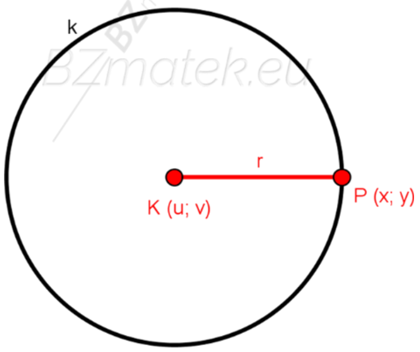
Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Kör egyenlete

TÉTEL:
A $P\,(x; y)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik a $K\,(u; v)$ középpontú r sugarú körre (körvonalra), ha $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Ez az összefüggés a $K\,(u; v)$ középpontú r sugarú kör egyenlete.



Megjegyzés:

- *Ha a P pont a körön belül helyezkedik el, akkor* $d_{KP} < r$ *miatt:* $(x-u)^2+(y-v)^2<r^2$.
- *Ha P a körön kívül helyezkedik el, akkor* $d_{KP} > r$ *miatt:* $(x-u)^2+(y-v)^2>r^2$.
- *Ha a kör középpontja az origó, vagyis a* $K\,(0; 0)$ *pont, akkor az* r *sugarú kör egyenlete:* $x^2+y^2=r^2$. *Ezt az egyenletet a kör középponti, vagy kanonikus egyenletének nevezzük.*

A kör egyenlet és másodfokú kétismeretlenes egyenlet kapcsolata:
A kétismeretlenes másodfokú egyenlet alakja: $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$.

Minden köregyenlet kétismeretlenes másodfokú egyenlet.

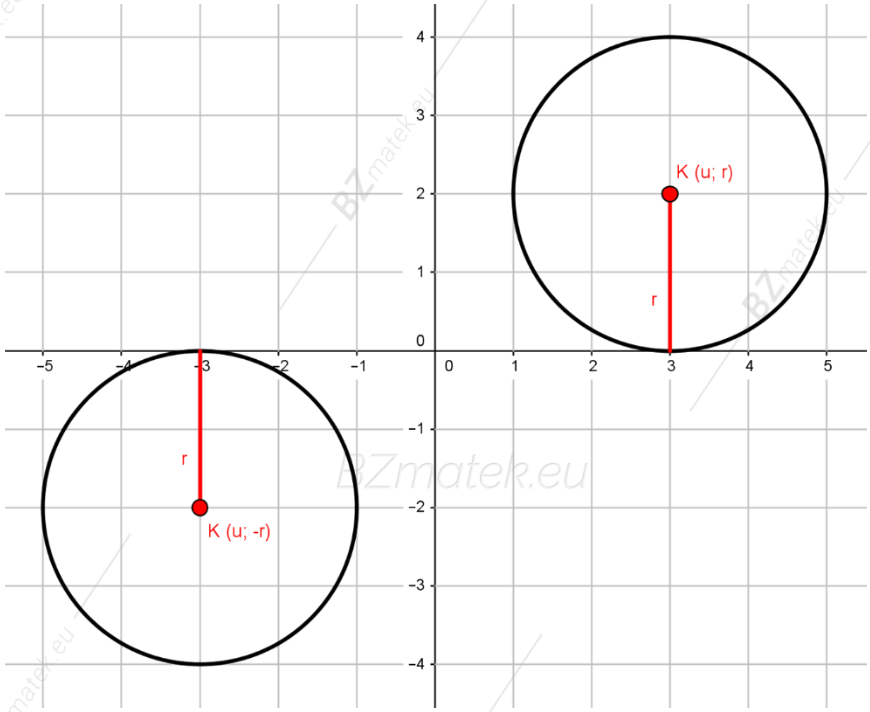
Fordítva nem feltétlenül igaz: Ahhoz, hogy a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kör egyenlet legyen, teljesülnie kell a következő feltételeknek: $\mathrm{A}=\mathrm{B}\neq 0$; $\mathrm{C}=0$; továbbá teljes négyzetté kiegészítéssel a következő alakra hozható: $(x-u)^2+(y-v)^2=k$, ahol $\mathrm{k}>0$.

Megjegyzés:
Az alakítás után, ha $k=0$, *akkor a kapott egyenlet a* $P\,(u; v)$ *koordinátájú pont egyenlete, ha pedig* $k<0$, *akkor nincs olyan pont, amely koordinátái az egyenletet igazzá tennék.*

TÉTEL:
Egy két ismeretlenes másodfokú egyenlet akkor és csak akkor köregyenlet, ha $Ax^2+Ay^2+Bx+Cy+D=0$ alakra hozható úgy, hogy $B^2+C^2-4AD>0$. Ekkor a kör középpontja a $K\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{C}{2A}\right)$ pont, a sugara pedig $r=\frac{\sqrt{B^2+C^2-4AD}}{2A}$ $(A, B, C, D \in \mathbb{R})$.

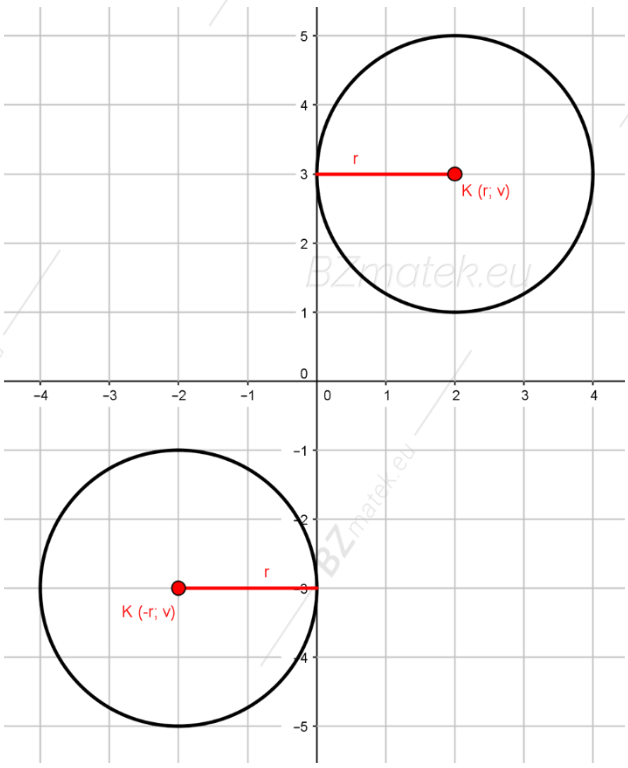
Az x – tengelyt érintő körök középpontjainak koordinátái:

Az x – tengelyt érintő, az y – tengely pozitív felén levő kör középpontja $K\ (u; r)$, az y – tengely negatív felén levő kör középpontja pedig $K\ (u; -r)$.

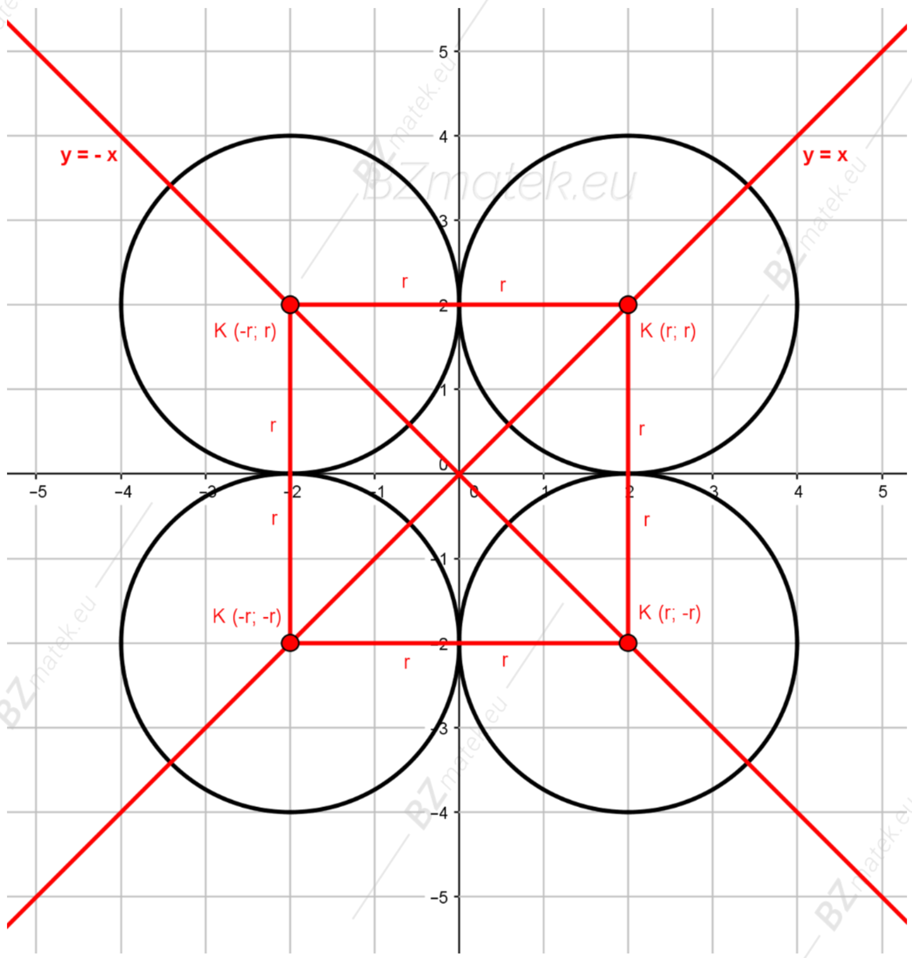


Az y – tengelyt érintő körök középpontjainak koordinátái:

Az y – tengelyt érintő, az x – tengely pozitív felén levő kör középpontja $K\ (r; v)$, az x – tengely negatív felén levő kör középpontja pedig $K\ (-r; v)$.



A koordináta – tengelyeket érintő körök középpontjainak koordinátái:
A koordináta – tengelyeket érintő körök középpontjai illeszkednek az $y = x$, illetve az $y = -x$ egyenletű egyenesekre, a sugár pedig éppen a középpont koordinátáinak abszolútértéke.



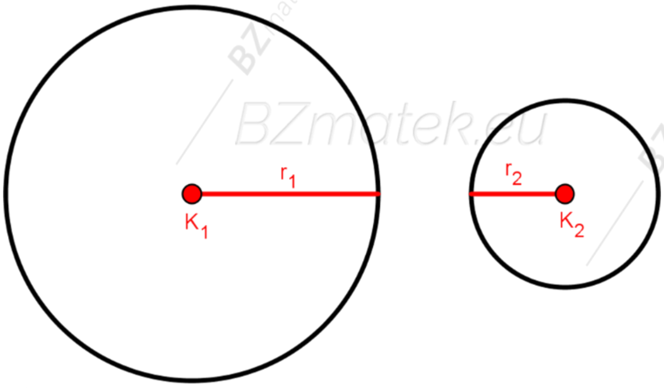
A körök középpontjainak koordinátái: az első síknegyedben $K\ (r; r)$, a második síknegyedben $K\ (-r; r)$, a harmadik síknegyedben $K\ (-r; -r)$, a negyedik síknegyedben $K\ (r; -r)$.

Egyenes és kör metszéspontjainak meghatározása (kölcsönös helyzete):
Az alakzatok egyenletét egyenletrendszerként tekintjük, s azt megoldva (a behelyettesítő módszert alkalmazva) megkapjuk az alakzatok közös pontjainak koordinátáit.

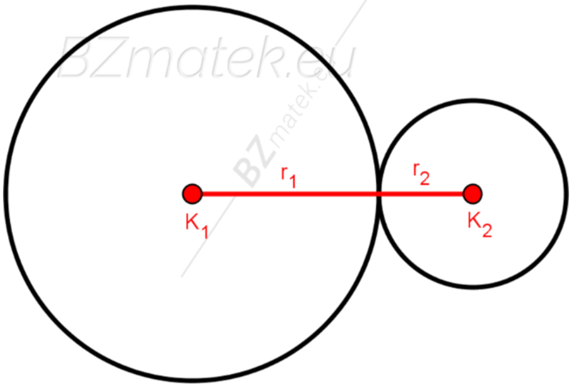
Amennyiben csak a kölcsönös helyzetükre van szükségünk, akkor elegendő az egyenletrendszer során keletkező másodfokú egyenlet diszkriminánsát vizsgálnunk: $D > 0$ esetén 2 metszéspont adódik (az egyenes szelő); $D = 0$ esetén 1 érintési pont adódik (az egyenes érintő); $D < 0$ esetén pedig 0 közös pont adódik (az egyenes elkerüli a kört).

Körök metszéspontjainak meghatározása (kölcsönös helyzete):
Az alakzatok egyenletét egyenletrendszerként tekintjük, s azt megoldva megkapjuk az alakzatok közös pontjainak koordinátáit: a négyzetre emelések elvégzése után a két egyenletet kivonjuk egymásból, majd alkalmazzuk a behelyettesítő módszert.

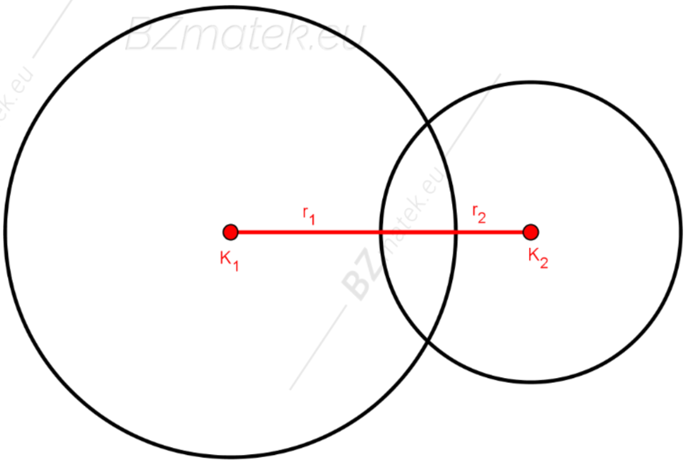
Első eset: $|K_1K_2| > r_1 + r_2$ $\rightarrow$ a kisebb kör pontjai a nagyobb külső pontjai



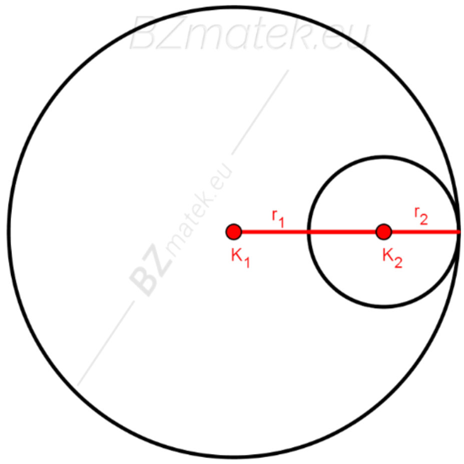
Második eset: $|K_1K_2| = r_1 + r_2$ $\rightarrow$ a kisebb kör kívülről érinti a nagyobbat



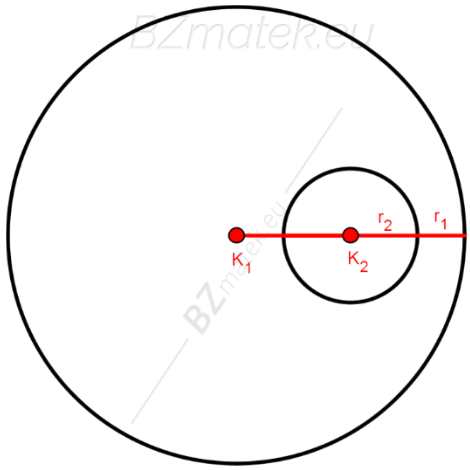
Harmadik eset: $|r_1 - r_2| < |K_1K_2| < r_1 + r_2$ $\rightarrow$ a két kör metszi egymást



Negyedik eset: $|r_1 - r_2| = |K_1K_2|$ $\rightarrow$ a kisebb kör belülről érinti a nagyobbat



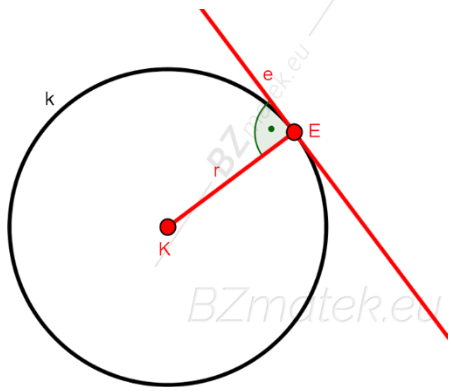
Ötödik eset: $|r_1 - r_2| > |K_1K_2|$ $\rightarrow$ a kisebb kör pontjai a nagyobb belső pontjai



<u>Kör érintőjének meghatározása:</u>

- A kör egy adott E pontján át húzott érintő egyenlete:

  Mivel a sugár merőleges az érintőre, így az $\overrightarrow{EK}$ vektor egy normálvektora az érintőnek, vagyis az E érintési pont segítségével felírhatjuk az érintő egyenletét.

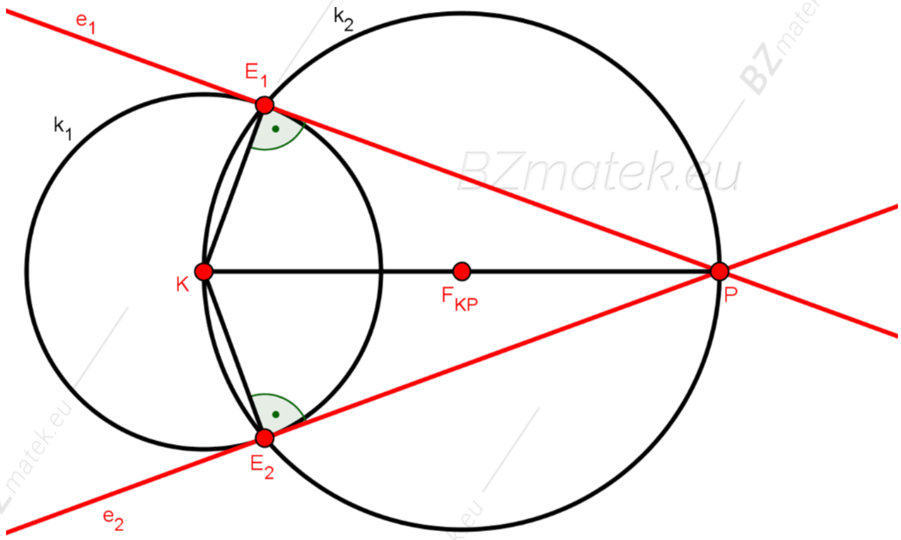


- A körre nem illeszkedő külső P ponton át húzható érintők egyenlete:

  Első lépés: Meghatározzuk a $\overline{KP}$ szakasz, mint átmérő fölé rajzolt Thalesz – kör egyenletét.

  Második lépés: A körök egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk, s így megkapjuk az E_1 és E_2 metszéspontok koordinátáit.

  Harmadik lépés: Felírjuk az így kapott E_1 és E_2 érintési pontokon és a P ponton át húzható e_1, illetve e_2 érintő egyenes egyenletét.

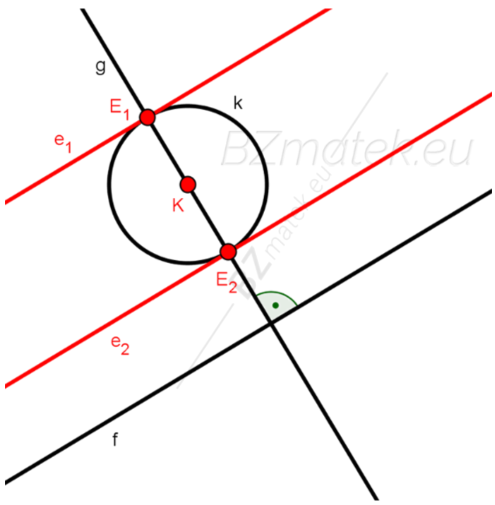


- Adott f egyenessel párhuzamos érintők egyenlete:

  Első lépés: Felírjuk az f - re merőleges, a kör középpontján átmenő g egyenes egyenletét.

  Második lépés: A kör és a g egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk, s így megkapjuk az E_1 és E_2 metszéspontok koordinátáit.

  Harmadik lépés: Felírjuk az így kapott E_1 és E_2 érintési pontokon átmenő, az adott f egyenessel párhuzamos e_1, illetve e_2 érintők egyenletét.

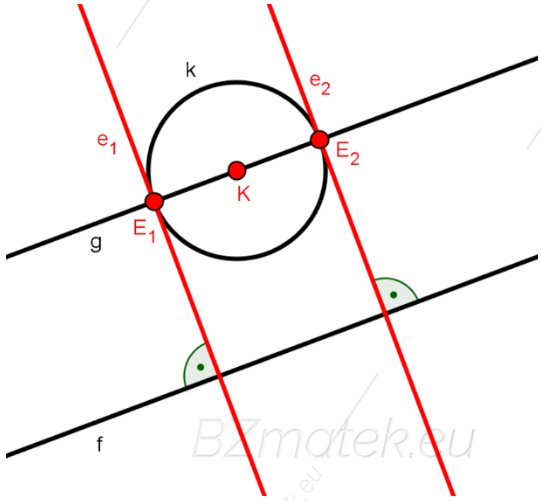


- Adott f egyenesre merőleges érintők egyenlete:

  Első lépés: Felírjuk az f - el párhuzamos, a kör középpontján átmenő g egyenes egyenletét.

  Második lépés: A kör és a g egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldjuk, s így megkapjuk az E_1 és E_2 metszéspontok koordinátáit.

  Harmadik lépés: Felírjuk az így kapott E_1 és E_2 érintési pontokon átmenő, az adott f egyenesre merőleges e_1, illetve e_2 érintők egyenletét.



<u>Megjegyzés:</u>
Az érintőket paraméterek segítségével is kereshetjük: ekkor azt használjuk fel, hogy a kör és egyenesek (paraméteres) egyenletéből álló egyenletrendszert alakítva, az adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0*, mert csak akkor kapunk egy megoldást (érintési pontot).*

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Írd fel az origó középpontú r sugarú kör egyenletét!

a) $r = 4$

b) $r = 2,5$

c) $r = \frac{3}{4}$

d) $r = \sqrt{3}$

e) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. (K) Írd fel a K középpontú és r sugarú kör egyenletét!

a) $K\ (0; -8)$ **és** $r = 7$

b) $K\ (-1; 2)$ **és** $r = 3$

c) $K\ (-3; -5)$ **és** $r = \sqrt{17}$

d) $K\ (-2; 4)$ **és** $r = 0,5$

e) $K\ (9; 6)$ **és** $r = 2 \cdot \sqrt{13}$

3. (K) Írd fel a kör egyenletét, add meg a kör koordinátatengelyekkel párhuzamos átmérőinek a végpontjait, valamint a kör egy belső és egy külső pontját, ha középpontja $C\ (-13; 4)$ és sugara 8 egység hosszúságú!

4. (K) Határozd meg a pontszerű test pályájának egyenletét, ha a mozgása a sík $C\ (2; 3)$ pontjából mindig 4 távolságra, a C pont síkjában történik!

5. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek három érintője az $e: y = -2$; az $f: y = 6$ és a $g: x = 1$ egyenes!

6. (K) Írd fel a kör egyenletét, ha a középpontja az origóban van, és áthalad a *P* ponton!

a) $\boldsymbol{P\ (-5; 12)}$

b) $\boldsymbol{P\ (4; 7)}$

c) $\boldsymbol{P\ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)}$

d) $\boldsymbol{P\ \left(-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right)}$

e) $\boldsymbol{P\ (a; b)}$

7. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a *K* pont és áthalad a *P* ponton!

a) $\boldsymbol{K\ (5; -2)}$ **és** $\boldsymbol{P\ (4; 3)}$

b) $\boldsymbol{K\ (9; 0)}$ **és** $\boldsymbol{P\ (-1; 6)}$

c) $\boldsymbol{K\ (-3; 2)}$ **és** $\boldsymbol{P\ (5; 2)}$

d) $\boldsymbol{K\ \left(2\frac{1}{4}; -7\right)}$ **és** $\boldsymbol{P\ \left(\frac{3}{8}; -\frac{5}{9}\right)}$

e) $\boldsymbol{K\ \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right)}$ **és** $\boldsymbol{P\ \left(\frac{1}{3}; -\frac{17}{5}\right)}$

8. Egy kör középpontja a $\boldsymbol{C\ (1; -3)}$ **pont, a körvonal egy pontja a** $\boldsymbol{P\ (2; -11)}$ **pont. Írd fel a kör egyenletét és add meg a területét!**

9. (K) Határozd meg annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a *K* pont és áthalad az origón!

a) $\boldsymbol{K\ (5; 12)}$

b) $\boldsymbol{K\ (2; -7)}$

c) $\boldsymbol{K\ (-1; -6)}$

d) $\boldsymbol{K\ (-3; 4)}$

e) $\boldsymbol{K\ (a; b)}$

10. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek átmérője az AB szakasz!

a) $A\ (-2; 3)$ és $B\ (4; 5)$

b) $A\ (0; 2)$ és $B\ (-3; 0)$

c) $A\ (-2; -3)$ és $B\ (3; -2)$

d) $A\ \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}\right)$ és $B\ (-3; 5)$

e) $A\ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ és $B\ \left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$

11. (E) Írd fel a kör egyenletét, ha AB átmérőjének végpontjai $A\left(1-\sqrt{2}; -3\cdot\sqrt{3}\right)$ és $B\left(1+\sqrt{2}; \sqrt{27}\right)$!

12. (K) Határozd meg az alábbi egyenletekből a körök középpontját és sugarát!

a) $x^2 + y^2 = 30$

b) $x^2 + y^2 - 5y = 0$

c) $x^2 + 6x + y^2 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 14x - 15 = 0$

13. (K) Határozd meg az alábbi egyenletekből a körök középpontját és sugarát!

a) $x^2 + y^2 - 10x + 22y + 92 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 61$

c) $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 22 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 25 = 0$

e) $x^2 + x + y^2 - 3y - 1,5 = 0$

14. (K) Határozd meg az alábbi egyenletekből a körök középpontját és sugarát!

a) $2x^2 + 2y^2 - 12x - 8y = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 - 20x - 75 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$

d) $16x^2 + 16y^2 - 24x - 16y - 243 = 0$

e) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 9 = 0$

15. (E) Határozd meg az alábbi egyenletekből a körök középpontját és sugarát!

a) $x^2 + y^2 - \sqrt{8} \cdot x - \sqrt{12} \cdot y = 0$

b) $x^2 + y^2 = \sqrt{12} \cdot x - \sqrt{20} \cdot y - 1$

c) $-x^2 - y^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + 6 \cdot \sqrt{2} \cdot y - 13 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

e) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

16. (K) Döntsd el, hogy melyik egy kör egyenlete az alábbi kétismeretlenes, másodfokú egyenletek közül! A körök esetében add meg a körök középpontjait és sugarait is!

A: $x^2 - y^2 + 2x = 4$

B: $x^2 + y^2 - 8y + 20 = 0$

C: $x^2 + y^2 - 4x + 9y - 3xy + 5 = 16$

D: $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 14{,}5$

E: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$

F: $2x^2 + 3y^2 = 4$

G: $x^2 - 3x + 1{,}25 = y^2 + 2y$

H: $x^2 - 2x + y^2 - 8y + 27 = 0$

I: $x^2 + 2xy + y^2 = 4$

J: $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 22 = 0$

K: $x^2 + y^2 + 4x + 7y - 11xy - 12 = 0$

L: $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

M: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

N: $x^2 + 2y^2 + 5y + 102 = 0$

O: $x^2 + y^2 + 10x - 22y + 147 = 0$

P: $x^2 + y^2 + x + y + 36 = 0$

Q: $2x^2 + 2y^2 - 10x + 8 = 0$

R: $x^2 + y^2 - 8y + 16 = 0$

17. (K) Zoli belépve a terembe az alábbi másodfokú kétismeretlenes egyenleteket találta a táblára felírva. Azt állította, hogy egyik sem kör egyenlet. Honnan tudhatta?

$\boldsymbol{x^2+y^2+4x-2y=-5}$ $\boldsymbol{x^2+y^2+2xy-3=0}$ $\boldsymbol{\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-9=0}$

18. (K) A $\boldsymbol{p}$ paraméter mely valós értékei esetén lesz az $\boldsymbol{x^2+y^2-8x+6y+p=0}$ egyenlet egy kör egyenlete? Mely $\boldsymbol{p}$ értékek esetén lesz a kör sugara 3?

19. (K) Határozd meg a $\boldsymbol{4x^2+Ay^2+Bxy+Cy-8x-60=0}$ egyenletben az $\boldsymbol{A, B, C}$ együtthatók értékét úgy, hogy az egyenlet egy $\boldsymbol{r=5}$ egység sugarú kör egyenlete legyen. Határozd meg a kör középpontjának koordinátáit!

20. (K) Határozd meg az alábbi egyenletekből a körök középpontját és sugarát!

A: $\boldsymbol{(x+6)^2+(y-11)^2=49}$

B: $\boldsymbol{x^2+(y+2)^2=13}$

C: $\boldsymbol{(x-2)^2=25-(y-3)^2}$

D: $\boldsymbol{(x-12)^2+(y+9)^2=121}$

E: $\boldsymbol{(x+10)^2+y^2=64}$

F: $\boldsymbol{x^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=3}$

G: $\boldsymbol{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}}$

H: $\boldsymbol{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}}$

21. (K) Írd fel a kör egyenletét $\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ alakban, ha középpontja $\boldsymbol{O}$, sugara pedig $\boldsymbol{r}$! ($\boldsymbol{A, B, C}$ valós számokat jelölnek)

a) $\boldsymbol{O\ (0;0)}$ **és** $\boldsymbol{r=0,5}$

b) $\boldsymbol{O\ (-5;-5)}$ **és** $\boldsymbol{r=5}$

c) $\boldsymbol{O\ \left(1+\log_2\frac{1}{8};1-\log_2\frac{1}{16}\right)}$ **és** $\boldsymbol{r=\log_2 32}$

d) $\boldsymbol{O\ (-1;2)}$ **és** $\boldsymbol{r=\frac{1}{\sqrt{5}}}$

e) $\boldsymbol{O\ \left(-\sqrt{3};-\sqrt{6}\right)}$ **és** $\boldsymbol{r=2}$

22. (E) Írd fel a kör egyenletét $\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ alakban, ha középpontja $\boldsymbol{O\ (0;0)}$, sugara pedig $\boldsymbol{r=\sqrt{2}+\sqrt{3}}$! ($\boldsymbol{A, B, C}$ valós számokat jelölnek)

23. (K) Írd fel a kör egyenletét $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ alakban, ha középpontja O és áthalad a P ponton! (A, B, C valós számokat jelölnek)

a) $O\ (0; 2)$ és $P\ (-1; 3)$

b) $O\ (-2; -3)$ és $P\ (-5; -2)$

c) $O\ (1; -4)$ és $P\ (2; 5)$

d) $O\ \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ és $P\ (3; 4)$

e) $O\ (2; 2)$ és $P\ (0; 0)$

24. (K) A $k_1: x^2 + y^2 + 12y - 12 = 0$, illetve a $k_2: x^2 + y^2 - 22x - 20y + 202 = 0$ körök középpontjai és a $P\ (0; 0)$ pont egy háromszöget feszítenek ki. Számítsd ki a háromszög kerületét és területét!

25. (K) Határozd meg az $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 4$ egyenletű kör középpontját és sugarát! Mutasd meg, hogy a $P\ (-7; 8), Q\ (3; -2)$ és $R\ (-4; 7)$ pontok hogyan helyezkednek el a körhöz képest!

26. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az origó, a sugara $2 \cdot \sqrt{5}$ egység. Hogyan helyezkednek el a körhöz viszonyítva a következő pontok: $A\ (-3; 0), B\ (5; 0), C\ (4; 2), D\ (2; 6), E\ (3, -4), F\ (-2; -5)$?

27. (K) Egy kör középpontja $O\ (3; 4)$, sugara $r = 5$. Add meg a kör egyenletét! Döntsd el, hogy hol helyezkednek el a körhöz viszonyítva a $Q\ (7; 1), R\ (8; 0)$ és $S\ (2; 2)$ pontok!

28. (K) Adott az $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ egyenletű kör. Számítással döntsd el, hogy a következő pontok közül melyik van rajta a körön, melyik van a körön belül és melyik van kívül a körön: $P\ (-2; 1), Q\ (1; 1), R\ \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$!

29. (K) Döntsd el, hogy az $x^2 + 24x + y^2 + 10y = 0$ egyenlettel megadott körvonalra illeszkednek – e az alábbi pontok, s ha nem, akkor azon belül, vagy kívül helyezkednek – e el: $A(-21; 4); B(-5; 6); C(1; -3); D(0; 0); E(-12; 8)$! Add meg a kör területét!

30. (K) Hol metszi a koordináta – tengelyeket az $(x-8)^2+(y-6)^2=100$ egyenletű kör? Add meg a kör középpontját és sugarát!

31. (K) Add meg az $x^2+y^2-4x+2y=31$ egyenletű kör középpontjának koordinátáit és sugarát! Határozd meg a kör koordinátatengelyekre illeszkedő pontjainak koordinátáit!

32. (K) Adott az $r=4$ sugarú kör $C\ (-2;-3)$ középpontja. Mely pontokban metszi a kör koordináta – tengelyeket? A körön belül, vagy kívül helyezkedik – e el az $A\ (1;1)$ pont?

33. (K) Írd fel a $K\ (-2;3)$ középpontú, 5 egység sugarú k kör egyenletét, és határozd meg a koordinátatengelyek azon pontjainak koordinátáit, amelyek illeszkednek k – ra! Milyen hosszúak az azonos tengelyen levő pontokat összekötő szakaszok?

34. (K) Egy kör középpontja a $(2;-1)$ pont, sugara 5 egység. Számítsd ki a kör azon pontjainak koordinátáit, amelyeknek abszcisszája 5, illetve ordinátája 2!

35. (K) Egy robbantás középpontja a $C\ (-2;3)$ pont volt. A hangja a helyétől legfeljebb 10 egység távolságra hallható.

a) **Melyek azok a helyek, ahol még éppen hallható volt a robbantás?**

b) **Hallható volt – e a robbantás azon a településen, melynek helyét a $P\ (3;-9)$ pont adja meg?**

c) **Hallható volt – e a robbantás azon a településen, amely 4 egységgel közelebb volt a robbantás helyéhez, mint a P?**

36. (K) Határozd meg a p és q értékét úgy, hogy az $x^2+y^2+px+qy-20=0$ egyenletű kör tartalmazza az $A\ (1;3)$ és $B\ (2;-4)$ pontokat! Mekkora a kör sugara?

37. (K) Határozd meg a és b paraméterek értékét úgy, hogy a k: $x^2+y^2+ax+by=0$ egyenletű kör áthaladjon az $A\ (4;-1)$ és a $B\ (-2;3)$ pontokon! Melyik pontban metszi ez a kör az x – tengelyt?

38. (K) Határozd meg az a értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 + ax + 2 = 0$ egyenletű kör áthaladjon a következő pontokon!

a) **az $A\ (-1; -2)$ ponton**

b) **az $A\ (-1; -2)$ és a $B\ \left(-2; \sqrt{8}\right)$ pontokon;**

c) **az $A\ (-1; -2)$ és az $C\ (-2; -1)$ pontokon!**

39. (E) Hol metszi az ordinátatengelyt az a kör, amely az abszcisszatengelyt a $P\ (-2; 0)$ pontban érinti, és érinti az $x = 2$ egyenletű egyenest?

40. (E) A $k: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 26$ egyenletű kör és a koordináta – tengelyek metszéspontjai egy négyszöget határoznak meg. Számítsd ki a négyszög területét!

41. (E) Határozd meg az origó középpontú, $\frac{3}{2}$ sugarú kör egész abszcisszájú pontjainak koordinátáit!

42. (K) Írd fel az $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 16$ egyenletű körrel koncentrikus, a $T\ (5; 2)$ ponton áthaladó kör egyenletét!

43. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$ körrel koncentrikus (azonos középpontú) és áthalad az $A\ (1; 0)$ ponton!

44. (K) Határozd meg annak a körnek az egyenletét, amely koncentrikus az $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ egyenletű körrel, és sugara kétszer akkora!

45. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, ha a vele koncentrikus, fele akkora sugarú kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$!

46. (K) Határozd meg annak a körnek az egyenletét, amelynek ugyanakkora a sugara, mint az $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$ egyenletű körnek, de a középpontja az origó!

47. (K) Adott a $k: (x-6)^2 + (y+4)^2 = 36$ egyenletű kör. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyet a k körből a következőképpen kapunk!

a) **Tükrözd az x – tengelyre, illetve az y – tengelyre!**

b) **Tükrözd az origóra!**

c) **Toldd el a $\vec{v}\,(2;3)$ vektorral, illetve a $\vec{v}\,(-5;-1)$ vektorral!**

d) **Forgasd el az origó körül $+90°$ - kal, illetve $-90°$ - kal!**

e) **Nagyítsd a középpontból kétszeresére!**

f) **Kicsinyítsd az origóból a felére!**

48. (K) Adott a $k: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ egyenletű kör. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyet a k körből a következőképpen kapunk!

a) **Tükrözd az x – tengelyre, illetve az y – tengelyre!**

b) **Tükrözd az origóra, illetve a $P\,(4;-3)$ pontra!**

c) **Toldd el a $\vec{v}\,(-3;-2)$ vektorral!**

d) **Forgasd el az origó körül $+90°$ - kal, illetve $-90°$ - kal!**

e) **Nagyítsd az origóból a kétszeresére!**

f) **Kicsinyítsd a $Q\,(2;5)$ pontból a felére!**

49. (K) Határozd meg a $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ egyenletű kör $P\,(1;3)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenletét!

50. (K) Írd fel a kör egyenletét, ha az $A\,(2;-1)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenlete: $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$!

51. (K) Kicsinyítsük az origóból a felére az $(x+8)^2 + (y-2)^2 = 16$ egyenletű kört, majd forgassuk el a $P\,(1;5)$ pont körül $+90°$ - kal. Határozd meg a keletkező kör egyenletét!

52. (K) Nagyítsd fel az $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ egyenletű kört a $P\ (3; 2)$ pontból a kétszeresére. Írd fel a felnagyított kör egyenletét!

53. (K) Írd fel a kör egyenletét, ha a középpontjára illeszkedik az $e: x + 2y = 12$, illetve $f: x - y = 0$ egyenes és a kör átmegy az origón!

54. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $P\ (3; 0)$ és $Q\ (-1; 2)$ pontokon, és a középpontja illeszkedik az $e: x - y = -2$ egyenletű egyenesre!

55. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A\ (1; 6)$ és $B\ (4; -5)$ pontokon, a középpontja pedig az x – tengelyre illeszkedik!

56. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az $A\ (2; 3)$ és $B\ (5; 2)$ pontokon, a középpontja pedig az y – tengelyre illeszkedik!

57. (E) Határozd meg azon síkbeli pontok halmazának egyenletét, amelyek az $A\ (10; 0)$ ponttól másfélszer akkora távolságra vannak, mint a $B\ (0; 10)$ ponttól!

58. (E) Határozd meg annak a ponthalmaznak az egyenletét, amelynek elemei a $P\ (-2; 1)$ ponttól kétszer akkora távolságra vannak, mint a $Q\ (3; 4)$ ponttól!

59. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely az x - tengelyt az origóban érinti, és áthalad a $P\ (0; 4)$ ponton!

60. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely az y - tengelyt az origóban érinti, és áthalad az $A\ (-6; 0)$ ponton!

61. (K) Írd fel annak a 4 sugarú körnek az egyenletét, amely az y - tengelyt a 3 ordinátájú pontban érinti!

62. (K) Írd fel annak a 8 sugarú körnek az egyenletét, amely az x - tengelyt a -7 abszcisszájú pontban érinti!

63. (K) Írd fel a kör egyenletét, ha sugara 5 egység, középpontja az $x = 3$ egyenesre illeszkedik és érinti az x – tengelyt!

64. (K) Írd fel a kör egyenletét, ha sugara 5 egység, középpontja az $y = -6$ egyenesre illeszkedik és érinti az y – tengelyt!

65. (E) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek sugara 5 egység, áthalad a $P\ (9; 9)$ ponton és érinti az y – tengelyt, illetve az x - tengelyt!

66. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $K\ (3; 3)$ pont, és érinti a koordináta – tengelyeket!

67. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a $K\ (-7; 7)$ pont, és érinti a koordináta – tengelyeket!

68. (K) Számítsd ki a $K\ (3, -2)$ középpontú kör sugarát és írd fel az egyenletét, ha tudjuk, hogy érinti az x – tengelyt, illetve az y – tengelyt!

69. (K) Írd fel annak a 4 sugarú körnek az egyenletét, amely mindkét tengelyt érinti!

70. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti a két koordináta tengelyt, és középpontja az e: $y = 2x + 3$ egyenesen van!

71. (E) Határozd meg annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P\ (2; -1)$ ponton, érinti az ordinátatengelyt, középpontja az $x - y = 2$ egyenesen van!

72. (E) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a P ponton és érinti a koordináta - tengelyeket!

a) $P\,(2; 9)$

b) $P\,(-5; 3)$

c) $P\,(5; -2)$

d) $P\,(-1; -8)$

e) $P\,(0; 1)$

73. (K) Határozd meg az A, B és C pontok által meghatározott háromszög köré írható kör egyenletét!

a) $A\,(-1; 1)$, $B\,(4; -4)$ és $C\,(4; 2)$

b) $A\,(-2; -3)$, $B\,(0; 5)$ és $C\,(0; -5)$

c) $A\,(4; 0)$, $B\,(0; 3)$ és $C\,(-6; -5)$

d) $A\,(-5; -1)$, $B\,(2; -1)$ és $C\,(-4; 5)$

e) $A\,(8; 5)$, $B\,(2; 7)$ és $C\,(10; -9)$

74. (K) Az útépítő mérnökök egy olyan körgyűrűt szeretnének tervezni, amely tartalmazza az $A\,(6; 4)$, a $B\,(-2; 4)$ és a $C\,(5; -3)$ helyen lévő településeket. Határozd meg a körgyűrű középpontját! Mekkora a körgyűrű kerülete, ha $1\ egység = 4\ km$! (A végeredményt egy tizedes jegy pontossággal add meg!)

75. (E) Egy háromszög csúcsai $A\,(-3; 0)$, $B\,(5; 0)$ és $C\,(0; 8)$. Írd fel a háromszög oldalfelező pontjain átmenő Feuerbach – körének egyenletét! Igazold, hogy a Feuerbach – kör középpontja rajta van a háromszög köré írható körének középpontja és a magasságpontja által meghatározott Euler – egyenesen!

76. (K) Bizonyítsd be, hogy az $A\,(7; 1)$, $B\,(5; 3)$, $C\,(-1; -3)$ és $D\,(5, -5)$ pontok egy körre illeszkednek. Írd fel a kör egyenletét!

77. (K) Lehetnek - e a következő pontok egy húrnégyszög csúcsai: $A\ (8;4)$, $B\ (10;0)$, $C\ (2;-4)$ és $D\ (1;3)$!

78. (K) Egy húrnégyszög három csúcsának koordinátái: $A\ (-2;2)$, $B(-1;3)$ és $C\ (1;1)$. A negyedik csúcs az ordinátatengelyen található. Mik lehetnek ennek a koordinátái?

79. (K) Határozd meg a k kör és az e egyenes közös pontját!

a) $k: x^2+y^2=25$ **és** $e: 2x+y=10$

b) $k: (x+3)^2+y^2=25$ **és** $e: x+y=2$

c) $k: (x-8)^2+(y+2)^2=50$ **és** $e: x-3y=4$

d) $k: x^2+y^2-2x-1{,}5y-10=0$ **és** $e: y=4+6x$

e) $k: (x-3)^2+(y-1)^2=25$ **és** $e: 4y-3x=-30$

80. (E) Számítsd ki az $x^2+y^2=9$ egyenletű kör és az e egyenes közös pontjainak koordinátáit, ha e egyenlete: $y-x=3\cdot\sqrt{2}$!

81. (K) Milyen helyzetű a k kör és az f egyenes?

a) $k: x^2+y^2-4y-4=0$ **és** $f: y=1$

b) $k: (x-3)^2+(y-1)^2=25$ **és** $f: x=9$

c) $k: (x-2)^2+(y-1)^2=2$ **és** $f: x+y=1$

d) $k: x^2+y^2-2x-4y-15=0$ **és** $f: 3x-2y=7$

e) $k: x^2+y^2-2x+2y-8=0$ **és** $f: x=2y-5$

82. (E) Van – e közös pontja a $k: x^2+y^2=25$ és az $e: 2x+y=5\cdot\sqrt{5}$ egyenesnek?

83. (E) Hány közös pontja van a $k: x^2+y^2=16$ körnek és az $e: x-y=4\cdot\sqrt{2}$ egyenesnek?

84. (K) A k egyenletű kör milyen hosszúságú húrt vág ki az e egyenesből?

a) $k: (x+9)^2 + (y-2)^2 = 144$ **és** $e: x = -9$

b) $k: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ **és** $e: y = 2x + 1$

c) $k: x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ **és** $e: x = 3y - 2$

d) $k: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$ **és** $x - y - 2 = 0$

e) $k: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ **és** $e: y - x = -7$

85. (K) Határozd meg azokat a pontokat, amelyek az $e: x + 2y = 7$ egyenesre illeszkednek és a $K\ (3; 7)$ ponttól 5 egység távolságra vannak!

86. (K) Számítsd ki az $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ egyenletű kör azon pontjainak a koordinátáit, amelyek egyenlő távolságra vannak az $A\ (-8; -3)$ és $B\ (4; 7)$ pontoktól!

87. (E) Tekintsük az $x^2 + y^2 = r^2$ kört és az $y = mx + b$ egyenst. Az m és a b milyen értékei mellett metszi; érinti; illetve kerüli el az egyenes a kört?

88. (E) Számítsd ki a k_1 és a k_2 kör metszéspontjának koordinátáit!

a) $k_1: x^2 + y^2 - 10x - 8y - 4 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

b) $k_1: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ **és** $k_2: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 20$

c) $k_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$

d) $k_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ **és** $k_2: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$

e) $k_1: x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 + 10x + 6y + 33 = 0$

89. (E) Milyen helyzetű a k_1 és k_2 kör egymással?

a) $k_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$

b) $k_1: x^2 + y^2 - 14x + 10y - 26 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 + \frac{8}{3}x - \frac{5}{2}y + \frac{181}{144} = 0$

c) $k_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 13 = 0$

d) $k_1: x^2 + y^2 + 6x - 16y + 72 = 0$ **és** $k_2: x^2 + y^2 - 20x + 4y + 79 = 0$

e) $k_1: x^2 + y^2 + 2x - 8y = 64$ **és** $k_2: x^2 - 6x + y^2 - 12y = -36$

90. (E) Határozd meg annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P\ (13; 8)$ ponton, valamint az $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ és az $(x-9)^2 + (y-2)^2 = 20$ egyenletű körök metszéspontjain!

91. (E) Határozd meg a $k_1: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ és a $k_2: (x-10)^2 + y^2 = 50$ egyenletű körök közös húrjának hosszát!

92. (E) Határozd meg a $C\ (5; 1)$ középpontú, $r = \sqrt{10}$ sugarú körnek azzal a körrel vett metszéspontjait, melynek egyenlete: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$! Határozd meg a közös húregyenes egyenletét!

93. (E) Határozd meg a $k_1: (x-6)^2 + (y-2)^2 = 25$ és a $k_2: (x+4)^2 + (y+3)^2 = 100$ egyenletű kör metszéspontjának koordinátáit! Írd fel a két kör centrálisának egyenletét!

94. (E) Számítsd ki a $k_1: x^2 + (y-6)^2 = 10$ és a $k_2: (x-3)^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör metszéspontjának koordinátáit! Add meg a két kör metszéspontjain átmenő szelő egyenes egyenletét!

95. (E) Számítsd ki annak a háromszögnek a területét, amelyet a $k_1: x^2 + y^2 = 10$ és a $k_2: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ egyenletű körök közös húrjának egyenese, valamint az x és az y – tengely határol!

96. (E) Add meg azokat a pontokat, amelyek az origótól, illetve a $C\ (4; 2)$ ponttól 5 egység távolságra vannak?

97. (E) Milyen négyszöget határoznak meg a körök közös pontjai és a középpontok, ha $k_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ és $k_2: x^2 + y^2 - 22x - 14y + 120 = 0$? Számítsd ki a négyszög területét! Írd fel a körök közös szelőjének az egyenletét!

98. (E) Határozd meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 - 11x - 7y + c = 0$ egyenletű körből az x – tengely háromszor akkora húrt metsszen ki, mint az y – tengely!

99. (E)Adott a $k: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ kör. Mekkora lehet annak a körnek a sugara, melynek középpontja $K\ (2; 4)$ és nincs közös pontja k – val?

100. (E) Adott az $x^2 + y^2 = 4$ és az $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ egyenletű kör. Az $r > 0$ mely értéke esetén érinti egymást a két kör? Add meg az érintési pontokat is!

101. (K) Adott egy kör az egyenletével: $k: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, és a $P\ (6; 8)$ pont. Add meg a kölcsönös helyzetüket! Add meg a P – re illeszkedő érintő(k) egyenletét!

102. (K) Írd fel a k kör P pontjához tartozó e érintőjének egyenletét!

a) **$k: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ és $P\ (-1; 3)$**

b) **$k: (x - 5)^2 + (y - 12)^2 = 169$ és $P\ (10; 24)$**

c) **$k: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ és $P\ (-2; 1)$**

d) **$k: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ és $P\ (5; 5)$**

e) **$x^2 + y^2 = 5$ és $P\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{3}\right)$**

103. (E) Írd fel a $k_1: x^2 + y^2 = 25$ körhöz a $P\ (7; 1)$ pontból húzható érintők egyenletét!

104. (E) Adott a $k: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ kör, valamint a $P\ (3; 0)$ poont. Írd fel a P ponton átmenő, a k kört érintő egyenesek egyenletét! Számítsd ki az érintők hajlásszögét!

105. (E) Határozd meg a p paraméter értékét úgy, hogy az adott egyenletű egyenes és kör érintse egymást!

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ **és** $2x + y = p$

b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$ **és** $y = px + 1$

106. (E) Határozd meg az r értékét úgy, hogy a $3x - 4y + 76 = 0$ egyenletű egyenes érintse az $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = r^2$ egyenletű kört!

107. (E) Írd fel a k körnek az f egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!

a) $k: x^2 + y^2 = 5$ **és** $f: 2x - y + 1 = 0$

b) $k: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$ **és** $f: 4x + 3y = 12$

108. (E) Írd fel annak az egyenesnek egyenletét, amely érinti a k kört és merőleges az f egyenesre!

a) $k: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 10$ **és** $f: 3x - y = 1$

b) $k: x^2 + y^2 - 14x + 10y - 26 = 0$ **és** $f: 2y - x = -17$

109. (E) A k_1 kör egyenlete $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$, a k_2 kör középpontja $K_2\ (-2; -3)$. Mekkora a k_2 sugara, ha a két körnek két közös pontja van? Mekkora, ha a két körnek nincs közös pontja, vagy ha a két kör érinti egymást?

110. (E) Add meg azokat az egyeneseket, amelyeknek az $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$ egyenletű körrel $0; 1; 2$ közös pontja van és illeszkednek az origóra!

111. (E) Írd fel az $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$ egyenletű kör $-\frac{4}{3}$ meredekségű érintőinek egyenletét! Számítsd ki az érintők érintési pontjának koordinátáit!

112. (K) Írd fel azoknak az 5 egység sugarú köröknek egyenletét, melyek a $3x + 4y = 8$ egyenletű egyenest a 0 abszcisszájú pontjában érintik!

113. (K) Írd fel annak a 4 egység sugarú körnek az egyenletét, amelyik a $2x - y = 4$ egyenletű egyenest x - tengellyel közös pontjában érinti! Hány megoldás van?

114. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja a $K\ (-3; 4)$ pont és érinti az $e: x + 2y = -5$ egyenletű egyenest! Add meg az érintési pont koordinátáit!

115. (K) A $k: x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$ körhöz egy P pontból érintőket húzunk. Számítsd ki a P koordintátáit, ha az érintési pontokon áthaladó szelő egyenlete $e: x - y = 2$!

116. (K) Mekkora annak a $K_1\ (-4; 1)$ középpontú k_1 körnek a sugara, amely érinti az $(x - 2)^2 + (y - 9)^2 = 4$ egyenletű k_2 kört? Számítsd ki az érintési pont koordinátáit!

117. (E) Határozd meg annak a 3 egység sugarú körnek az egyenletét, amely kívülről érinti a $k_1: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ és a $k_2: (x - 11)^2 + (y + 6)^2 = 100$ köröket!

118. (E) Határozd meg annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 25$ kört az $E\ (-3; 4)$ pontban érinti és sugara 15 egység!

119. (E) Írd fel annak a k körnek az egyenletét, amely áthalad a $P\ (2; 11)$ és $Q\ (10; 11)$ pontokon és érinti az $e: x + y = 5$ egyenes!

120. (E) Az $e: x + y = 18$ egyenes melyik pontjából húzható 12 egység hosszúságú érintő a $k: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ egyenletű körhöz?

121. (E) Az $A\,(4;3)$ és $B\,(10;7)$ pontok által meghatározott AB szakasz az $e: x-5y=-5$ egyenes melyik pontjából látható derékszögben?

122. (E) Határozd meg a koordináta – tengelyek azon pontjait, melyekből az $A\,(0;1)$ és $B\,(8;7)$ végpontok által meghatározott szakasz derékszögben látszik!

123. (E) Határozd meg az $k: (x-2)^2+(y-10)^2=18$ körnek azon pontját, amely az $e: y=x$ egyeneshez legközelebb, illetve legtávolabb helyezkedik el!

124. (E) Írd fel az $(x-7)^2+(y-6)^2=25$ egyenletű kör $P\,(8;4)$ pontjára illeszkedő legrövidebb, illetve leghosszabb húrját tartalmazó egyenes egyenletét!

125. (E) Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyeken át az $(x-4)^2+(y-5)^2=9$ és az $x^2+y^2=4$ egyenletű körökhöz egyenlő hosszúságú érintőszakaszok húzhatók?

126. (E) Határozd meg annak a ponthalmaznak az egyenletét, amelynek pontjaiból az $x^2+y^2-8x+7=0$ és az $x^2+y^2+2x-2\cdot\sqrt{5}\cdot y-3=0$ egyenletű körökhöz húzható érintőszakaszok hosszúságainak aránya $3:2$!

127. (E) Mi azon pontok halmaza a síkon, amelyből a $k: x^2+y^2-4x+10y+20=0$ kör derékszögben látszik?

128. (E) Adott két pont: $A\,(-3;-1), B\,(6;-2)$, és egy kör: $k: (x-3)^2+(y-4)^2=25.$ Add meg a kör azon pontjainak halmazát, amelyekből az AB szakasz $45°$ - os szögben látszik!

129. (E) Határozd meg a p értékét úgy, ha tudjuk, hogy az $x^2+y^2-8x-8y+p^2=0$ egyenletű kör a koordináta - rendszer kezdőpontjából $60°$ - os szögben látszik!

130. (E) Az $x^2+y^2+10x-4y+25=0$ kör a síkjának mely pontjaiból látható $60°$ - os szög alatt?

131. (E) Határozd meg az $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ körön található rácspontok számát! (Rácspontnak nevezünk egy pontot a koordináta - rendszerben, ha mindkét koordinátája egész szám.)

132. (K) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad az origón, továbbá középpontja az $x^2 + y^2 - 14x - 6y = -54$ egyenletű kör legkisebb ordinátájú pontja! Az ordinátatengely melyik pontja illeszkedik még a kapott körre?

133. (E) Adott a $k: x^2 + y^2 - 18x + 6y + 65 = 0$ kör és az $F\ (8; -6)$ pont. Határozd meg a kör azon A és B pontját, melyre az F pont felezi az AB húrt!

134. (E) A derékszögű $ABC\Delta$ átfogójának végpontjai $A\ (-1; 4)$ és $B\ (5; -3)$. A háromszög BC befogóját tartalmazó egyenes meredeksége $\frac{1}{4}$. Írd fel a háromszög köré írható körének egyenletét! Számítsd ki a háromszög C csúcsának koordinátáit!

135. (E) Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik mindkét koordinátatengelyt, valamint a $K\ (5; 5)$ középpontú 5 egység sugarú kört!

136. (E) Határozd meg az $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ és $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ körök közös külső, illetve belső érintőinek egyenletét!

137. (E) Két kör egyenlete $k_1: (x - 3)^2 + y^2 = 9$ és $k_2: (x - 10)^2 + (y - 5)^2 = 4$. Számítsd ki a körök közös belső, illetve külső érintői metszéspontjának koordinátáit!

138. (E) Egy kör átmegy a $P\ (3; 7)$ ponton, a $k_1: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 98 = 0$ egyenletű kört belülről, a $k_2: x^2 + y^2 - 22x - 16y + 160 = 0$ egyenletű kört pedig kívülről érinti. Írd fel az egyenletét! Mekkora a körbe írható szabályos háromszög területe?

139. (E) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x - 12)^2 + (y + 10)^2 = 100$ egyenletű kört kívülről, az $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 100$ egyenletű kört belülről érinti, valamint érinti az ordinátatengelyt!

140. (E) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amely az abszcisszatengelyt a $P\ (3; 0)$ pontban érinti, és az ordinátatengelyből 8 egységnyi hosszúságú húrt metsz ki!

141. (E) Írd fel az $e: 2x - y + 5 = 0$ és az $f: 2y + x + 10 = 0$ egyeneseket érintő 5 sugarú kör egyenletét!

142. (E) Egy kör egyenlete $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$. Egy másik kör középpontja $K_2\ (-9; 3)$, sugara pedig r_2. Számítsd ki az r_2 értékét, ha a két körnek az $x + 2y - 17 \cdot \sqrt{3} = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos közös érintője van!

143. (E) Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az $A\ (-6; 6)$ pont, és az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű kört abban a pontban érinti, mint az $y = x + 3 \cdot \sqrt{2}$ egyenletű egyenes!

144. (E) Írd fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik a koordinátatengelyeket és az $(x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 49$ egyenletű kört!

145. (E) Egy négyzet beírt körének egyenlete: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Tudjuk, hogy az oldalegyenesek $45°$ - os szöget zárnak be a koordináta – tengelyekkel. Határozd meg az oldalegyenesek egyenletét, az érintési pontokat és a négyzet csúcsait!

146. (E) Adott egy rombusz két csúcsa: $(-3; 5)$ és $(7, -1)$. A rombusz oldalának a hossza $\sqrt{170}$. Számítsd ki a rombusz másik két csúcsának a koordinátáit!

147. (E) Egy téglalap köré írható kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 11x - 2y + 10 = 0$, a téglalap két csúcsa pedig illeszkedik az $y = -4x + 6$ egyenletű egyenesre. Számítsd ki a téglalap csúcsainak koordinátáit!

148. (E) Egy egyenlőszárú háromszög alapjának egyik végpontja az $A\ (6; -2)$ pont, a szárak metszéspontjának koordinátái $C\ \left(6 + \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}; 3 - \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)$. A háromszög köré írt kör egyenlete $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Számítsd ki a harmadik csúcspont koordinátáit!

149. (E) Egy egyenlőszárú háromszög szárai az $A\,(3;6)$ pontban metszik egymást. A háromszögbe írt kör egyenlete $(x-3)^2+y^2=9$. Határozd meg a hiányzó két csúcspont koordinátáit és a háromszög területét!

150. (E) Egy egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjai $A\,(-3;5)$ és $B\,(3;-1)$. A háromszg köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-4,5x-8,5y-5=0$. Számítsd ki a harmadik csúcspont koordinátáit! Mennyi megoldás van?

151. (E) Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög derékszögű csúcsának koordinátái $C\,(7;7)$, az átfogó egyenesének egyenlete $4x+3y=24$. Számítsd ki az átfogó végpontjainak koordinátáit!

152. (E) Egy derékszögű háromszög egyik befogóegyenesének egyenlete $x=9$, az ezzel szemközti csúcs kordinátái $(5;-3)$. Az átfogó párhuzamos a $3x-4y=0$ egyenletű egyenessel. Írd fel a háromszög köré írható kör egyenletét!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok