: $P = 2,5$ és $\varepsilon = 4,7$ B: $P = 6$ és $\varepsilon = 2$ C: $P = -1$ és $\varepsilon = 1$

D: $P = 2,3$ és $\varepsilon = 3,2$ E: $P = 3$ és $\varepsilon = 2$ F: $P = 8$ és $\varepsilon = \frac{2}{7}$

G: $P = -10$ és $\varepsilon = 0,001$ H: $P = \sqrt{5}$ és $\varepsilon = 1 + \sqrt{5}$ I: $P = 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. **Add meg az intervallumokat környezetként (P középpontjával és ε sugarával)!**

$A = \left]\frac{3}{5}; \frac{19}{7}\right[$ $B =]0,2; 1,4[$ $C =]-3; 1[$

$D =]-2,4; -1[$ $E =]3,7; 5,3[$ $F =]-1,8; 3,6[$

$G =]12,6; 13,2[$ $H =]-0,5; 1,8[$ $I =]-5; -2,7[$

$J = \left]\frac{6}{5}; \frac{22}{7}\right[$ $K = \{x \in \mathbb{R} \mid 1,3 < x < 1,8\}$ $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4,6\}$

3. **Írd fel a következő P számok ε sugarú környezetébe eső egész számokat! Határozz meg kettő, az adott ε sugarú környezetbe eső $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ - beli számot is! Add meg intervallumként a környezetet!**

A: $P = 1$ és $\varepsilon = 2$ B: $P = 3,4$ és $\varepsilon = 0,5$

C: $P = 2,46$ és $\varepsilon = 0,2$ D: $P = 1 + \sqrt{2}$ és $\varepsilon = \sqrt{2} - 1$

4. **Add meg az $A = 7$ szám $\varepsilon = 4$ sugarú környezetébe eső valós és természetes számokat!**

5. **Van - e közös része az egyes intervallumsorozatnak? Melyek egymásba ágyazottak?**

$A_n = [n; n+2]$ $B_n =]-n; n[$ $C_n = [n-3; 5n[$

$D_n = \left]10 - \frac{1}{n}; 10 + \frac{1}{n}\right[$ $E_n = \left]10; 10 + \frac{1}{n}\right]$ $F_n = \left[10; 10 + \frac{1}{n}\right[$

$G_n = \left[1 + \frac{1}{n}; 2 + \frac{2}{n}\right]$ $H_n = \left[2 + \frac{1}{n}; 2 + \frac{2}{n}\right]$ $I_n = \left[2 - \frac{1}{2^n}; 3 + \frac{1}{3^n}\right]$

6. Van - e közös része az egyes egymásba skatulyázott intervallumoknak? Ha igen, akkor add is meg!

$A_n = \left[0; \frac{1}{n^2}\right]$ $\quad B_n = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 1\right[$ $\quad C_n = \left[2 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right]$

$D_n = \left]2 - \frac{1}{n}; 3\right[$ $\quad E_n = \left]\sqrt{n}; \sqrt{n+1}\right[$ $\quad F_n = \left]0; 2^{-n}\right]$

$G_n = \left[1; 2 + 10^{-n}\right[$ $\quad H_n = \left[3; 3 + 2^{-n}\right[$ $\quad I_n = \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n}; 1\right]$

7. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{2}{3n+7}$ $\quad b_n = \frac{5n+8}{n-1}$ $\quad c_n = \frac{n^5 - 4n + 7}{n^4 + 5n - 100\pi}$

$d_n = \frac{9n^2+1}{-70n+12}$ $\quad e_n = \frac{-2n^3 + n^2 - n}{3n^3 - 12n + 2008}$ $\quad f_n = \frac{n^2 + 7n}{n^3 - n + 2}$

$g_n = \frac{2n^{10} - 9n^7 - 11}{-6n^8 - n^3}$ $\quad h_n = \frac{n^{22} + 23n}{21n^{19} - \pi \cdot n^{18}}$ $\quad i_n = \frac{13n^2 - 4n + 1}{7n + 100}$

$j_n = \frac{4 - 5n}{9n - 22}$ $\quad k_n = \frac{n^5 + 6n - 10^{10}}{2n^5 + 9n^3 + 5}$ $\quad l_n = \frac{n^4 + 19}{n^2 - 5n^3}$

8. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{8n+3}{11n-7}$ $\quad b_n = \frac{7}{2n^2 - 5n}$ $\quad c_n = \frac{n^2 - 6n}{n + 1000}$

$d_n = \frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 5n}$ $\quad e_n = \frac{n^2 - 4n}{n^3 - 100n^2}$ $\quad f_n = \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 - 8n + 6}$

$g_n = \frac{n^3 + 4n + 10}{n^5 - 1000n^4 + n}$ $\quad h_n = \frac{12 - 7n}{14n - 35}$ $\quad i_n = \frac{245n + 312}{n^2 - 4n - 1}$

$j_n = \frac{8n^2 + 5n + 4}{3n^2 - 7n + 11}$ $\quad k_n = \frac{9n^5 + 3n^3 - 7n^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot n^5 - 8n^4 + 5n}$ $\quad l_n = \frac{n - 11}{n^2 + 4n + 3\pi}$

9. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{3}{5n+1}$ $b_n = \frac{2n+9}{3n-1}$ $c_n = \frac{2n^2-n}{5n+3}$

$d_n = \frac{n^2-7n+1}{3n^2+7}$ $e_n = \frac{3n+2}{5n^2-2n-1}$ $f_n = \frac{13n^3-7n^2+8n}{\sqrt{2}\cdot n-2n^2+1}$

$g_n = \frac{2n^3-3n^2+4n+5}{5n^3+20n^2+3n+1}$ $h_n = \frac{3n^2-1}{2n+1}$ $i_n = \frac{n^2+4n-1}{n^3+7n+2}$

$j_n = \frac{2n^2+1}{50n+12}$ $k_n = \frac{n^4-4n+7}{n^4+5n-100}$ $l_n = \frac{3n^3-5n^2+\pi\cdot n}{7n^4+3n^3-\sqrt{3}\cdot n+1}$

10. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{n^3-4n}{n^2+2n}$ $b_n = \frac{5n^2-4n+3}{2n^2-n-2}$ $c_n = \frac{2n+1}{7n-5}$

$d_n = \frac{8n-1}{2n+3}$ $e_n = \frac{5n^{2022}-2021\pi}{n^{2023}-n+2024}$ $f_n = \frac{2n^2+1}{50n+12}$

$g_n = \frac{3n^3-4n-8}{2n^3-n^2}$ $h_n = \frac{n^2-2}{3n} - \frac{2n^2-n}{6n+5}$ $i_n = \frac{(n^3+1)^2}{1+n^6}$

$j_n = \frac{(n-2)^3}{8n^2+7n}$ $k_n = \frac{(n-1)\cdot(n+2)}{(3n+4)^2}$ $l_n = \frac{(n-6)\cdot(n+6)}{(2n+1)^3}$

11. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}-1}{n}$ $b_n = \frac{3n-4}{\sqrt{n^2+5}}$ $c_n = \frac{3\cdot\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}}$

$d_n = \sqrt{\frac{2n^2+1}{n^2+8}}$ $e_n = \frac{\sqrt[3]{2n^2-7n}}{n+5}$ $f_n = \frac{\sqrt[5]{3n^5+2}}{\sqrt{n^2}}$

$g_n = \frac{2n-3\cdot\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{25n^2+1}}$ $h_n = \frac{1+2\cdot\sqrt{n+2}}{\sqrt{100n+1}}$ $i_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$

$j_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{n^2+5}}$ $k_n = \sqrt{\frac{1}{8n+1}}$ $l_n = \frac{\sqrt{4n+5}}{1+\sqrt{9n+1}}$

12. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}$ $\quad b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ $\quad c_n = \frac{\sqrt[5]{4n^5-9n+3}}{\sqrt{n^2+6}}$

$d_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}$ $\quad e_n = \frac{\sqrt{n+2}+5\cdot\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $\quad f_n = \frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+4}}$

$g_n = \frac{\sqrt[3]{8n^2-5n}}{n+2}$ $\quad h_n = \frac{n-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+2n}$ $\quad i_n = \sqrt{\frac{2n^2+1}{n^2+5}}$

13. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$ $\quad b_n = \sqrt{3n+10}-\sqrt{3n}$ $\quad c_n = \sqrt{2n+8}-\sqrt{n+2}$

$d_n = \sqrt{n+4}-\sqrt{n}$ $\quad e_n = \sqrt{n-1}+\sqrt{n}$ $\quad f_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-3}$

$g_n = \sqrt{3n+1}-\sqrt{n-5}$ $\quad h_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $\quad i_n = \sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-4}$

$j_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-5}$ $\quad k_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ $\quad l_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-2}$

14. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = n-\sqrt{n^2+4n}$ $\quad b_n = \sqrt{4n^2-6}-2n$ $\quad c_n = \sqrt{n^2+2}-n$

$d_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$ $\quad e_n = \sqrt{n^2+n}-n$ $\quad f_n = \sqrt{n^2-6n}-n$

$g_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}$ $\quad h_n = \sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-5n+1}$

$i_n = \sqrt{n^4+2n^2+5}-\sqrt{n^4-4n^2-1}$ $\quad j_n = \sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-2n+3}$

$k_n = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)$ $\quad l_n = n-\sqrt{n^2+5n}$

$m_n = \sqrt{n^2+n-1}-n$ $\quad p_n = \sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}$

$q_n = \frac{\sqrt[n]{9}-1}{\sqrt[n]{3}-1}$ $\quad r_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{2\cdot\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}}$

15. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+5}}$ $b_n = \frac{3^n}{5^{n-2}}$ $c_n = \frac{5^{n+2}-7}{5^n}$

$d_n = \frac{2^n - 5^{n+2}}{3^{n-3}}$ $e_n = \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}+5^n}$ $f_n = \frac{5^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}}{2\cdot 5^{n+1}+4n}$

$g_n = \frac{3^{n+2}}{5^n+3\cdot 2^n}$ $h_n = \frac{5^{n+2}-2\cdot 3^{n+1}}{2\cdot 5^n+4}$ $i_n = \frac{3\cdot 9^n+(-1^n)\cdot 5^n}{7^n}$

$j_n = \frac{7^{n+1}+(-1)^n}{7^n}$ $k_n = 3+(-1)^n\cdot\frac{n-2}{n^2}$ $l_n = 2+(-1)^n\cdot\frac{n+4}{n^2}$

16. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2015}$ $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2013}$ $c_n = \frac{3^n-3^{-n}}{3^n+3^{-n}}$

$d_n = \frac{2\cdot\log_3 n}{\log_3(9n)}$ $e_n = \frac{\log_2\left(\frac{7}{n}\right)}{\log_2 n}$ $f_n = \frac{2017}{2016^{n+1}}\cdot\cos(n\cdot\pi)$

$g_n = \frac{2019^{2017n}}{n!}$ $h_n = \frac{n^{2010}}{2^n}$ $i_n = \frac{n^{222}}{7^{n+1}}$

$j_n = \frac{10^{100n}}{n!}$ $k_n = \frac{3\cdot 2^{2n+1}}{5\cdot 4^n-1}$ $l_n = \frac{n^{2018}}{3^n}$

17. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ $b_n = \left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}$ $c_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$d_n = \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}$ $e_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $f_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

$g_n = \left(\frac{n+5}{n-2}\right)^{n}$ $h_n = \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{5n+2}$ $i_n = \left(\frac{n+6}{n}\right)^{2n}$

$j_n = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n}$ $k_n = \left(\frac{3n-3}{3n+5}\right)^{7n-5}$ $l_n = \left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n}$

18. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \left(1 + \frac{10}{n}\right)^n$ $\quad b_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$ $\quad c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$

$d_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$ $\quad e_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$ $\quad f_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$

$g_n = \left(\frac{3n-2}{1+3n}\right)^n$ $\quad h_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $\quad i_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$j_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad k_n = \left(\frac{n+6}{n-1}\right)^n$ $\quad l_n = \left(\frac{2n+6}{2n+1}\right)^{2n}$

19. Határozd meg a következő sorozatok határértékét!

$a_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{1+4+\dots+n^2}$ $\quad b_n = \frac{1+2+\dots+n}{(2n-3)\cdot(n-1)}$

$c_n = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{1+2+\dots+n}$ $\quad d_n = \frac{1+2+\dots+n}{(5n-2)\cdot(n-3)}$

$e_n = \frac{2+4+\dots+2n}{3n-5}$ $\quad f_n = \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{13n^2}$

$g_n = \frac{2n^2+3}{1+2+3+\dots+n}$ $\quad h_n = \frac{n^3-2n^2+3}{1^2+2^2+\dots+n^2}$

$i_n = \frac{1!\cdot 1 + 2!\cdot 2 + \dots + n!\cdot n}{(n+1)!}$ $\quad j_n = \frac{1-2+3-4+5-\dots-2n}{\sqrt{n^2+5n}}$

$k_n = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n\cdot(2n+2)}$ $\quad l_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$m_n = \frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$ $\quad p_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

20. Határozd meg az $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ általános taggal adott sorozat határértékét!

21. Mennyi az $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ sorozat határértéke?

22. Határozd meg az $a_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$ sorozat határértékét! ($i > 0$; $i \in \mathbb{R}$)

23. Határozd meg a következő sorozatok határértékét a rendőr - elv segítségével!

$a_n = \frac{n-3}{n+8}$ $\quad b_n = \frac{n+1}{5^n}$ $\quad c_n = \sqrt[n]{7}$ $\quad d_n = \sqrt[n]{10^n + 324}$

24. A következő sorozatok közül válaszd ki a konvergenseket és határozd meg ezek határérétékét!

$\{a_n\}: 1; 4; 9; 16; \ldots$ $\quad \{b_n\}: 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ $\quad \{c_n\}: 3; 2,1; 2,01; 2,001; \ldots$

$\{d_n\}: 0,8; -0,88; 0,888; -0,8888; \ldots$ $\quad \{e_n\}: \frac{4}{3}; \frac{8}{6}; \frac{12}{11}; \frac{16}{18}; \ldots$

25. Melyik nullsorozat a következők közül?

$a_n = \frac{3}{2n}$ $\quad b_n = \frac{1}{n+1}$ $\quad c_n = \frac{n}{2n}$ $\quad d_n = 0,56^n$

$e_n = \frac{n}{n^2+1}$ $\quad f_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\quad g_n = \frac{n+1}{5}$ $\quad h_n = -\left(\frac{1}{7}\right)^n$

26. Tudjuk, hogy $a_n \to 1$ és $b_n \to 5$. Határozd meg a következő határértékeket!

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^{a_n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)^{b_n}$

27. Legyen $a_n = \frac{n+2}{n^2+5n+4}$ és $b_n = \frac{8+2n}{n^2+3n+2}$ Határozd meg az $a_n - b_n$ és az $a_n \cdot b_n$ sorozat határértékét!

28. Határozd meg az $(a_n + b_n)$ és az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat határértékét, ha $(a_n) = \frac{n^2-1}{n}$ és $(b_n) = \frac{2n-1}{n^2+1}$!

29. Bizonyítsd be a következő határértékeket!

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[3+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=3$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+2}=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-3}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n-1}=\frac{2}{3}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}=\frac{5}{2}$

30. Bizonyítsd be a következő határértékeket!

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\log_a n}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

31. Bizonyítsd be, hogy a $c_n=\sqrt[n]{a}$ sorozat határértéke 1! $(a>0)$

32. Sejtsd meg a következő sorozatok határértékét és igazold!

$a_n=\frac{5n^3+7}{n^3}$ $\quad$ $b_n=\frac{3n-6}{n+5}$ $\quad$ $c_n=\frac{n+2}{n^2-25}$

$d_n=3+\frac{4}{n^2}$ $\quad$ $e_n=0,3^n$ $\quad$ $f_n=\sqrt[n]{3}$

33. Igaz – e, hogy az $a_n=0,2^n$ sorozat határértéke 13?

34. Igazold, hogy az $a_n=\lg\left(10+\frac{1}{n}\right)$ sorozatnak nem 2 a határértéke!

35. Bizonytísd be, hogy az $a_n=\sqrt{3n}-\sqrt{3n-1}$ sorozat konvergens! Határozd meg a sorozat határértékét!

36. Bizonyítsd be, hogy az $a_n=\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{11}\right)$ sorozatnak nincs határértéke!

37. Bizonyítsd be, hogy az $a_n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)+(-1)^{7n+2}\cdot(7n+2)}{8n+3}$ sorozatnak nincs határértéke!

38. Vizsgáld meg, hogy melyik sorozat korlátos, monoton, konvergens! A konvergens, de nem konstans sorozat esetén tetszőleges ε - hoz határozd meg a küszöbszámot!

$a_n = 0{,}1^n$ $\quad$ $b_n = 3^n$ $\quad$ $c_n = 0^{10n}$

$d_n = (-1)^{3n}$ $\quad$ $e_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ $\quad$ $f_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$g_n = 1^n$ $\quad$ $h_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$ $\quad$ $i_n = (-4)^n$

$j_n = (-1)^{4n}$ $\quad$ $k_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{2n}$ $\quad$ $l_n = (-5)^{2n}$

39. Vizsgáld meg, hogy melyik sorozat korlátos, monoton, konvergens! Add meg a határokat is! Tetszőleges ε - hoz határozd meg a küszöbszámokat!

$a_n = \frac{n+30}{n-90}$ $\quad$ $b_n = \frac{4n+5}{2n-1}$ $\quad$ $c_n = \frac{3n+1}{n}$

$d_n = \frac{n+20}{n-100}$ $\quad$ $e_n = \frac{2n-6}{n}$ $\quad$ $f_n = \frac{n+2}{2n-10}$

$g_n = \frac{n+1}{n}$ $\quad$ $h_n = \frac{6n+10}{3n}$ $\quad$ $i_n = \frac{n-5}{n+10}$

40. Vizsgáld meg, hogy melyik sorozat korlátos, monoton, konvergens!

$a_n = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}$ $\quad$ $b_n = \frac{3^{n-1}}{5^n + 9^{n+1}}$ $\quad$ $c_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

$d_n = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $e_n = (-1)^n \cdot n^2$ $\quad$ $f_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

$g_n = [1 + \cos(n \cdot \pi)]^n$ $\quad$ $h_n = n^2 - 30n + 200$ $\quad$ $i_n = -n + 4$

41. Vizsgáld meg, hogy melyik sorozat korlátos, monoton, konvergens!

$a_n = 2n + 5$ $\quad$ $b_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ $\quad$ $c_n = \begin{cases} 1, ha\ n = 2k-1 \\ 2^{\frac{n}{2}}, ha\ n = 2k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$

$d_n = \frac{3^{2n} - 2}{5^{n+1}}$ $\quad$ $e_n = (-1)^n \cdot \frac{n+2}{3n-1}$ $\quad$ $f_n = \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+2}}$

$g_n = (-1)^n \cdot \frac{3 \cdot 2^n + 1}{2^n + 1}$ $\quad$ $h_n = \frac{3 \cdot 9^n + (-1^n) \cdot 5^n}{7^n}$ $\quad$ $i_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n \cdot \cos(n \cdot \pi)}$

42. Határozd meg az $a_n = \frac{n}{12n+36}$ sorozat $\varepsilon = 0,002$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke $A = \frac{1}{12}$!

43. Határozd meg az $\varepsilon = 0,03$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy az $a_n = \frac{3n+2}{2n-10}$ $(n \neq 5)$ sorozat határértéke $A = 1,5$!

44. Határozd meg az $a_n = \frac{2n+3}{n}$ sorozat $\varepsilon = 0,01$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határérétke $A = 2$!

45. Határozd meg az $a_n = \frac{3n+2}{n-100}$ $(n \neq 100)$ sorozat $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határérétke $A = 3$!

46. Határozd meg az $a_n = \frac{n-3}{n+2}$ sorozat $\varepsilon = 0,1$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határérétke $A = 1$!

47. Határozd meg az $a_n = \frac{2n-5}{5n-17}$ sorozat $\varepsilon = \frac{1}{20}$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határérétke $A = \frac{2}{5}$!

48. Határozd meg az $a_n = \frac{3n^2+11}{n^2-25}$ $(n \neq 5)$ sorozat $\varepsilon = 0,01$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke $A = 3$!

49. Határozd meg az $a_n = \frac{5n^2+20}{n^2-100}$ $(n \neq 10)$ sorozat $\varepsilon = 0,01$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határérétke $A = 5$!

50. Határozd meg az $a_n = \sqrt[2n]{7}$ sorozat $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke $A = 1$!

51. Határozd meg az $a_n = \sqrt[n]{5}$ sorozat $\varepsilon = 0,1$ sugarú környezethez tartozó küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke $A = 1$!

52. Határozd meg az $a_n = \frac{7n^2 - 12}{n^2 + n}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 0,1$!

53. Határozd meg az $a_n = \frac{2n + 1}{2n - 1} - \frac{4n^2 + 1}{4n^2 - 1}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 0,01$!

54. Határozd meg az $a_n = \frac{n^2 - 2}{3n} - \frac{2n^2 - n}{6n + 5}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 0,01$!

55. Határozd meg az $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n^2 + 3}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 10^{-4}$!

56. Határozd meg az $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 10^{-4}$!

57. Határozd meg az $a_n = \frac{2 \cdot (-3)^n + 3 \cdot 4^{n+1}}{2^{2n}}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 0,1$!

58. Határozd meg az $a_n = \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 0,01$!

59. Határozd meg az $a_n = \sqrt[n]{2}$ sorozat A határértékét! Add meg, hogy hanyadik tagtól kezdve kerülnek a sorozat tagjai közelebb A – hoz, mint $\varepsilon = 0,02$!

60. Határozd meg a következő sorozatok határértékét! Add meg az $\varepsilon = 10^{-2}$ értékhez tartozó küszöbszámokat!

$a_n = \frac{2}{n+1}$ $\quad b_n = \frac{2n+3}{3n-5}$ $\quad c_n = \frac{n-3}{n^2+2n-15}$ $\quad d_n = \frac{1-n}{5-2n+n^2}$

61. Határozd meg a következő sorozatok határértékét! Add meg az $\varepsilon = 10^{-3}$ értékhez tartozó küszöbszámokat!

$a_n = \frac{7}{2n+3}$ $\quad b_n = \frac{5n-3}{4n+1}$ $\quad c_n = \frac{5-3n}{7n-2}$

$d_n = \frac{n-11}{n^2+4n+3}$ $\quad e_n = \frac{n^2-4n+3}{n^2-n-2}$ $\quad f_n = \frac{2}{n^3}$

62. Add meg a következő sorozatok határértékét! Tetszőleges ε - hoz határozd meg a küszöbszámokat!

$a_n = \frac{2010}{3n+1}$ $\quad b_n = \frac{11n+5}{7n-3}$ $\quad c_n = \frac{n^2-n+5}{3n^2+2n+3}$

$d_n = \frac{2n+1}{7n-5}$ $\quad e_n = \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$ $\quad f_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$

63. Vizsgáld meg a következő sorozatokat konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából. Ha konvergensek, akkor add meg az ε – hoz tartozó küszöbszámot is!

$a_n = \frac{3n+2}{2n-1}$ és $\varepsilon = 0,01$ $\quad b_n = \frac{2n^2}{4n^2-1}$ és $\varepsilon = 0,001$

$c_n = \frac{3n^2}{5n^2-2}$ és $\varepsilon = 0,01$ $\quad d_n = \frac{4n+20}{2n^2-13}$ és $\varepsilon = 0,05$

64. Vizsgáld meg a következő sorozatokat konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából. Ha konvergensek, akkor add meg az ε – hoz tartozó küszöbszámot is!

$a_n = \frac{2n}{n^2-5}$ és $\varepsilon = 0,15$ $\quad b_n = \frac{2n-5}{3n-4}$ és $\varepsilon = 0,01$

$c_n = \frac{3n}{2n+7}$ és $\varepsilon = 0,0001$ $\quad d_n = 1 - \frac{1}{n^2+5n}$ és $\varepsilon = 0,05$

65. Vizsgáld meg a következő sorozatokat konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából. Ha konvergensek, akkor add meg az ε – hoz tartozó küszöbszámot is!

$a_n = \sqrt[n]{0,5}$ **és** $\varepsilon = 0,002$

$b_n = \frac{8}{3^{n+1}} \cdot \cos(n \cdot \pi)$ **és** $\varepsilon = 0,01$

$c_n = \frac{\sqrt{n+2}}{2 \cdot \sqrt{n+3}}$ **és** $\varepsilon = 0,01$

$d_n = \frac{9^{n+1} - (-1)^n \cdot 3^{n+1}}{9^n}$ **és** $\varepsilon = 0,01$

66. Mutasd meg, hogy az alábbi sorozatok nem konvergensek! $(n \in \mathbb{Z}^+)$

$a_n = 2 - (-1)^n$

$b_n = -2^n$

$c_n = \frac{2n^2 - 5}{5n + 1}$

67. A t paraméter mely értékei esetén lesz konvergens az $a_n = \left(\frac{t+4}{2t-3}\right)^n$ sorozat? $(n \in \mathbb{Z}^+)$

68. A t valós paraméter mely értékei mellett lesz konvergens az $a_n = [(t-4) \cdot (t-2)]^n$ sorozat? $(n \in \mathbb{Z}^+)$

69. A t paraméter mely értékei esetén lesz konvergens az $a_n = \left(\frac{t+5}{2t-3}\right)^n$ sorozat? $(n \in \mathbb{Z}^+)$

70. A t paraméter mely értékei esetén lesz konvergens az $a_n = \left[\frac{(2-t) \cdot (t^2-1)}{t+1}\right]^n$ sorozat? $(n \in \mathbb{Z}^+)$

71. Az $a_n = \left(\frac{2t-1}{t+3}\right)^n$ sorozat mely t érték esetén lesz konvergens? Milyen t esetén lesz a sorozat határértéke 0? $(n \in \mathbb{Z}^+)$

72. Adj meg olyan monoton sorozatot, amelynek határértéke 2018!

73. Adj példát olyan sorozatra, ami nem monoton, nem konvergens, de korlátos!

74. Adj két példát olyan nem monoton sorozatra, amelynek a határértéke 10!

75. Adj meg olyan racionális számokból álló sorozatot, amelynek $\sqrt{5}$ a határértéke és igazold is a konvergenciát!

76. Adj meg olyan sorozatot, amelynek elemei között az összes pozitív egész szám reciproka előfordul, más számok nem szerepelnek benne, és a sorozatnak nincs határértéke!

77. Az (a_n) és a (b_n) sorozatok különbsége konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Következik – e ebből, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat is konvergens?

78. Az (a_n) és a (b_n) két olyan sorozat, amelyeknek a szorzata konvergens és e szorzatsorozat határértéke 0. Következik – e ebből, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat is konvergens, illetve, hogy legalább az egyik sorozat határértéke 0?

79. Egy konvergens sorozat határértéke 1 – gyel egyenlő. E sorozat felírható az (a_n) és a (b_n) sorozat hányadosaként. Következik – e ebből, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat is konvergens és a határértékük egyenlő?

80. Legyen az (a_n) és a (b_n) két olyan sorozat, amelyek összegének a határértéke $+\infty$. Következik – e ebből, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = +\infty$?

81. Legyen az (a_n) és a (b_n) két olyan sorozat, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$. Következik – e ebből, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = +\infty$?

82. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 0$. Mi következhet ebből az $(a_n \cdot b_n)$ sorozatra?

83. Igaz - e, hogy ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor tart a plusz végtelenhez?

84. Igaz - e, hogy pozitív tagú és konvergens sorozat határértéke pozitív szám?

85. Igaz - e, hogy ha egy mértani sorozat korlátos, akkor konvergens?

86. Legyen $x_1 = a$ és $x_2 = 2a$ $(a > 0)$, a sorozat további tagjai pedig a következőképpen számíthatók: $x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1; 2\})$! Mi a sorozat határértéke?

87. Igazold, hogy az $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ sorozat konvergens és határozd meg a határértékét! $(n \in \mathbb{Z}^+)$

88. Igazold, hogy az $a_1 = 2, a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$ $(n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat konvergens, és határozd meg a határértékét!

89. Tamás azt állítja, hogy $1 = 0$. A következő bizonyítással akarja alátámasztani állítását: $1 = \frac{n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$, de $\frac{1}{n} \to 0$, ezért $1 = n \cdot 0 = 0$. Hol a hiba?

90. Legyen (a_n) olyan konvergens sorozat, amelynek határértéke 5. A (b_n) sorozatot a következőképpen definiáljuk: $b_1 = a_2; b_2 = a_1; \dots; b_{2n-1} = a_{2n}; b_{2n} = a_{2n-1}; \dots$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$. Bizonyítsd be, hogy a (b_n) sorozat konvergens! Mennyi a határértéke?

91. Legyen az (a_n) olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke A és $(b_n) = (a_{n+100})$. Bizonyítsd be, hogy a (b_n) sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n) = A$!

92. Az (a_n) sorozat konvergens és határértéke 2. Igazold, hogy a $(b_n) = (a_{2n})$ sorozat is konvergens! Határozd meg a (b_n) sorozat határértékét!

93. Bizonyítsd be, hogy ha az $(a_n + b_n)$ sorozat konvergens, de az (a_n) sorozat nem konvergens, akkor a (b_n) sorozat sem konvergens!

94. Legyen az (a_n) és a (b_n) két olyan sorozat, amelyekre $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ létezik, konvergens és a határértéke 1. Bizonyítsd be, hogy ha az (a_n) olyan konvergens sorozat, amelynek a határértéke 0, akkor a (b_n) sorozat is konvergens és a határértéke szintén 0!

95. Az (a_n) számtani sorozat első tagja 2. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ sorozat konvergens és a határértéke 5. Határozd meg az (a_n) sorozat első n tagjának az összegét!

96. Az (a_n) számtani sorozat első tagja 5. Jelöljük S_n – nel a sorozat első n tagjának az összegét. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{S_n}{a_n^2}\right)$ sorozat létezik, konvergens és a határértéke 2. Határozd meg az (a_n) sorozat differenciáját!

97. Az (a_n) számtani sorozat első n tagjának az összegét S_n – nel jelöljük. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ sorozat konvergens és a határértéke 2. Határozd meg az (a_n) sorozat első tagját és differenciáját!

98. Az (a_n) és a (b_n) két számtani sorozat. Tudjuk, hogy az $\left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right)$ sorozat létezik, konvergens és a határértéke $\frac{1}{2}$. Határozd meg a két számtani sorozat differenciájának az arányát!

99. Bizonyítsd be, hogy ha az (a_n) számtani sorozat egyik tagja sem és a differenciája sem 0, akkor az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat konvergens és határértéke 0!

100. Legyen az (a_n) és a (b_n) két számtani sorozat. Tudjuk, hogy az $(a_n - b_n)$ sorozat konvergens és a határértéke 0. Bizonyítsd be, hogy $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén!

101. Az (a_n) és a (b_n) két olyan számtani sorozat, amelyeknek az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ hányadossorozata létezik, konvergens és a határértéke 3. Jelöljük az (a_n) sorozat első n tagjának az összegét S_n – nel, a (b_n) sorozat első n tagjának az összegét pedig R_n – nel. Igazold, hogy ha az $\left(\frac{S_n}{R_n}\right)$ sorozat létezik, akkor konvergens! Számítsd ki ennek a sorozatnak a határértékét!

102. Az $\{a_n\}$ mértani sorozat hányadosa $\frac{3}{2}$. Jelöljük e sorozat első n tagjának az összegét S_n – nel. Bizonytsd be, ha létezik az $\left(\frac{S_n}{a_n}\right)$ sorozat, akkor konvergens, és add meg a határétékét! Változik – e az összefüggés, ha a sorozat kvóciense 2?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Schlegl István; 2015.; Sokszínű matematika - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Trembeczki Csaba; 2016.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 1.; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 3. feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(9) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(12) Saját anyagok