Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

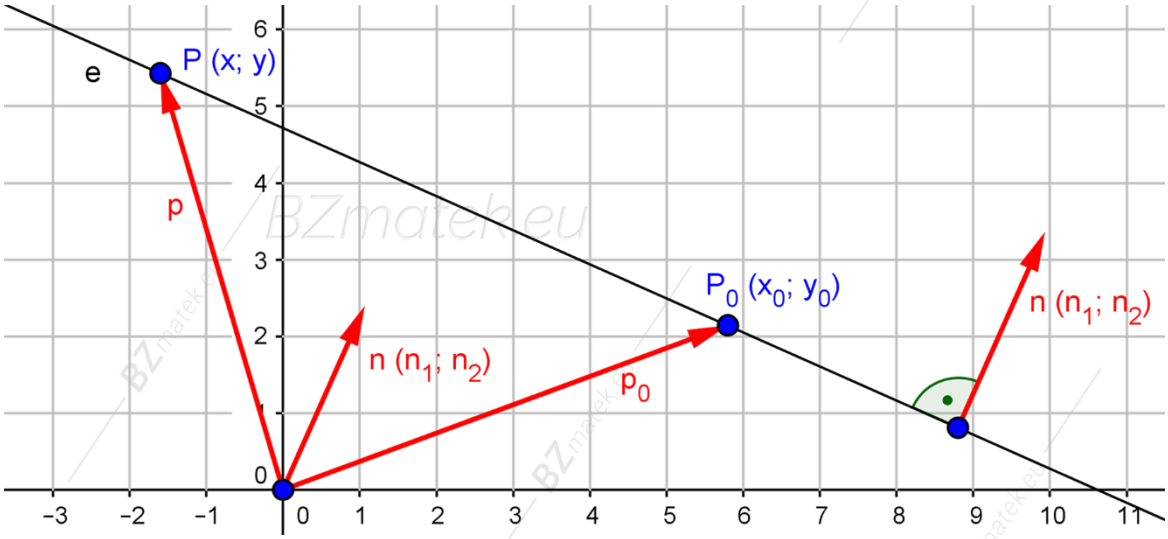
- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Adott $\vec{n}\ (n_1; n_2)$ normálvektorú $(\vec{n} \neq 0)$ adott $P_0\ (x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0$.

<u>Bizonyítás:</u>
Legyen az egyenes két tetszőleges pontja: $P\ (x; y)$ és $P_0\ (x_0; y_0)$.

Az ezekbe a pontokba mutató helyvektorok pedig a következők: $\vec{p}\ (x; y)$ és $\overrightarrow{p_0}\ (x_0; y_0)$.

Tekintsük a következő ábrát:



Mivel a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az $\vec{n}$ normálvektorra, így a $(\vec{p} - \overrightarrow{p_0})$ is merőleges az $\vec{n}$ vektorra.

A merőleges vektorok skaláris szorzata 0, vagyis teljesül a következő: $(\vec{p} - \overrightarrow{p_0}) \cdot \vec{n} = 0$.

A kapott egyenletet írjuk fel koordináták segítségével a következőképpen:

$(x - x_0) \cdot n_1 + (y - y_0) \cdot n_2 = 0$.

Ebből az egyenlet rendezése után adódik a bizonyítandó állítás:

$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0$.

■

TÉTEL:
Adott $\vec{v}\,(v_1; v_2)$ irányvektorú $(\vec{v} \neq 0)$ adott $P_0\,(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0$.

Bizonyítás:
Az egyenes irányvektorát átírhatjuk normálvektorrá: $\vec{v}\,(v_1; v_2) = \vec{n}\,(v_2; -v_1)$.

Ezt helyettesítsük az egyenes normálvektoros egyenletébe és adódik a bizonyítandó állítás:

$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0$.

■

TÉTEL:
A $P_0\,(x_0; y_0)$ ponton átmenő m meredekségű egyenes iránytangenses egyenlete: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

Bizonyítás:
Tekintsük az egyenes irányvektoros egyenletét: $v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_0 - v_1 \cdot y_0$.

Ebből átrendezés után a következő alakot kapjuk: $v_2 \cdot (x - x_0) = v_1 \cdot (y - y_0)$.

Mivel $m = \frac{v_2}{v_1}$, így az egyenletet v_1 – gyel elosztva adódik a bizonyítandó állítást:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

■

TÉTEL:
Ha két (y – tengellyel nem párhuzamos) egyenes merőleges egymásra, akkor iránytangenseik (meredekségük) egymásnak negatív reciprokai. Jelöléssel: $m_e = -\frac{1}{m_f}$, vagy $m_e \cdot m_f = -1$.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy az e és f egyenes merőleges egymásra.

Ekkor az irányvektoraik is merőlegesek egymásra, vagyis a skaláris szorzatuk 0.

Írjuk fel a két irányvektor skaláris szorzatát koordinátákkal: $\overrightarrow{v_e} \cdot \overrightarrow{v_f} = e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2 = 0$.

A kapott egyenletet átalakítva adódik a bizonyítandó állítás:

$$e_1 \cdot f_1 = -e_2 \cdot f_2 \quad \rightarrow \quad \frac{e_1}{e_2} = -\frac{f_2}{f_1} = -\frac{1}{\frac{f_1}{f_2}} \quad \rightarrow \quad m_e = -\frac{1}{m_f}$$

■