Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Sorozatok IV.

DEFINÍCIÓ: (Szigorúan monoton csökkenő sorozat)
Az (a_n) valós számsorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n > a_{n+1}$ minden értelmezési tartománybeli n - re teljesül.

DEFINÍCIÓ: (Szigorúan monoton növekvő sorozat)
Az (a_n) valós számsorozat szigorúan monoton növekvő, ha $a_n < a_{n+1}$ minden értelmezési tartománybeli n - re teljesül.

Megjegyzés:

- *Ha az egyenlőséget is megengedjük, akkor azt mondjuk, hogy a számsorozat monoton csökkenő, illetve monoton növekvő.*
- *Az azonos tagokból álló sorozatot egyszerre monoton növekvőnek és csökkenőnek tekintjük.*
- *A monotonitás a sorozat minden tagja közötti azonos jellegű nagyságviszonyt jelent. Amennyiben ez nem áll fenn, akkor a sorozat nem monoton. Pl.:* $(a_n) = \cos(n \cdot 1°)$
- *A monotonitás vizsgálata: megnézzük az általános tag és a közvetlen szomszédja nagyságviszonyát, amennyiben* $a_{n+1} - a_n > 0$, *vagyis* $a_{n+1} > a_n$, *akkor szigorúan monoton növekvő a sorozat (ellenkező esetben csökkenő). Pozitív előjelű tagokból álló sorozat esetén a hányadost is megnézhetjük: ha* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *vagyis* $a_{n+1} < a_n$, *akkor szigorúan monoton csökkenő a sorozat (ellenkező esetben növekvő).*

DEFINÍCIÓ: (Alsó korlát)
Az (a_n) valós számsorozat alulról korlátos, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $k \leq a_n$ minden értelmezési tartománybeli n - re teljesül. Ekkor k - t a sorozat alsó korlátjának nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Felső korlát)
Az (a_n) valós számsorozat felülről korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \leq K$ minden értelmezési tartománybeli n - re teljesül. Ekkor K - t a sorozat felső korlátjának nevezzük.

Megjegyzés:

- *Egy sorozat alulról (felülről) korlátos, ha van olyan valós szám, amelynél a sorozat egyetlen tagja sem kisebb (nagyobb).*
- *Egy alulról, illetve felülről korlátos sorozatnak végtelen sok alsó, illetve felső korlátja van.*

DEFINÍCIÓ: (Alsó határ)
A legnagyobb alsó korlátot infimumnak (pontos alsó korlátnak, alsó határnak) nevezzük.
Jele: $\inf a_n$

DEFINÍCIÓ: (Felső határ)
A legkisebb felső korlátot szuprémumnak (pontos felső korlátnak, felső határnak) nevezzük.
Jele: $\sup a_n$

TÉTEL:
Felülről (alulról) korlátos sorozatnak mindig létezik felső (alsó) határa.

DEFINÍCIÓ: (Korlátos sorozat)
Az (a_n) valós számsorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

<u>Megjegyzés:</u>
Egyes sorozatokról nehéz eldönteni, hogy korlátosak – e: ennek vizsgálását segíteni fogja a később tanult határérték.

Gyakorló feladatok

1. Ismert a számtani sorozat első eleme és differenciája. Döntsd el, hogy melyik sorozat növekvő, melyik csökkenő!

$a_1 = 0; d = -2$ $\quad$ $b_1 = \frac{1}{2}; d = 1$ $\quad$ $c_1 = -0,5; d = 0,5$

$d_1 = -\frac{3}{2}; d = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $e_1 = \sqrt{2}; d = 1$ $\quad$ $f_1 = \pi; d = -\pi$

2. Ismert a mértani sorozat első eleme és kvóciense. Döntsd el, hogy melyik sorozat növekvő, melyik csökkenő!

$a_1 = 3; q = 4$ $\quad$ $b_1 = -8; q = \frac{1}{4}$ $\quad$ $c_1 = 5; q = \frac{1}{7}$

$d_1 = -\frac{11}{6}; q = 1,2$ $\quad$ $e_1 = -\sqrt{3}; q = -1$ $\quad$ $f_1 = 10\pi; q = 1$

3. Döntsd el a következő sorozatokról, hogy monoton növők vagy csökkenők! Ha nem az első tagtól teszik ezt, akkor azt is add meg, hogy hány tag elhagyásával kapunk monoton sorozatot!

$a_n = 3n + 2$ $\quad$ $b_n = (n-5)^2$ $\quad$ $c_n = 0,5n^3 - 2n^2$

$d_n = n^2 + 4n - 20$ $\quad$ $e_n = \frac{2n-1}{n+3}$ $\quad$ $f_n = \frac{2n+1}{7n-5}$

$g_n = \frac{3n-1}{2n+7}$ $\quad$ $h_n = \frac{2n^2-5}{5n+117}$ $\quad$ $i_n = \frac{3n-2}{2n^2+n+3}$

4. Monoton - e a következő sorozat? Ha nem az első tagtól, akkor azt is add meg, hogy hány tag elhagyásával kapunk monoton sorozatot!

$a_n = \frac{(n+3)!}{(n-1)!}$ $\quad$ $b_n = \frac{n^2}{2^n}$ $\quad$ $c_n = \frac{n^7}{2^n}$ $\quad$ $d_n = \frac{(n+3)!}{3^n}$

$e_n = \frac{n^5}{5^n}$ $\quad$ $f_n = \frac{(n+5)!}{5^n}$ $\quad$ $g_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ $\quad$ $h_n = \frac{1}{n^2+1}$

5. Vizsgáld meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ $\quad b_n = \sqrt[n]{0,2}$ $\quad c_n = 1 - lg\,(n+1)$

$d_n = 7^n - 2$ $\quad e_n = 2^{1-2n}$ $\quad f_n = 2 + lg\,n$

6. Vizsgáld meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

$a_n = (-1)^n - 3^n$ $\quad b_n = (-5)^n + 5^n$ $\quad c_n = (-1)^n \cdot \frac{3}{n^2}$

$d_n = 2 + \frac{(-1)^{3n}}{n^2}$ $\quad e_n = 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$ $\quad f_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n$

7. Vizsgáld meg monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

$a_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad b_n = cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ $\quad c_n = ctg\left[(2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right]$

$d_n = tg\left[(2n-1) \cdot \frac{\pi}{4}\right]$ $\quad e_n = [sin\,(n \cdot \pi) + cos\,(n \cdot \pi)]^2$ $\quad f_n = |n-3| + |1-n|$

8. Melyik tagtól kezdve lesz az $a_n = n^2 - 9n + 2$ sorozat szigorúan monoton növekvő?

9. Melyik tagtól kezdve lesz az $a_n = 3 - n^2$ sorozat szigorúan monoton csökkenő?

10. Mit mondhatunk monotonitás szempontjából az $a_n = q^n$ $(q \in \mathbb{R})$ sorozatról?

11. Adj meg olyan növekedő és olyan fogyó sorozatot, amelyeknek az összege növekedő!

12. Igaz – e, hogy két monoton növekedő sorozat szorzata is monoton növekedő?

13. Legyen az (a_n) és a (b_n) sorozat monoton növekedő. Tudjuk, hogy a (b_n) sorozat egyik tagja sem 0. Igaz – e, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat is monoton növekedő?

14. Igazold, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat szigorúan monoton növekvő!

15. Igazold, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat szigorúan monoton csökkenő!

16. Bizonyítsd be, hogy $n > 2$ esetén $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő!

17. Határozd meg az $a_n = \frac{3n-1}{2n+7}$ és a $b_n = \frac{5n-3}{2n+1}$ sorozatokhoz tartozó legkisebb (pontos) felső, illetve legnagyobb (pontos) alsó korlátot!

18. Korlátos - e, csak alulról, illetve csak felülről a következő sorozat?

$a_n = n^2 + 1$ $\quad$ $b_n = 10 - n$ $\quad$ $c_n = (-1)^n$ $\quad$ $d_n = (-1)^{2022n+2023}$

19. Korlátosak - e felülről a következő sorozatok?

$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$

$b_1 = \frac{1}{4}$ és $b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n^2-1}$ $(n = 2, 3, \dots)$

20. Vizsgáld meg korlátosság szempontjából a következő sorozatokat!

$a_n = 3n + 6$ $\quad$ $b_n = 5n - 2$ $\quad$ $c_n = 5 - n^2$ $\quad$ $d_n = n^2 - 3n + 2$

$e_n = \frac{2n-1}{n}$ $\quad$ $f_n = \frac{3n-2}{3-2n}$ $\quad$ $g_n = \frac{3n^2}{4n^2+5}$ $\quad$ $h_n = \frac{2n^2-5}{5n+117}$

$i_n = \frac{5n^2-37}{7n-2}$ $\quad$ $j_n = \frac{2-13n^2}{n^3+1}$ $\quad$ $k_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$ $\quad$ $l_n = \sqrt[n]{0,8}$

21. Vizsgáld meg korlátosság szempontjából a következő sorozatokat!

$a_n = 0,3^n$ $\quad$ $b_n = \frac{4^n}{n}$ $\quad$ $c_n = \frac{3^{n+1}+7}{5^n}$ $\quad$ $d_n = (-1)^n \cdot \frac{n+6}{7n-5}$

$e_n = (-1)^{n+1} \cdot n^4$ $\quad$ $f_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ $g_n = 3 \cdot (-2)^n$ $\quad$ $h_n = (-3)^n - 30$

22. Vizsgáld meg korlátosság szempontjából a következő sorozatokat! ($[x]$: x egész része)

$a_n = (-1)^n \cdot \lg n$ $\qquad$ $b_n = 3 - lg\, n$ $\qquad$ $c_n = \frac{8}{3^{n+1}} \cdot \cos(n \cdot \pi)$

$d_n = \frac{2 + \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3}\right)}{n^2}$ $\qquad$ $e_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n \cdot sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$ $\qquad$ $f_n = [5 \cdot \sin(n)]$

23. Vizsgáld meg korlátosság szempontjából a következő sorozatokat!

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $\qquad$ $b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

24. Legyen $a_n = q^n$, ahol q a 0 – tól különböző adott valós szám és $n \in \mathbb{Z}^+$. Vizsgáld meg a sorozatot korlátosság szempontjából!

25. Az (a_n) és a (b_n) sorozat felülről korlátos. Biztos – e, hogyha létezik az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat, akkor ez is korlátos felülről?

26. Bizonyítsd be, hogy az $a_n = \log_2 n$ sorozat felülről nem korlátos!

27. Igazold, hogy az (a_n): $a_1 = 1, a_n = \sqrt[n]{n}$ $(n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat felülről korlátos!

28. Igazold, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat korlátos, és add meg az alsó és felső határát!

29. Igazold, hogy az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat korlátos!

30. Igazold, hogy bármely pozitív egész n esetén teljesül a következő egyenlőtlenség!

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$$

31. Vizsgáld meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

$a_n = \frac{2}{3}n - 7$ $\quad b_n = 5n + 1$ $\quad c_n = \frac{4}{7} - \frac{3n}{4}$ $\quad d_n = \frac{2n - 27}{3}$

$e_n = \frac{12}{7n}$ $\quad f_n = \frac{2n + 1}{2n}$ $\quad g_n = \frac{n - 1}{n + 1}$ $\quad h_n = \frac{4 + 3n}{7 - 4n}$

$i_n = \frac{n - 1}{n + 3}$ $\quad j_n = \frac{5n - 2}{3n + 2}$ $\quad k_n = \frac{3n - 5}{n^2 + 1}$ $\quad l_n = \frac{n^2 - 9}{n^2 + 3n}$

32. Vizsgáld meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

$a_n = 2n^2 - 7n + 9$ $\quad b_n = \frac{3^{n+1} + 1}{3^n}$ $\quad c_n = 2 + \lg n$ $\quad d_n = tg\left[(2n - 1) \cdot \frac{\pi}{4}\right]$

$e_n = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{2}{(2n + 1) \cdot (2n + 3)}$ $\quad f_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n + 1) + (-1)^{7n+2} \cdot (7n + 2)}{8n + 3}$

33. Írd fel a sorozatok n – edik tagjának képletét, amelyeknek adott néhány elemük. Melyik sorozat monoton, melyik korlátos?

$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{3}{8}; a_4 = \frac{4}{10}; \dots$

$b_1 = 1; b_2 = \frac{3}{2}; b_3 = 2; b_4 = \frac{5}{2}; b_5 = 3; \dots$

$c_1 = 1; c_2 = 4; c_3 = 9; c_4 = 16; \dots$

$d_1 = \frac{1}{2}; d_2 = \frac{1}{3}; d_3 = \frac{1}{4}; d_4 = \frac{1}{5}; \dots$

$e_1 = \frac{1}{2}; e_2 = -\frac{1}{3}; e_3 = \frac{1}{4}; e_4 = -\frac{1}{5}; e_5 = \frac{1}{6}; \dots$

$f_1 = 2; f_2 = \frac{3}{2}; f_3 = \frac{4}{3}; f_4 = \frac{5}{4}; \dots$

$g_1 = 0; g_2 = \frac{1}{2}; g_3 = \frac{2}{3}; g_4 = \frac{3}{4}; \dots$

34. Igazold, hogy az $a_1 = 2, a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$ $(n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat monoton és korlátos!

35. Igazold, hogy az $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ sorozat monoton és korlátos!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Schlegl István; 2015.; Sokszínű matematika - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Trembeczki Csaba; 2016.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény - Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 1.; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Dr. Ábrahám István; 2005.; Analízis 3. feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(9) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(12) Saját anyagok