Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Kombinatorika

A kombinatorika tudománya elemek sorba rendezésével és kiválasztásával foglalkozik.

Modulok:
A kombinatorikai feladatok megoldásához három modult alkalmazunk:

- Permutáció (Sorba rendezés)
- Kombináció (Kiválasztás)
- Variáció (Kiválasztás és sorba rendezés)

DEFINÍCIÓ: (Ismétlés nélküli permutáció)
Az n különböző elem egy ismétlés nélküli permutációján az n elem egy sorba rendezését értjük.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes ismétlés nélküli permutációjának száma: $P_n = n!$ (n faktoriális).

Megjegyzés:

- *Az n faktoriális felbontása:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.
- $0! = 1$
- *Ha az n különböző elemet egy kör mentén rendezzük sorba, akkor ciklikus permutációról beszélünk, s ezek száma:* $P_n^{ciklikus} = (n-1)!$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétléses permutáció)
Azon n elem egy sorba rendezését, melyek között ismétlődő elemek is előfordulnak, az n elem egy ismétléses permutációjának nevezzük.

TÉTEL:
Ha az n elem között a megegyező elemek száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n)$, akkor az n elem összes ismétléses permutációjának száma: $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétlés nélküli kombináció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki és a sorrend a kiválasztás során nem számít, akkor az n elem k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli kombinációinak száma: $C_n^k = \binom{n}{k}$ („n alatt a k”).

<u>*Megjegyzés:*</u>
Az „n alatt a k” binomiális együttható felbontása: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétléses kombináció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk és a sorrend a kiválasztás során nem számít, akkor az n elem k tagú ismétléses kombinációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ismétléses kombinációinak száma: $C_n^{k,ism} = \binom{n+k-1}{k}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétlés nélküli variáció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet csak egyszer választhatunk ki és a sorrend a kiválasztás során számít, akkor az n elem egy k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli variációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ($0 \leq k \leq n$ egészek) ismétlés nélküli variációinak száma: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

DEFINÍCIÓ: (Ismétléses variáció)
Ha n különböző elemből kiválasztunk k darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk és a sorrend a kiválasztás során számít, akkor az n elem egy k tagú ismétléses variációját kapjuk.

TÉTEL:
Az n különböző elem összes k tagú ismétléses variációinak száma: $V_n^{k,ism} = n^k$.

<u>A binomiális együtthatók tulajdonságai:</u>

- Minden binomiális együttható értéke egy természetes szám.
- Szimmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{1}{1} = 1; \binom{2}{2} = 1; \dots \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{0}{0} = 1; \binom{1}{0} = 1; \dots; \binom{n}{0} = 1$
- $\binom{1}{1} = 1; \binom{2}{1} = 2; \dots; \binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

<u>Megjegyzés:</u>
A Pascal – háromszög és a binomiális együtthatók kapcsolata: az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható a Pascal – háromszög n – edik sorának k – adik eleme.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

TÉTEL: (Binomiális – tétel)

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{1} \cdot a^1 b^{n-1} + \binom{n}{0} \cdot a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

<u>Kombinatorikus feladatok megoldása:</u>

- A feladatok megoldása során el kell döntenünk, hogy sorba rendezésről, illetve kiválasztásról van - e szó. Amennyiben kiválasztásról, akkor azt kell megvizsgálnunk, hogy a kiválasztás során számít - e a kiválasztott elemek sorrendje, vagy sem. Ezek alapján eldönthetjük, hogy a fenti képletek közül melyikkel oldhatjuk meg a feladatokat.
- Amennyiben egy feladatot több, egymástól független ágra bontunk (esetszétválasztással), akkor először kiszámoljuk az egyes esetek lehetséges értékeit, majd végül ezeket összeadjuk.
- Egy kérdésre megkaphatjuk a megoldást úgy is, ha kiszámítjuk az összes lehetséges eset számát, majd kivesszük a kérdésnek nem megfelelő (számunkra kedvezőtlen) esetek számát.
- A permutáció, illetve variáció esetében (szemléltetésképpen) alkalmazhatjuk a rekeszes módszert is.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Egyszerűsítsd a következő törteket!** $\frac{77!}{3! \cdot 74!}$ $\frac{n!}{(n-2)!}$ $\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$

2. **(K) Hányféleképpen érkezhet be a célba 5 versenyző, ha nincs holtverseny?**

3. **(K) Hányféleképpen alkothat falat egymás mellett állva egy kézilabdacsapat pályán lévő 6 mezőnyjátékosa, ha mindenki beáll a sorba?**

4. **(K) Az autóban egy 10 számot tartalmazó CD – t hallgatunk. Hányféle sorrendben szólalhatnak meg a zeneszámok, ha véletlenszerű sorrendet állítottunk be a lejátszón?**

5. **(K) Egy hagyományos mutatós óra számlapján véletlenszerűen összekevertük a számokat, majd úgy fordítottuk a számlapot, hogy a 12 – es legyen felül. Hányféle különböző számlapot kaphatunk így?**

6. **(K) Zoli szekrényének egyik polcán 6 különböző film sorakozik DVD – n. Hányféleképpen teheti a polcra egymás mellé őket?**

7. **(K) Tamás kisvasutat kapott ajándékba, a készlethez 1 mozdony és 4 különböző kocsi járt.**

   a) **Hányféle sorrendben akaszthatja a mozdony után a kocsikat?**

   Kis idő elteltével Tamás észrevette, hogy az ajándékba kapott kisvasút kocsijait akár a mozdony elé is kapcsolhatja.

   b) **Hányféle sorrendben állíthatja össze így a mozdonyból és a 4 különböző kocsiból álló szerelvényt?**

8. **(K) Hányféleképpen ülhet le 4 ember egy kör alakú asztalhoz?**

9. (K) Hányféleképpen írhatjuk fel egy kör mentén sorban a magyar ábécé rövid magánhangzóit?

10. (K) Mennyi nyaklánc készíthető 8 különböző színű gyöngyből?

11. (K) Egy kör alakú asztal mellett 4 szék van: egy az ajtó felől, egy az ablak alatt, egy a fal mellett és egy a kandalló előtt. Hányféleképpen ülhet le az asztal köré 4 fő,

***a)* ha figyelembe vesszük, hogy ki ül az ajtó, az ablak, a fal, illetve a kandalló felől?**

***b)* ha csak az asztal melletti sorrendjüket vesszük figyelembe valamilyen körbejárás szerint?**

***c)* ha csak annyit veszünk figyelembe, hogy ki kinek a szomszédja?**

12. (K) Hányféleképpen rakhatunk sorba 3 kék, 4 zöld és 1 piros labdát?

13. (K) Mennyi különböző dobássorozat lehetséges, amiben 3 fej és 5 írás található?

14. (K) Hányféle sorrendben állhat a rajtvonalra 4 lány és 5 fiú futó a mezei futóversenyen, ha csak a nemüket vesszük figyelembe?

15. (K) Hány (nem feltétlenül értelmes) 7 betűs szó képezhető az $\boldsymbol{A, A, A, B, B, C, D}$ betűkből?

16. (K) Annának van 3 halas, 2 lepkés és 4 zebrás bögréje (az egyfajta bögrék egyformák). Hányféleképpen teheti a konyhaszekrényben egymás mellé a bögréit?

17. (K) A szomszéd néni minden évben 4 sor sárgarépát, 5 sor epret és 1 sor tököt ültet. Hány évig kertészkedhet, ha minden évben más sorrendben akarja egymás mellé ültetni a növénysorokat?

18. (K) Egy közös kiránduláson 3 egypetéjű ikerpár sorakozik fel egy fényképhez. Hányféle sorrendet különböztethet meg az, aki csak felületesen ismeri az ikreket?

19. (K) Hányféleképpen sorsolhatunk ki 10 diák között 5 német, 3 francia és 2 holland utat, ha egy diák csak egy utat kaphat?

20. (K) Egy ital automata 1, illetve 2 eurós érméket fogad el. Egy 6 euró értékű italt hányféleképpen fizethetünk ki az automatához állva?

21. (K) Van 2 különböző könyvünk matematikából, 3 történelemből és 4 magyarból. Hányféleképpen helyezhetjük el ezeket a polcon, ha az egyforma témájú könyveket egymás mellé szeretnénk elhelyezni?

22. (K) Három házaspár színházba ment és egymás mellé vettek jegyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha a házastársak egymás mellett foglalnak helyet?

23. (K) Egy házaspár 3 baráttal hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz, ha a házaspár egymás mellett szeretne helyet foglalni?

24. (K) Egy kör alakú asztalhoz leül 5 házaspár.

a) **Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a párosok egymás mellé szeretnének ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?**

b) **Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?**

25. (K) Egy kutyakiállításra 10 - en neveztek be egy – egy kutyával. Hányféleképpen állhatnak sorba, ha kutyák és gazdáik felváltva állnak? (Minden kutya a gazdája mellett áll.)

26. (K) Egy csoportba 7 fiú és 7 lány jár. Felsorakoztatjuk őket kettes oszlopba, egyik oszlopba a lányok, másikba a fiúk állnak. Hányféleképpen állhatnak párba?

27. (K) Hányféleképpen állhat osztályfőnöke előtt kettes oszlopba a 18 fiúból és 18 lányból álló osztály, ha két fiú és két lány nem kerülhet egymás mellé?

28. (K) Moziba megy 4 fiú (Attila, Csaba, Elemér, Géza) és 4 lány (Bea, Dia, Flóra, Helga). Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha

a) **fiúk és lányok felváltva ülnek?**

b) **Attila és Bea egymás mellé szeretne ülni?**

c) **Attila, Csaba és Elemér egymás mellé szeretne ülni?**

d) **Attila Bea mellé, Csaba pedig Dia mellé szeretne ülni?**

e) **a 4 lány egymás mellé szeretne ülni?**

f) **Helga nem szeretne az első helyen ülni?**

g) **Dia és Géza nem szeretne egymás mellé ülni?**

29. (K) Egy osztálynak a hétfői napon a következő órái vannak: angol, biológia, ének, matematika, német, rajz, testnevelés. Mennyi órarend készíthető aznapra, ha

a) **matematika lesz az első és testnevelés az utolsó?**

b) **a biológiát a kémia követi?**

c) **az angol és a német egymás mellé kerül?**

d) **a biológia, kémia és matematika egymás mellé kerül?**

e) **az ének és a rajz nem kerülhet egymás mellé?**

30. (K) Hányféle sorrendben lehet leírni a BADACSONYTOMAJ városának nevében szereplő:

a) **mássalhangzókat;**

b) **magánhangzókat;**

c) **összes betűt? (A dupla mássalhangzókat egy betűnek számítjuk.)**

31. (K) Hány olyan hétjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke?

32. (K) Mennyi nyolcjegyű, 4 - gyel osztható számot képezhetünk a $0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2$ számjegyekből, ha egy számjegyet csak egyszer használhatunk fel?

33. (K) A 4 - es és 5 - ös számjegyek felhasználásával hány 9 - cel osztható, nyolcjegyű páros szám készíthető?

34. (K) Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekből hány olyan négyjegyű szám készíthető, amelyben mindhárom páratlan számjegy szerepel legalább egyszer?

35. (K) Az $1, 2, \ldots, 14, 15$ számokat sorozatba rendezzük. Hány olyan eset van, amelyben

***a)* az $1, 2, 3$ számok csökkenő sorrendben kerülnek egymás mellé?**

***b)* az $1, 2, \ldots, 9, 10$ számok egymás mellé kerülnek?**

36. (K) Hányféleképpen sorsolhatunk ki 20 ember között 1 Tv - t, 1 kerékpárt és 1 autót, ha egy ember több tárgyat is nyerhet?

37. (K) Egy pályázatra 20 pályamunka érkezett és 5 kategóriában hirdetnek $1-1$ győztest. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha egy pályamunka csak egy kategóriában győzhet?

38. (K) Egy futóverseny döntőjébe 8 - an jutnak be. Hányféleképpen alakulhat a dobogó, ha nincs holtverseny?

39. (K) Kitti elfelejtette, hogy biológiából dolgozatot írnak. A 7 kérdés mindegyikére A, B vagy C válasz közül kellett választani egyet. Hányféleképpen tölthette ki Kitti véletlenszerűen a tesztet, ha minden kérdésnél megjelölt egy választ?

40. (K) Helga délután 5 vendéget vár, akiket egy hosszú lócára fog leültetni a kertben. Azért, hogy ne fázzanak meg, a 9 különböző mintájú párnájából tesz a lócára 5 - öt. Hányféleképpen helyezheti el a párnákat a padon?

41. (K) Egy háromtárcsás számzár minden tárcsája 1 – től 9 – ig van számozva. Hány különböző beállítás lehetséges, ha egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

42. (K) Legfeljebb mennyi különböző lehetőséget lehet kipróbálni egy biciklilakaton, ha a négytárcsás számzár minden tárcsáján 0 – tól 6 – ig vannak jelölve a számok?

43. (K) A FUVOLÁS szó betűiből kisorsolunk 4 - et, és egymás után írjuk őket. Hányféle különböző betűsort kaphatunk így?

44. (K) Egy autóverseny 20 indulójából csak az első 8 beérkező kap pontot: az első tízet, a második nyolcat, a harmadik hatot, a negyediktől kezdve pedig minden következő eggyel kevesebbet. Hányféleképpen kaphatják meg a pontokat a versenyzők, ha nincs holtverseny és minden versenyző célba ér?

45. (K) A piacon az egyik árus minden reggel kitesz 5 szem gyümölcsöt a mérleg elé. Ezek lehetnek meggy, cseresznye vagy szőlőszemek, akár mind ugyanaz is. Hányféle sorrendben teheti ki ezeket a mérleg elé?

46. (K) Egy dobókockával addig dobunk, míg prímszámot nem kapunk. A kapott prímet feljegyezzük. Ezt megismételjük még háromszor, a prímeket sorban egymás után írva. Hány különböző négyjegyű szám lehet az eljárás eredménye?

47. (K) A rulettkeréken 0 – tól 36 – ig szerepelnek az egész számok. Egyik este Péter a rulettasztal mellett állva ötös csoportokba rendezve feljegyzi a pörgetések eredményeit. Hány különböző ötös csoportot írhat le a papírra?

48. (K) Egy kosaras edzés után gyakorolja a büntetődobást. 10 alkalommal dob rá, minden dobása 50 % - os eséllyel talál célba. Ha egy külső szemlélő felírná, hogy az egyes dobások sikerültek vagy sem, hányféle jelsorozatot kaphatna?

49. (K) Egy online levelezőrendszer csak akkor enged használni egy jelszót, ha az pontosan 7 különböző karaktert tartalmaz (a karakter lehet számjegy, vagy a 26 betűs angol abécé betűje, a kis – és nagybetűket nem különböztetik meg). Hány különböző jelszó készíthető ilyen feltételekkel?

50. (K) Hány tízjegyű szám van a kettes számrendszerben?

51. (K) Hány különböző négyjegyű számot írhatunk fel hármas számrendszerben, ha nincs a felhasznált jegyek között a zérus?

52. (K) Mennyi háromjegyű szám képezhető az $1, 2, 3, 4$ számokból, ha a számjegyek ismétlődhetnek?

53. (K) Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye páros?

54. (K) Mennyi ötjegyű szám képezhető a $0, 1, 2$ számjegyekből?

55. (K) Mennyi ötjegyű szám képezhető a $0, 1, 2, 3, 4$ számokból, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?

56. (K) Mennyi négyjegyű 5 - tel osztható számot képezhetünk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből, ha egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

57. (K) Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből mennyi háromjegyű szám képezhető, amelyben szerepel legalább egy darab 5 - ös?

58. (K) Hány olyan 9 jegyű szám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy szorzata prímszám?

59. (K) Egy dobókockával háromszor dobunk, s az eredményeket leírjuk egymás mellé.

a) **Mennyi háromjegyű számot kaphatunk?**

b) **Mennyi háromjegyű, páros számot kaphatunk?**

c) **Mennyi háromjegyű, néggyel osztható számot kaphatunk?**

d) **Mennyi háromjegyű, 9 - cel osztható számot kaphatunk?**

60. Mennyi 3 színű zászlót készíthetünk 5 különböző színből, ha egy színt csak egyszer használhatunk fel?

61. (K) Mennyi 6 sávos logót készíthetünk 7 különböző színből, ha egy színt többször is felhasználhatunk?

62. (K) Adott egy háromszög A, B, C csúcsa, Zoli és Ildi kiszeretné színezni az összes lehetséges módon úgy, hogy ugyanabból az 5 színből választhatnak. Igaz – e, hogy Zolinak legalább kétszer annyit kell dolgoznia, ha Zoli egy színt többször is, míg Ildi egy színt csak egyszer szeretne a színezéshez felhasználni?

63. (K) Az osztályfőnök a 28 fős osztályban ki szeretné osztani az osztálytitkár, a gazdasági felelős, a kultúrfelelős és a sportokért felelős tisztségeket. Ehhez egy kalapban összegyűjti minden diák nevét, majd az első félévben visszatevés nélkül, a másodikban pedig visszatevéssel húzat a kalapból minden tisztségre egy főt. Hányféleképpen alakulhat az osztályban a „vezetők” személye az említett módszerekkel?

64. (K) Egy 35 fős osztályban kisorsolunk 7 különböző könyvet. Hány olyan eset lehetséges, amikor Kiss Ottó kap könyvet, ha

a) **egy tanuló csak egy könyvet kaphat?**

b) **egy tanuló több könyvet is kaphat?**

65. (K) A bohémiai útlevelet 2 betűvel és 5 számmal jelölnek. Az első szám jelzi, hogy férfi vagy nő a tulajdonos, a második szám pedig azt, hogy a 7 tartományból melyikben él. Hány útlevelet adhattak ki összesen, ha 20 betűt használtak fel hozzájuk?

66. (K) Egy városban 3 fiú és 2 lány munkát keres. A városban 3 üzemben vesznek fel férfi munkaerőt, 2 bölcsőde hirdet felvételt nőknek és van még 2 üzlet, ahol férfiakat és nőket egyaránt alkalmaznának. Hányféleképpen helyezkedhet el az 5 fiatal, ha minden munkahelyen legalább 5 dolgozót tudnak alkalmazni?

67. (K) Egy hegy csúcsára 6 út vezet. Két ember felmegy, majd lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha

a) **$1-1$ utat legfeljebb egy ember használhat és legfeljebb egyszer?**

b) **$1-1$ út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban?**

c) **mindegyik út mindkét irányban többször is igénybe vehető?**

68. (K) Egy bálon a 100 jelenlevő között kisorsolnak 5 ugyanolyan CINEMA utalványt. Hányféleképpen alakulhat a sorsolás, ha egy ember csak egy utalványt kaphat?

69. (E) Egy 32 - es létszámú osztályban klubdélutánt rendeznek, ahol a tanulók között 4 ugyanolyan tombolatárgyat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha egy tanuló több tárgyat is elnyerhet?

70. (K) Adott a síkon 15 pont, melyek közül semelyik 3 nem illeszkedik egy egyenesre. A 15 pont mennyi háromszöget határozhat meg?

71. (K) A térben adott 9 különböző pont, melyek közül semelyik 4 nem esik egy síkba. Hány különböző síkot határoznak meg?

72. (K) Hány ötszöget határoznak meg egy szabályos 20 – szög csúcsai?

73. (K) Egy 7 elemű halmaznak mennyi 3 elemű részhalmaza van?

74. (K) Összesen mennyi részhalmaza van egy 4 elemű halmaznak?

75. (K) Hányféleképpen tölthetjük ki az ötös lottószelvényt? (A sorsoláson 90 számból húznak ki 5 – öt.)

76. (K) Az autószerelő műhely egy dobozában 60 kerékanya van. Mennyi anyacsavar – szettet választhat ki a szerelő a jobb első kerékre, ha az anyákat megkülönböztetjük, s minden kerékre 4 kell belőle?

77. (K) Miután Hófehérke megette a mérgezett almát, a 7 törpe küldöttséget indított a mostohához azért, hogy az élessze újra Hófehérkét. Hány különböző 3 tagú küldöttséget indíthattak?

78. (K) Hányféle szorzatot képezhetünk a következő számok közül négyet kiválasztva: $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17$?

79. (E) Hányféle összeget képezhetünk az $5; 25; 125; 625$ számokból, ha 3 számot használunk fel, s egy számot többször is kiválaszthatunk?

80. (E) Egy pizzériában 6 – féle hamburgert árulnak, mindegyiket $1000\ Ft$ – ért. Hányféleképpen költhetünk el $10\,000\ Ft$ – ot hamburgerre, ha nemcsak egyféle hamburgert szeretnénk hazavinni?

81. (E) Hányféleképpen rakhatunk le egymás mellé 5 piros és 8 kék golyót úgy, hogy 2 piros golyó nem kerülhet egymás mellé?

82. (K) A BKV járművein a jegyeken 9 mező található 1 - től 9 - ig számozva. A lyukasztókat úgy állítják be, hogy $2, 3$ vagy 4 mezőt lyukasszanak ki. Hányféleképpen állíthatják be a lyukasztókat?

83. (K) Egy dobozban 15 cédula van, amelyekre rendre az $1, 2, \dots, 14, 15$ számokat írtuk. Húzzunk ki egymás után 5 cédulát visszatevés nélkül.

***a)* Hány olyan eset adódhat, amelyben a számok növekvő sorrendben vannak?**

***b)* Hány esetben lesz a kihúzott legkisebb szám nagyobb 5 - nél?**

84. (K) Egy fővárosi, egy debreceni és egy külföldi barátunknak szeretnénk 2 – 2 képeslapot küldeni úgy, hogy egyikük se kapjon két egyforma lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az újságárusnál összesen 7 – féle képeslap kapható?

85. (K) Egy 18 fős csoport kirándulni megy és 6 ágyas szobákban szállnak meg. Hányféleképpen foglalhatják el a szobákat, ha a szobák különbözők? (A szobákon belüli elhelyezkedésekre nem vagyunk tekintettel.)

86. (K) Egy 12 fős katonai osztagból 4 irányba küldenek járőröket. Egy járőregyüttest 2 katona alkot. Hány lehetőség van a járőrök kiválasztására?

87. (K) A hatos lottón (45 számból húzunk le 6 - ot) hányféleképpen lehet 4 találatunk?

88. (K) Hány különböző módon tudunk egy 20 fős társaságból két 8 fős csapatot létrehozni, akik focimeccset játszanak egymás ellen? (A csapatban betöltött pozíció nem számít.)

89. (K) Egy pályázatra 30 pályamű érkezett, melyet 18 férfi és 12 nő adott be. A díjazáskor 1 darab első, 2 darab második és 3 darab harmadik helyezettet állapítanak meg.

***a)* Hányféleképpen történhet a díjazás, ha egy ember csak egy díjat nyerhet?**

***b)* Hányféleképpen történhet a díjazás, ha az első és két második helyezett is nő?**

90. (K) Egy 34 fős (21 fiú és 13 lány) osztályt 5 diák képvisel egy ünnepségen.

***a)* Hányféleképpen választhatják ki az 5 tagú küldöttséget a tanulók?**

***b)* Hányféleképpen választhatnak ki egy 3 fiúból és 2 lányból álló küldöttséget?**

91. (K) Egy raktárban 100 darab készülékből 8 darab hibás. Hányféleképpen lehet 6 készüléket kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott készülékek között

a) **ne legyen egy hibás sem?**

b) **mind hibás legyen?**

c) **legalább 4 hibás legyen?**

d) **legfeljebb 5 hibás legyen?**

92. (K) Egy dobozban 25 piros és 35 kék kocka van. A 60 kockából 26 - ot kivéve, hány esetben lesz közöttük

a) **mindegyik kék?**

b) **pontosan 5 piros?**

c) **legalább 24 piros?**

d) **legfeljebb 25 kék?**

93. (K) Egy akváriumban 30 hal közül 10 neonhal, a többi pedig guppi. A 30 halból 7 - et kivéve, hány esetben lesz közöttük

a) **mindegyik neonhal?**

b) **pontosan 2 guppi?**

c) **legalább 6 neonhal?**

d) **legfeljebb 5 neonhal?**

94. (E) Hányféleképpen választhatunk ki $1 - 200$ között (1 – et és 200 – at is beleértve) 3 különböző pozitív egész számot úgy, hogy az összegük osztható legyen 3 – mal?

95. (K) Két 4 fős család (2 szülő, 2 gyerek) kirándulni megy, s egy 5 és egy 4 fős sátorban éjszakáznak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha mindkét sátorban lesz $1 - 1$ házaspár a gyerekekkel?

96. (K) Egy 11 fős csoport 3 csónakot bérel: egy kétülésest, egy négyülésest és egy ötülésest. A beszállás során a csónakokon belüli elhelyezkedés közömbös.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?

b) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha 2 tanuló egy csónakba akar kerülni?

97. (K) Egy nyársra 6 étel darab fér fel úgy, hogy csirkemellből, szalonnából és hagymából választhatunk. Hányféleképpen állíthatjuk össze a nyársat, ha legfeljebb 3 hagymát szeretnénk rárakni? (Akár az is lehet, hogy egyféle étel lesz a nyárson.)

98. (K) Egy 25 tagú közösség 3 tagú vezetőséget választ: 1 titkárt és 2 helyettest. Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy Levente vezetőségi tag legyen?

99. (K) Egy csomag magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) kiosztunk 3 embernek $2-2$ lapot. Hány különböző kiosztás lehetséges?

100. (K) A 32 lapos magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) hányféleképpen lehet kiválasztani

a) 5 lapot úgy, hogy a kiválasztott lapok között legyen 2 ász és 1 király?

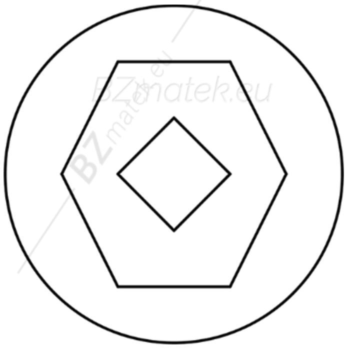
b) 8 lapot úgy, hogy legalább 1 zöld színű lap legyen a kiválasztottak között?

101. (E) Egy csomag magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) hányféleképpen választhatunk ki 4 lapot úgy, hogy 1 darab ász és 3 darab zöld legyen a lapok között?

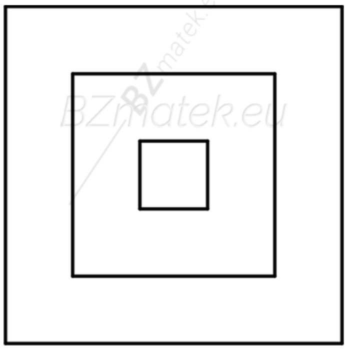
102. (E) Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros és két király?

103. (E) A 32 lapos magyar kártyából (4 szín, mindegyikből $8-8$ lap) hányféleképpen lehet kiválasztani 8 lapot úgy, hogy ász és piros is legyen a kiválasztott lapok között?

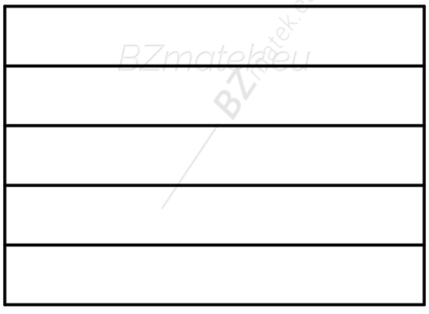
104. (K) Egy pénzintézet 3 részből álló logójában 7 különböző színből akarnak használni hármat. A grafikus az összes lehetséges összeállítást elkészíti. Hány mintát nyújt át a megrendelőnek? (A tartományok nem lehetnek azonos színűek.)



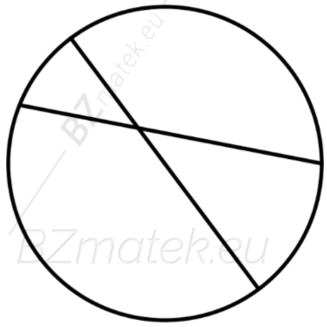
105. (K) Egy cég az ábrán látható kitűzőket gyárt. A kitűzőn látható 3 mező kiszínezéséhez 6 szín közül választhat. Minden mező kiszínezéséhez csak egy színt használ és a különböző részek lehetnek azonos színűek is. Mennyi kitűzőt kell legyártani, ha minden verzióból szeretnének kiállítani példányt a boltban, s az egyszínűekből egy – egy darabot, míg a többiből két – két darabot?



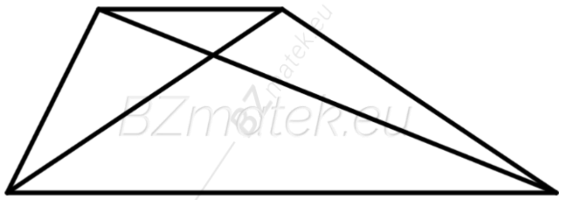
106. (K) Adott 6 szín (sárga, kék, piros, zöld, fekete, lila), mellyel ki szeretnénk színezni egy 5 sávos zászlót. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha egy színt többször is felhasználhatunk és az alsó vagy felső sávok közül legalább az egyiknek zöld színűnek kell lennie?



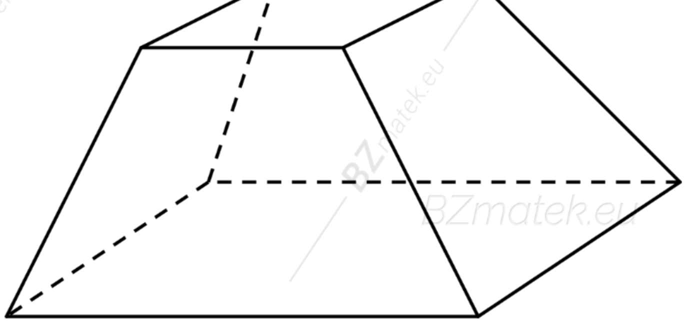
107. (K) Adott egy kör, melyet 2 húrja 4 síkrészre bont. Hányféleképpen színezhetjük ki az egyes tartományokat, ha összesen 4 színből dolgozhatunk (piros, kék, zöld, sárga) és pontosan 3 színt szeretnénk felhasználni hozzá úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek?



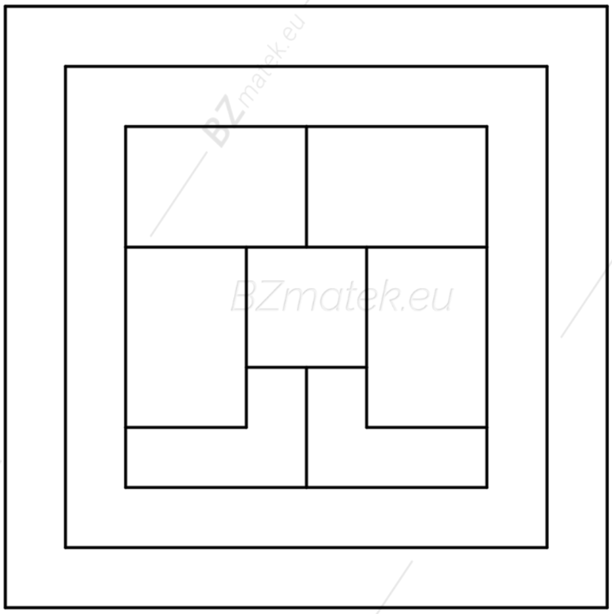
108. (K) Egy konvex négyszöget két átlója 4 háromszögre bontja. Hányféleképpen színezhetjük ki az egyes tartományokat, ha 5 színből dolgozhatunk (lila, fekete, szürke, rózsaszín, narancssárga) és legalább 3 színt fel szeretnénk használni úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek?



109. (K) Adott az ábrán látható négyzet alapú egyenes csonkagúla. Ki szeretnénk színezni mindegyik lapját úgy, hogy csak 2 színből választhatunk (piros és zöld). Hányféleképpen színezhetjük ki, ha két színezést akkor tekintünk különbözőnek, ha forgatással nem vihetők egymásba?



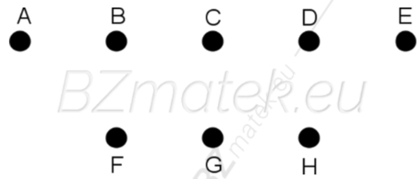
110. (K) Az ábrán egy csempe képe látható. A csempe tartományait 3 színnel (kék, sárga, fekete) színezhetjük ki, s azt is csak úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. (Egy tartomány csak egy színnel színezhető.) Hányféleképpen lehet a csempét a feltételeknek megfelelően kiszínezni?



111. (K) Adott egy háromszög A, B, C csúcsa, Zoli és Ildi kiszeretné színezni az összes lehetséges módon úgy, hogy ugyanabból az 5 színből választhatnak. Igaz – e, hogy Zolinak legalább kétszer annyit kell dolgoznia, ha Zoli egy színt többször is, míg Ildi egy színt csak egyszer szeretne a színezéshez felhasználni?

112. (E) Egy háromszög oldalainak hossza egész számok, s a kerülete 7 cm. A háromszög oldalai piros, kék és zöld színűek, mindegyik különböző festésű. Mennyi ilyen háromszög létezik?

113. (K) Adott 7 pont a síkon a következőképpen elhelyezve:



***a)* Mennyi olyan egyenes rajzolható, amely legalább 2 pontra illeszkedik?**

***b)* Mennyi olyan háromszög létezik, amelynek csúcsai a pontok közül kerülnek ki?**

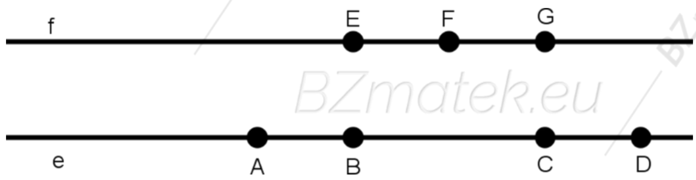
***c)* Mennyi olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a pontok közül kerül ki?**

114. (K) Az e és f egyenesek párhuzamosak egymással. Kijelölünk az e egyenesen 4, az f egyenesen pedig 3 pontot.

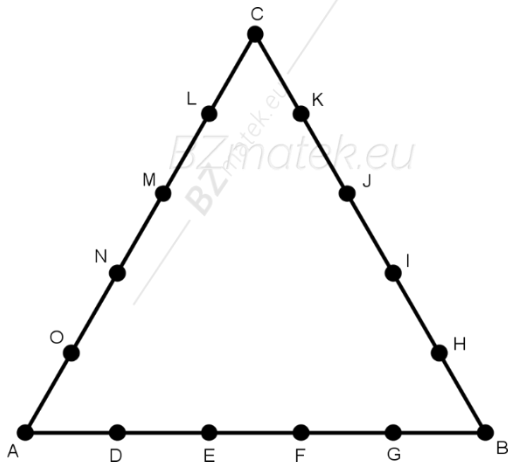
a) **A kijelölt pontok hány olyan egyenest határoznak meg, amelyek az e és f egyenest is metszik?**

b) **Hány háromszöget határoznak meg a kijelölt pontok?**

c) **Mennyi olyan ötszög van, amelynek mindegyik csúcsa a pontok közül kerül ki?**



115. (K) Adott egy szabályos háromszög, melynek oldalait 5 egyenlő részre daraboljuk.



a) **Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ötödölő pontok valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott ötödölő pontok közül?**

b) **Mennyi olyan négyszög létezik, amely csúcsai az ötödölő pontok közül való és a háromszög mindhárom oldalán kell lennie legalább egy csúcsának?**

116. (E) Aladár nemrég kezdett érméket gyűjteni, eddig csupa különböző érméje van. Legutóbbi találkozásunkkor a következő kijelentést tette: „Ha még 2, az eddigiektől és egymástól is különböző érmét megszerzek, akkor 20 – szor többféleképpen tudom őket a vitrinben, sorba egymás mellé tenni, mint most.” Hány darabos a gyűjteménye most Aladárnak?

117. (E) Egy filmklubban néhány film közül választanak ki 4 - et, amit majd meg fognak nézni. Hány film közül választanak, ha a választási lehetőségek száma 495?

118. (E) Egy dobozban 2 darab fehér golyó van. Hány piros golyót kell a dobozba tenni, hogy az összes golyót kiválasztva a lehetséges sorrendek száma 21 legyen?

119. (E) Két sakkozó, Anna és Bálint játszik egymás ellen a következő szabályok szerint: Minden győzelem esetén 1 pont jár a győztesnek és 0 pont a vesztesnek, míg döntetlen végeredménynél $0,5-0,5$ ponttal gazdagodnak a játékosok. Amennyiben valamelyik legfeljebb 6 játszmából több, mint 3 pontot szerez, akkor a játékot az első ilyen esetben befejezik, és az illető nyert. Ha az első 6 játszma során ez nem következik be, akkor mindannyiszor 2 partit játszanak, míg valamelyikük több pontot szerez. Hányféleképpen jöhet létre a $3,5-2,5$ – es végeredmény?

120. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a BIOLÓGIA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

B	**I**	**O**	**L**	**Ó**
I	**O**	**L**	**Ó**	**G**
O	**L**	**Ó**	**G**	**I**
L	**Ó**	**G**	**I**	**A**

121. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a VONALZÓ szót, ha minden lépésnél csak balra lefele vagy jobbra lefele haladhatunk?

			V			
		O		**O**		
	N		**N**		**N**	
A		**A**		**A**		**A**
	L		**L**		**L**	
		Z		**Z**		
			Ó			

122. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a TÉGLALAP szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

T	**É**	**G**	**L**	**A**	**L**	**A**	**P**
É	**G**	**L**	**A**	**L**	**A**	**P**	
G	**L**	**A**	**L**	**A**	**P**		
L	**A**	**L**	**A**	**P**			
A	**L**	**A**	**P**				
L	**A**	**P**					
A	**P**						
P							

123. (K) A következő ábrából hányféleképpen olvashatjuk ki a PARALELEPIPEDON szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra vagy lefele haladhatunk minden lépésnél?

P	**A**	**R**	**A**	**L**				
A	**R**	**A**	**L**	**E**				
R	**A**	**L**	**E**	**L**				
A	**L**	**E**	**L**	**E**				
				P	**I**	**P**	**E**	**D**
				I	**P**	**E**	**D**	**O**
				P	**E**	**D**	**O**	**N**

124. (K) Hányféleképpen olvasható ki a VARIÁCIÓ szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?

							V							
						A	**A**	**A**						
					R	**R**	**R**	**R**	**R**					
				I	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**				
			Á	**Á**	**Á**	**Á**	**Á**	**Á**	**Á**	**Á**	**Á**			
		C	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**		
	I	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	
Ó	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**	**Ó**

125. (E) Hányféleképpen lehet kiolvasni az FELADATGYŰJTEMÉNY szót, ha minden lépésnél csak jobbra vagy lefelé lehet haladni?

F	E	L	A	D	A	T	G	Y	Ű
E	L	A	D	A	T	G	Y	Ű	J
L	A	D	A	T	G		Ű	J	T
A	D	A	T	G	Y	Ű	J	T	E
D	A	T	G	Y	Ű	J	T	E	M
A	T	G	Y	Ű	J	T	E	M	É
T	G	Y	Ű	J	T	E	M	É	N
G	Y	Ű	J	T	E	M	É	N	Y

126. (E) Hányféleképpen olvasható ki a DEBRECENI szó, ha minden lépésben függőlegesen vagy átlósan lefelé lehet csak haladni?

				D				
			E	**E**	**E**			
		B	**B**	**B**	**B**	**B**		
	R	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	**R**	
E	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**	**E**
	C	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	**C**	
		E	**E**	**E**	**E**	**E**		
			N	**N**	**N**			
				I				

127. (E) Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető az ABRAKADABRA szó összes betűinek felhasználásával, ha az A betűk nem kerülhetnek egymás mellé?

128. (E) Mennyi (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a SZERENCSÉS szó összes betűinek felhasználásával, ha az E és S betűk nem kerülhetnek egymás mellé? (A CS és SZ betűket két különálló betűnek tekintjük.)

129. (E) A MATEK szó betűit az összes lehetséges sorrendben leírtuk egymás alá abc – rendbe szedve. Milyen betű áll a 88. sor végén?

130. (E) Mennyi 0 – ra végződik az $200!$ értéke?

131. (E) Írd fel az $(a+2b)^4$ és az $(3x-y)^5$ hatványt összeg alakban!

132. (E) Mennyi lesz az x^4 együtthatója a $(3x+2)^{10}$ kifejezésben, ha elvégezzük a hatványozást és az összevonásokat?

133. (E) Határozd meg az $\left(\frac{a}{b}-\sqrt{b}\right)^{16}$ hatvány kifejtésének középső tagját!

134. (E) Az $\left(x^2+\sqrt{x}\right)^n$ binomiális tétel szerinti kifejtésének harmadik tagja $15x^9$. Mekkora az n kitevő? Add meg a kifejezés utolsó előtti tagját!

135. (E) Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $\binom{n}{1}+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{2}=0$

b) $C_{n+1}^{4}+C_{n}^{4}-2\cdot C_{n}^{2}=0$

c) $V_{n}^{5,ism}+V_{n}^{4,ism}=72\cdot V_{n}^{3,ism}$

136. (E) Igazold a következő összefüggéseket: $\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{7}$ és $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 − 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok