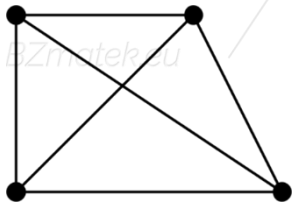
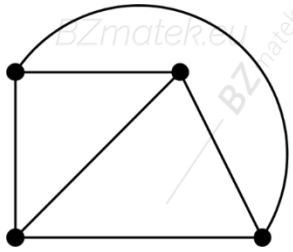
Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Gráfelmélet III.

DEFINÍCIÓ: (Síkgráf)
Egy G gráfot síkba rajzolható gráfnak (síkgráfnak) nevezünk, ha úgy ábrázolhatjuk a síkon, hogy éleinek a csúcsokon kívül nincs közös pontjuk, vagyis az élek nem keresztezik egymást.

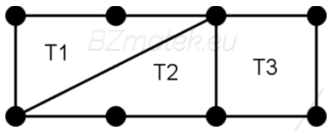




Topológikus bővítés – szűkítés:
A gráfok síkba rajzolhatóságát nem befolyásolja, ha valamely élükön egy új másodfokú csúcspontot veszünk fel (bővítés), vagy ha valamely két élét a gráfnak, amelyek ugyanarra a másodfokú csúcsra illeszkednek egybeolvasztunk, s a csúcsot töröljük (szűkítés).

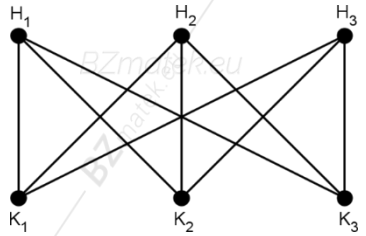
DEFINÍCIÓ: (Topológikusan izomorf)
A G gráfot a G' gráffal topológikusan izomorfnak nevezzük, ha G - ből véges sok topológikus szűkítéssel, illetve bővítéssel G' - vel izomorf gráf állítható elő.

DEFINÍCIÓ: (Tartomány)
Egy G gráfnak azon minimális köreit, melyek a belsejükben már nem tartalmaznak a gráfnak semmilyen pontját, tartományoknak (országoknak) nevezzük.



Megjegyzés:
Két tartományt szomszédosnak szokás nevezni, ha van közös élük. Ábrán: T1-T2.

Három ház – három kút probléma:
Egy mezőn három házat építettek és a lakóknak három kutat ástak. A kutak gyakran kiszáradnak, ezért minden házból minden kúthoz utat kell építeni. Mivel a házak lakói haragban vannak egymással, megépíthetők - e az utak úgy, hogy ne keresztezzék egymást?



Kuratowski – féle gráfok:
Az 5 csúcsú teljes gráfot és a 3 ház – 3 kút gráfot együtt Kuratowski – féle gráfoknak nevezzük.

TÉTEL:
A Kuratowski - féle gráfok nem rajzolhatók síkba.

TÉTEL: (Kuratowski - tétele)
Egy gráf pontosan akkor síkgráf, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topológikusan izomorf az 5 csúcsú teljes gráffal vagy a 3 ház – 3 kút gráffal.

Megjegyzés:

- *Szemléletesen: Egy G gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely vagy ötcsúcsú teljes gráffá vagy három ház három kút gráffá vonható össze. A gráf összevonásán a másodrendű csúcsok megszüntetését értjük.*

- *A Kuratowski – féle gráfokból elhagyva egy – egy élt már síkba rajzolható gráfok adódnak.*

TÉTEL: (Fáry – Wagner)
Ha egy G gráf síkba rajzolható, akkor van olyan síkbarajzolása, ahol minden él egyenes szakasz.

TÉTEL:
Minden G egyszerű, síkba rajzolható gráfnak létezik olyan csúcsa, amely legfeljebb ötödfokú.

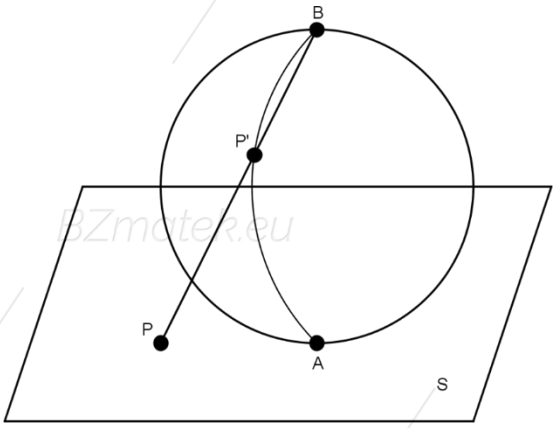
TÉTEL: (Euler - formula)
Ha egy G gráf síkgráf, akkor teljesül a következő összefüggés: $c - e + t = k + 1$, ahol e az élek, c a csúcsok, t a tartományok és k a komponensek számát jelöli.

TÉTEL:
Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf, melynek minden köre legalább 4 hosszú és csúcsainak száma legalább 4, akkor teljesül a következő összefüggés: $e \leq 2c - 4$, ahol e az élek és c a csúcsok számát jelöli.

TÉTEL:
Ha egy Gsíkbarajzolható gráfban a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 darab ötödfokú csúcsa van a gráfnak.

TÉTEL:
Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf és pontjainak száma legalább 3, akkor teljesül a következő összefüggés: $e \leq 3c - 6$, ahol e az élek és c a csúcsok számát jelöli.

<u>Sztereografikus projekció:</u>
A sztereografikus projekcióval a síkon ábrázolhatunk egy gömbre rajzolt gráfot és fordítva, egy síkba rajzolt gráfot izomorf módon ábrázolhatunk a gömbön. Térképészetben gyakran használt eljárás, hogy egy G gömb és egy S sík pontjai között létesítünk megfeleltetést. Amennyiben a G gömb egy A pontban érinti a síkot, akkor az A pont átellenes pontja legyen B. A sík valamely P pontjának gömbi megfelelőjét úgy kapjuk meg, hogy a P – t a B - vel összekötő egyenesnek vesszük a G gömbbel vett metszéspontját, s ezt jelöljük P' - vel. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, szögtartó, de nem távolságtartó. Minden pontot le lehet vetíteni a síkra kivéve a B pontot. Amennyiben a B pont a gráf egy csúcsa, akkor a vetítés előtt a gömböt úgy forgatjuk, hogy a gráfnak ne legyen csúcsa a B pontban.

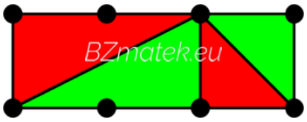


TÉTEL:
Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

<u>Megjegyzés:</u>

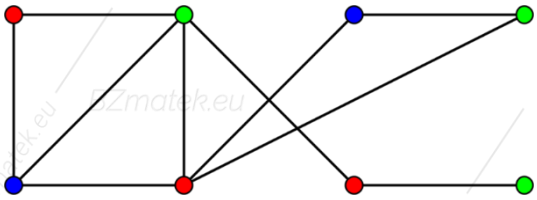
- *A gömbön a külső és belső tartomány közti különbség eltűnik.*
- *Egy síkgráf bármely tartománya lehet egy másik síkbarajzolásnál külső tartomány.*

DEFINÍCIÓ: (k – színezhető gráf)
Egy G síkgráfot k - színezhetőnek nevezünk, ha tartományait ki lehet festeni k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos tartomány különböző színű legyen.



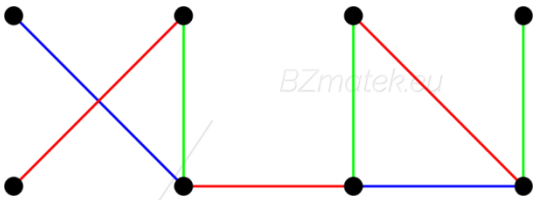
2 színnel kiszínezhető gráf

DEFINÍCIÓ: (Kromatikus szám)
A k számot a G gráf kromatikus számának nevezzük, ha a gráf csúcsai kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok, vagyis az éllel összekötött csúcsok színei különbözők lesznek. Jelölés: $\chi\ (G)$.



Kromatikus szám: 3

DEFINÍCIÓ: (Kromatikus index)
A k számot a G gráf kromatikus indexének (élkromatikus számának) nevezzük, ha a gráf élei kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a szomszédos élek, vagyis az egy csúcsra illeszkedő élek színei különbözők lesznek. Jelölés: $\chi_e\ (G)$.



Kromatikus index: 3

DEFINÍCIÓ: (Páros gráf)
Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha a csúcsai két halmazba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden élének egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik halmazba tartozzon.

Megjegyzés:
A páros gráf csúcsai kiszínezhetők 2 színnel úgy, hogy éleinek végpontjai különböző színűek.

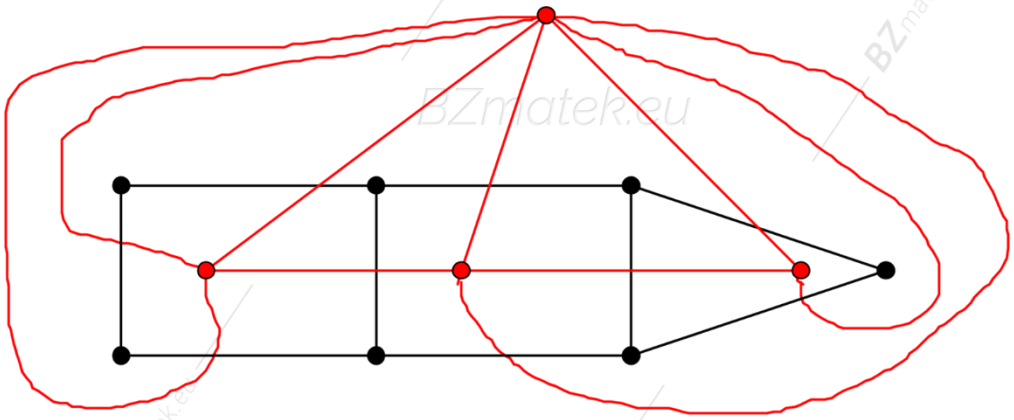
TÉTEL:
Ha a G gráf páros gráf, akkor bármely körének az éleinek száma páros.

TÉTEL:
Ha a G gráf egyszerű, akkor a kromatikus száma nem nagyobb, mint a csúcspontjai fokszámának eggyel megnövel értéke. Jelöléssel: $\chi\,(G) \leq \Delta(G) + 1$.

TÉTEL: (Vizing)
Ha a G gráf egyszerű, akkor a kromatikus indexe egyenlő a csúcsok fokszámainak maximumával, vagy eggyel megnövelt értékével. Jelöléssel: $\chi_e = \Delta\,(G)$ vagy $\chi_e = \Delta\,(G) + 1$.

TÉTEL:
A G gráf kromatikus száma akkor és csak akkor 2, ha G páros gráf és van legalább egy éle.

<u>Duális gráf:</u>
Egy G gráf minden T_i tartományában vegyünk fel egy u_i pontot. Legyen az e_s olyan éle G - nek, amely a T_i és a T_j tartományok határán fekszik, s ekkor vezessen e_s^* él u_i - ból u_j - be. Az így felvett csúcsok és az őket összekötő élek alkotják a G duális gráfját.



A fekete gráf duálisa a piros gráf.

TÉTEL: (Ötszín - tétel)
Bármely síkbarajzolható sokszöggráf kiszínezhető öt színnel.

<u>Négyszín - sejtés:</u>
A négyszín – sejtés alatt azt értjük, hogy minden térkép kiszínezhető legfeljebb négy színnel úgy, hogy egy - egy él mentén a szomszédos tartományok színe különböző legyen.

Megjegyzés:

- *Térképek színezésénél szokásos eljárás, hogy a szomszédos országokat különböző színekkel színezik ki. Ha az adott síkbarajzolható G gráf duálisa G', akkor a G gráf k színnel való színezhetősége G' - re vonatkozólag azt jelenti, hogy G' csúcsait ki lehet színezni k színnel úgy, hogy szomszédos csúcsok különböző színűek, vagyis bármely élének két végpontja különböző színű. A színezési probléma duális gráfra való átfogalmazása lehetőséget ad arra, hogy tetszőleges gráf színezhetőségéről beszéljünk.*

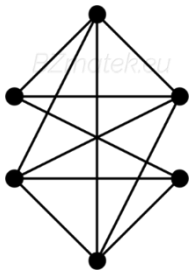
- *Színezés esetén egyszerű gráfokról célszerű beszélni: párhuzamos élek nem változtatják meg a csúcsok színezhetőségét, hurokél esetén pedig a csúcs nem színezhető ki semmire, mert szomszédos önmagával.*

- *A négyszín – tétel bizonyítását eddig csak számítógépek alkalmazásával tudták végrehajtani a feltárt konfigurációk bonyolultsága miatt. A matematikusok egy része ma is vitatja azt, hogy egy tételnek a számítógépes bizonyítása elfogadható - e. A bizonyításban azóta többször is találtak hibát, de azok javíthatónak bizonyultak. Azt azonban könnyedén be lehet látni, hogy legalább 4 szín kell a síkbeli gráfok kiszínezéséhez. (pl.: tetraéder síkgráfja)*

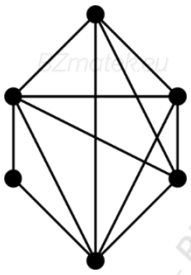
Gyakorló feladatok

1. Az alábbi gráfok közül melyek rajzolhatók síkba?

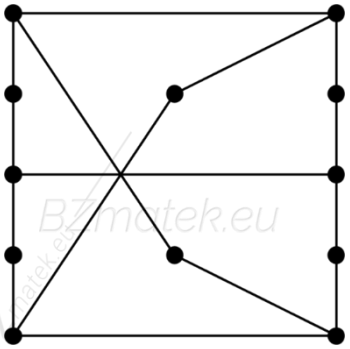
A:



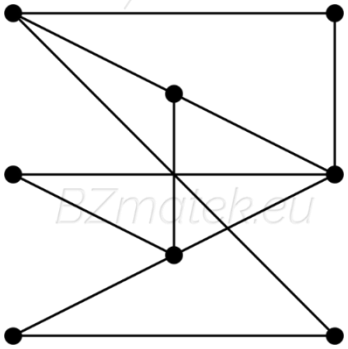
B:



C:

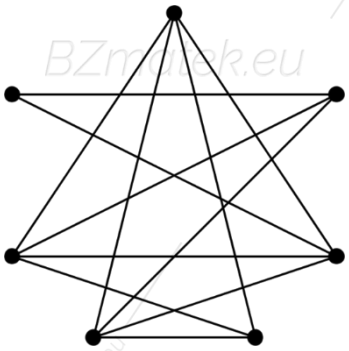


D:

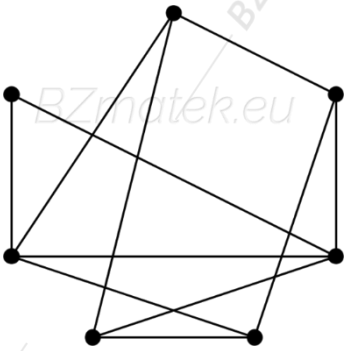


2. Az alábbi gráfok közül melyek rajzolhatók síkba?

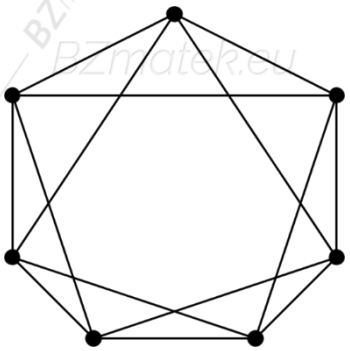
A:



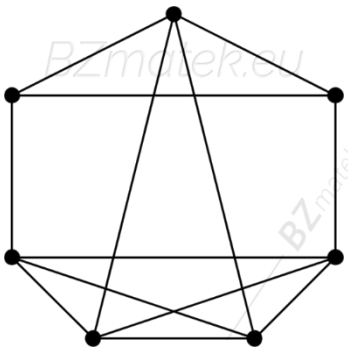
B:



C:

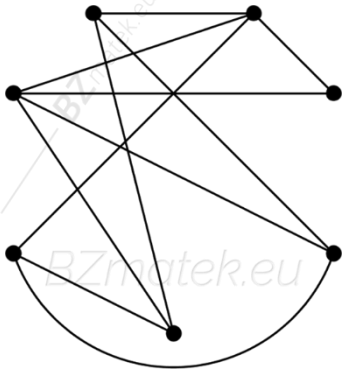


D:

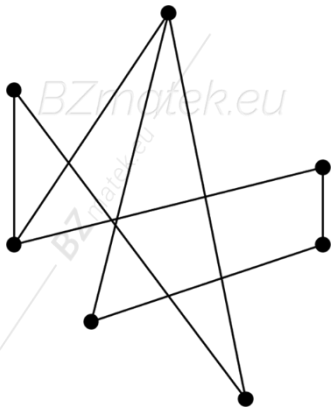


3. Rajzolható – e az alábbi gráfokkal izomorf síkbeli gráf?

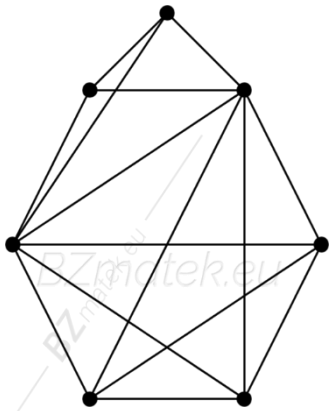
A:



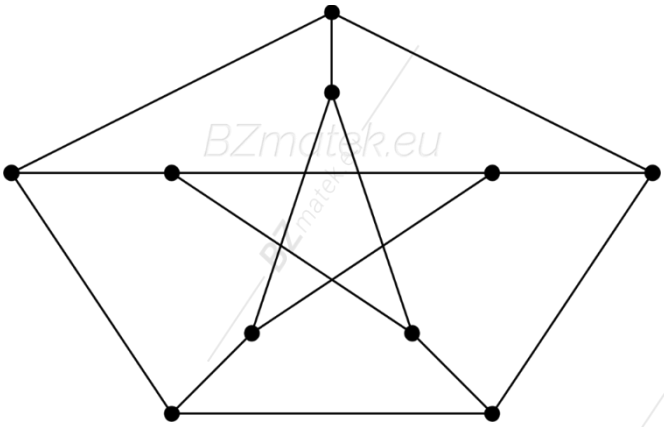
B:



C:

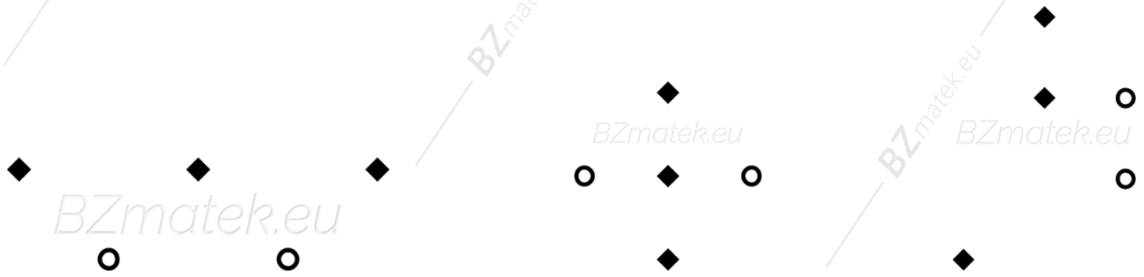


4. Síkbarajzolható – e az alábbi ábrán látható Peterson – féle gráf?



5. Egy nagyváros 3 vasútállomását és 2 autóbusz - pályaudvarát köztes megálló nélküli földalatti vasútvonalakkal kívánjuk összekötni úgy, hogy ezek ne keresztezzék egymást. (Nem szükséges egyenes pályát kialakítani.)

a) **Tervezd meg az összeköttetést a pályaudvarok alábbi elhelyezkedése esetén úgy, hogy minden vasútállomásról vezessen vonal minden autóbusz – pályaudvarhoz! (vasútállomás: ■; buszpályaudvar: ○)**



b) **Tervezd meg a fenti feltételek figyelembevételével a földalatti vasúthálózatot úgy, hogy a vasútállomások és az autóbusz - pályaudvarok között is legyen közvetlen kapcsolat!**

c) **Tervezd meg a hálózat továbbfejlesztését az a) feladat feltételei mellett úgy, hogy egy harmadik buszpályaudvar is szerepeljen a tervben!**

6. Egy faluban van 3 ház, velük szemben 3 közműcsatlakozás (víz, gáz és áramszolgáltatás). Minden közművet minden házhoz be akarunk vezetni. Megtehetjük – e ezt úgy, hogy egyik közműcsatlakozás sem halad át egy másik alatt vagy felett?

7. Négy üzem között úgy építettek vasútvonalakat, hogy azok minden üzemet a másik hárommal közvetlenül összekössenek, de sehol se keresztezzék egymást. Egy ötödik üzemet is felépítenek. Megépíthető - e négy új vasútvonal is az ötödik üzem és az előző négy üzem között úgy, hogy ezek a vonalak ne keresztezzenek sem korábbi, sem újonnan épült másik vonalat?

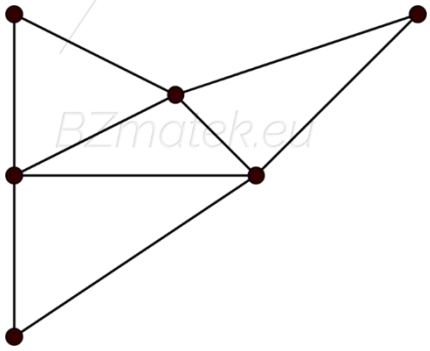
8. Tekintsük a következő testek élvázát gráfnak: tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder, hatszög alapú gúla, hatszög alapú hasáb. Rajzolj a síkban a fenti gráfokkal izomorf, keresztező él nélküli gráfokat!

9. Egy ötszög alapú hasáb egyik alaplapjára építsünk rá egy ugyanolyan alaplapú gúlát. Tekintsük a test élvázát gráfnak. Rajzolj a síkban ezzel a gráffal izomorf keresztező él nélküli gráfot, vagyis rajzold meg a test Schlegel – diagramját!

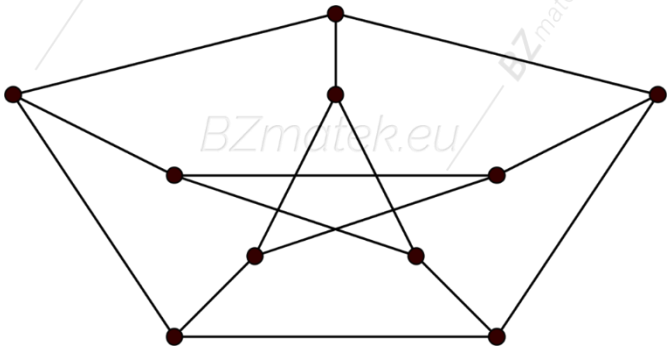
10. Adott a síkon 9 pont. Össze lehet – e kötni mindegyiket másik 6 ponttal úgy, hogy az összekötő vonalak ne metszék egymást?

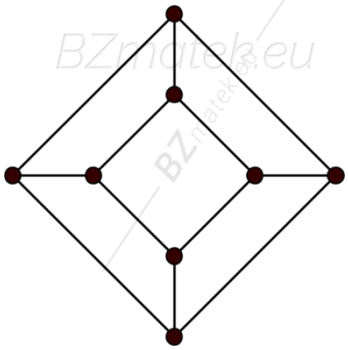
11. Egy sík terepen 20 sátor van. A sátrakat utakakkal akarják összekötni úgy, hogy az utak ne keresztezzék egymást. Maximálisan hány út építhető ki?

12. Színezd ki az alábbi gráf éleit úgy, hogy a szomszédos élek színe különböző legyen! Legalább mennyi színre van szükség?

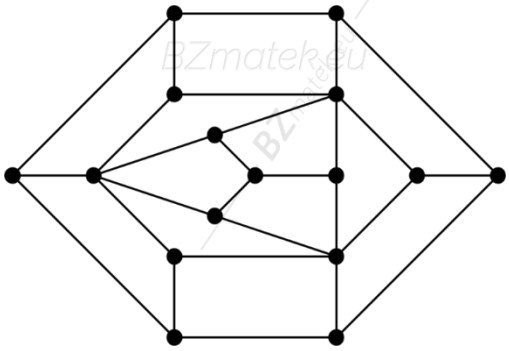


13. Határozd meg azt a minimális számot, ahány színnel az alábbi gráfok csúcsai kiszínezhetők úgy, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen!





14. Színezd ki az alábbi gráf csúcsait úgy, hogy bármely él két végpontja különböző színű legyen. Minimálisan hány színre van szükség? Van – e a gráfnak Hamilton – köre, illetve Hamilton – útja?



15. Minimálisan mennyi színnel lehet kiszínezni a szabályos poliéderek csúcsait, illetve éleit úgy, hogy két szomszédos csúcs, illetve az egy csúcshoz illeszkedő élek különböző színűek legyenek?

16. Ki lehet – e színezni a három ház – három kút gráf éleit 3 színnel úgy, hogy 3 – 3 él azonos színű legyen és egyik csúcshoz se csatlakozzon két azonos színű él?

17. Egy 5 pontú teljes gráf éleit pirosra vagy kékre színezzük úgy, hogy a gráfban ne legyen egyszínű háromszög.

a) **Mutasd meg, hogy minden pontból két piros és két kék él indul!**

b) **Bizonyítsd be, hogy a gráf minden pontját felfűzhetjük egyszínű, zárt láncra!**

18. Egy 5 csúcsú teljes gráf éleit két színnel (pirossal és kékkel) színezzük. Igaz - e, hogy tetszőleges színezés esetén mindig található egyszínű háromszög?

19. Egy 6 csúcsú teljes gráf éleit két színnel (pirossal és kékkel) színezzük.

a) **Bizonytísd be, hogy tetszőleges színezés esetén találunk egyszínű háromszöget!**

b) **Mutasd meg, hogy biztosan van két egyszínű háromszög!**

c) **Bizonyítsd be, hogy ha valamelyik csúcsból négy azonos színű él indul ki, akkor legalább két olyan háromszöget kapunk, amelynek oldalai azonos színűek?**

20. Egy szigetvilágban két hajótársaság biztosítja a szigetek közötti összeköttetést úgy, hogy bármely két sziget között van legalább egy hajójárat.

a) **Bizonyítsd be, hogy akármelyik 6 sziget között van három olyan, amelyek között körutat lehet bejárni egyazon társaság hajóival!**

b) **Igazold, hogy valamelyik társaság minden szigetről indít hajót!**

c) **Bizonyítsd be, hogy a két társaság közül kiválasztható az egyik úgy, hogy hajóival (átszállással) bármely szigetről akármelyik más szigetre eljuthatunk!**

21. Egy 17 csúcsú teljes gráf éleit három színnel (piros, kék, zöld) színezzük. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges színezés esetén találunk egyszínű háromszöget!

22. Tizenhét sziget között három hajótársaság biztosítja az összeköttetést úgy, hogy bármely két sziget között van legalább egy hajójárat. Igaz - e, hogy van három olyan sziget, amelyek között körutat lehet bejárni egyazon társaság hajóival!

23. Egy szabályos százötszögnek megfelelő gráf minden élét pirosra vagy zöldre festettük.

a) **Előfordulhat - e, hogy minden csúcsból 79 zöld átló indul?**

b) **Ha a sokszög 1120 átlóját zöldre festettünk, akkor hány piros átló van?**

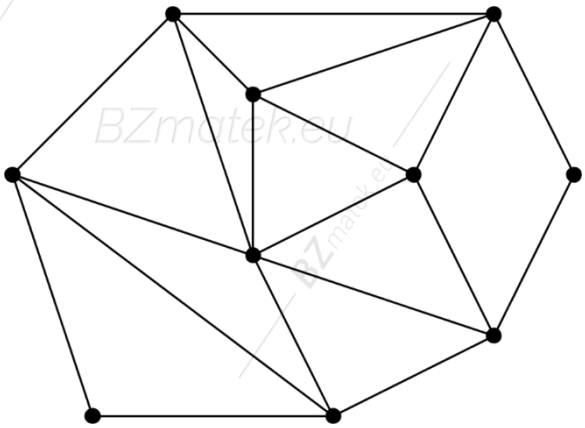
24. Egy konvex hetvenhétszögnek megfelelő gráf összes átlóját meghúzzuk, majd közülük egyeseket pirosra színezünk.

a) **Hány átlót húztunk meg?**

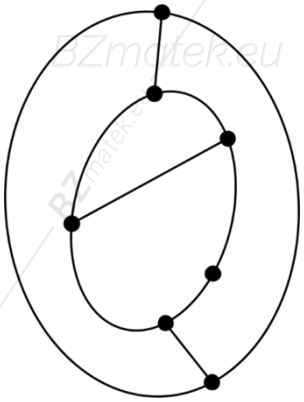
b) **Lehetséges – e, hogy a sokszög minden csúcsába pontosan 13 piros átló fut be?**

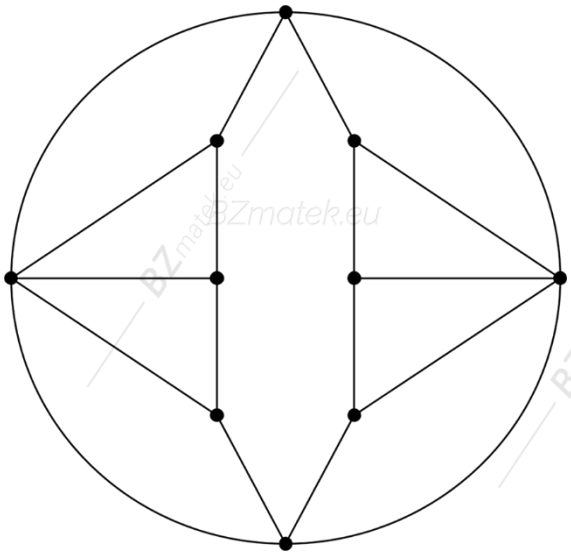
25. Bizonyítsd be, hogy egy páros gráfban nincs olyan kör, amely éleinek száma páratlan! Vizsgáld meg, hogy igaz – e az állítás megfordítottja?

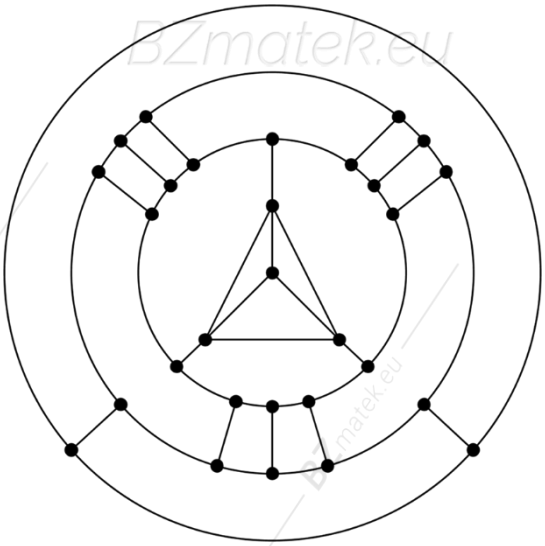
26. Tekintsük az alábbi gráfot egy sziget térképének. Színezd ki ezt a térképet két színnel úgy, hogy egy - egy él mentén a szomszédos tartományok színe különböző legyen!



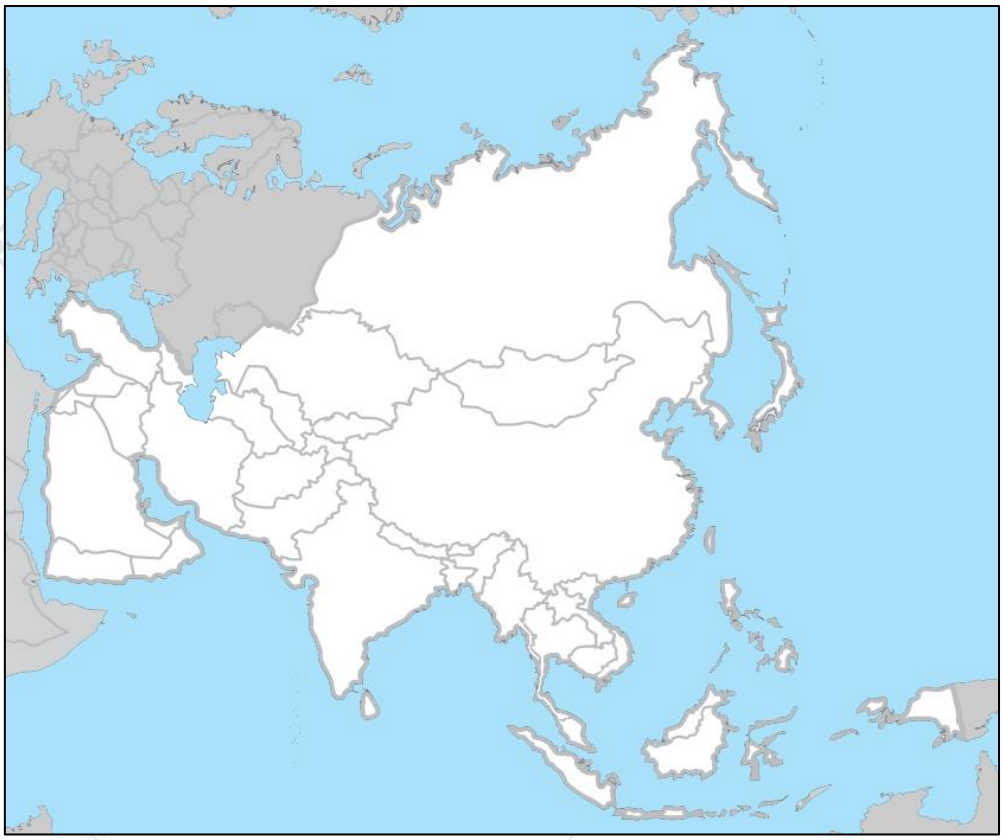
27. Legalább hány színre van szükség az alábbi térképek kiszínezéséhez, ha azt szeretnénk, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek?







28. Színezd ki az alábbi vaktérképeken Európa, Ázsia, Afrika, Észak – Amerika és Dél - Amerika országait úgy, hogy minden egymással határos ország különböző színű legyen, az óceánokkal határos területek ne legyenek világoskék színűek, továbbá a különálló szigeteket nem tekintjük semelyik országgal határosnak. Legkevesebb mennyi színnel teljesíthető ez a színezés, s legkevesebb mennyi színnel lehetne kiszínezni az egész világtérképet?



Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(10) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(11) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(13) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(14) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(15) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(16) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(21) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(22) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(23) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(24) Saját anyagok