Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf és pontjainak száma legalább 3, akkor teljesül a következő összefüggés: $e \leq 3c - 6$, ahol e az élek és c a csúcsok számát jelöli.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy a gráf összefüggő. Mivel a gráfban nincs hurokél, sem párhuzamos élek, így minden tartományt legalább 3 él határol, továbbá egy él pontosan két tartomány határán fekszik. Ebből a következő adódik: $3t \leq 2e.$ Mivel az Euler – formula szerint $t = 2 + e - c$, így ezt behelyettesítve az előző egyenlőtlenségbe, rendezés után adódik a bizonyítandó állítás: $3 \cdot (2 + e - c) \leq 2e$, vagyis $e \leq 3c - 6$.

Amennyiben a gráf nem összefüggő, akkor bizonyos számú él behúzása után készítsünk belőle összefüggő gráfot. Erre biztosan teljesül az állítás, de akkor az eredeti, nem összefüggő gráfra is teljesülnie kell, mert az kevesebb élből állt, mint a kapott összefüggő gráf.

■

TÉTEL:
Minden G egyszerű, síkba rajzolható gráfnak létezik olyan csúcsa, amely legfeljebb ötödfokú.

Bizonyítás:
Legyen a gráfnak x $(x \geq 3)$ csúcsa. Indirekt tegyük fel, hogy minden csúcs fokszáma legalább 6. Mivel a fokszámok összege megegyezik az élek számának kétszeresével, így a gráfnak legalább $3x$ éle lenne. Ekkor azonban ellentmondás adódik, mert egy x csúcsú összefüggő síkgráfnak legfeljebb $3x - 6$ éle lehet. Ezek alapján nem teljesülhet a feltevésünk, vagyis az eredeti állítás igaz.

■

TÉTEL: (Euler - formula)
Ha egy G gráf síkgráf, akkor teljesül a következő összefüggés: $c - e + t = k + 1$, ahol e az élek, c a csúcsok, t a tartományok és k a komponensek számát jelöli.

Bizonyítás:
A bizonyítást teljes indukcióval végezzük a komponensekre nézve.

Tekintsünk először egy összefüggő gráfot, vagyis $k = 1$ miatt a formula: $c - e + t = 2$.

Vegyük a gráfnak egy tetszőleges körét. Amennyiben ennek töröljük egy élét, akkor az általa határolt két tartomány egyesül. Ebből adódóan a tartományok és élek száma eggyel – eggyel csökken, míg a csúcsok száma nem változik, vagyis a $c - e + t$ formula értéke változatlan.

Mivel egy körből hagytunk el élt, így a gráfunk továbbra is összefüggő maradt. Végezzük el ezt az eljárást addig, amíg a gráfban nem marad kör, vagyis egy feszítő fát (körmentes, összefüggő gráfot) kapunk. Mivel a $c - e + t$ formula végig változatlan maradt, így ezt elég fákra belátni.

Fák esetén $t = 1$ és $e = c - 1$, s ezt behelyettesítve adódik az állítás: $c - (c - 1) + 1 = 2$.

Tegyük fel, hogy k komponensre igaz az állítás: $c - e + t = k + 1$.

Ekkor bizonyítsuk be, hogy $k + 1$ komponensre is teljesül az állítás: $c - e + t = k + 2$.

A $k + 1$ – edik komponensre, mint összefüggő gráfra fennáll a formula: $c' - e' + t' = 2$.

Ezt a $k + 1$ – edik komponenst illesszük az eddigi k komponenshez, s így az új gráfra a következő adódik: $c + c' + t + t' - e - e' = k + 3$.

Az így keletkező gráfra a következő is fennáll: $c'' = c + c'; e'' = e + e'; t'' = t + t' - 1$ (az újabb komponens külső tartománya megegyezik az addigiak külső tartományával).

Ezt visszahelyettesítve adódik az állítás: $c'' + t'' + 1 - e'' = k + 3$, vagyis $c'' + t'' - e'' = k + 2$.

Ezek alapján minden pozitív egész k értékre beláttuk a tételt.

■

TÉTEL:
A Kuratowski - féle gráfok nem rajzolhatók síkba.

Bizonyítás:
Jelölje a gráf éleinek számát e, a csúcsok számát c, a tartományok számát t és a komponensek számát pedig k.

Tekintsük először az 5 csúcsú teljes gráfot. $(c = 5; e = 10)$

Mivel minden tartományt legalább 3 él határol, továbbá egy él pontosan két tartomány határán fekszik, így a következőt kapjuk: $3t \leq 2e$.

Euler – formula szerint a tartományok száma: $t = 2 + 10 - 5 = 7$.

A kapott értékeket behelyettesítve az előző egyenlőtlenségbe ellentmondás adódik: $21 \leq 20$.

Tekintsük most a három ház – három kút gráfot. $(c = 6; e = 9)$

Mivel minden tartományt legalább 4 él határol, továbbá egy él pontosan két tartomány határán fekszik, így a következőt kapjuk: $4t \leq 2e$.

Euler – formula szerint a tartományok száma: $t = 2 + 9 - 6 = 5$.

A kapott értékeket behelyettesítve az előző egyenlőtlenségbe ellentmondás adódik: $20 \leq 18$.

Ezek alapján a gráfok nem rajzolhatók síkba.

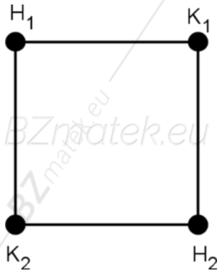
A bizonyítást egyszerűbben is elvégezhetjük az Euler – formula segítségével:

$c = 5; e = 10; t = 10; k = 1 \quad \rightarrow \quad 5 - 10 + 10 \neq 1 + 1 \quad \rightarrow \quad 5 \neq 2$

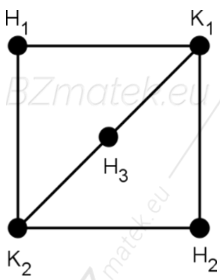
$c = 6; e = 9; t = 6; k = 1 \quad \rightarrow \quad 6 - 9 + 6 \neq 1 + 1 \quad \rightarrow \quad 3 \neq 2$

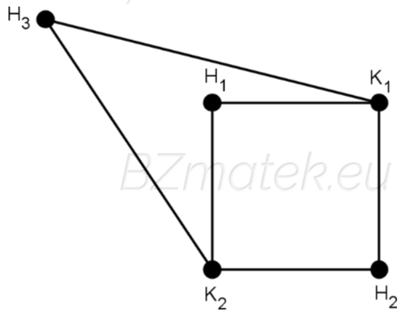
A három ház – három kút gráfra egy szemléletes bizonyítás:

Először kössünk össze két házat két kúttal, s így keletkezik egy zárt négyszög.

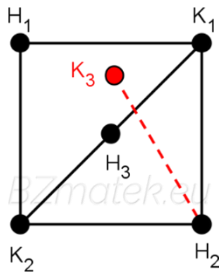


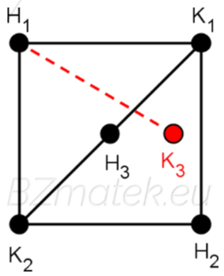
A harmadik ház a négyszög belsejébe, vagy azon kívülre esik, s kössük össze azt is a kutakkal:

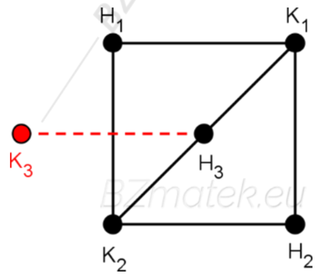


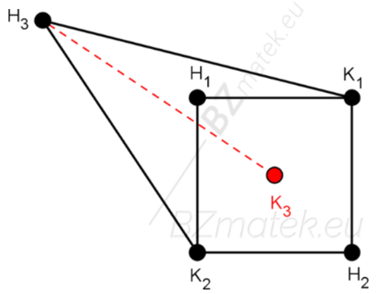


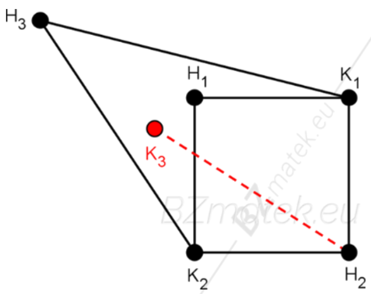
Mindkét esetben három részre bontjuk a síkot a vonalakkal, ezért a harmadik kutat bárhová is helyezzük le, mindig lesz egy olyan ház, amely ettől élek mentén el lesz szeparálva.

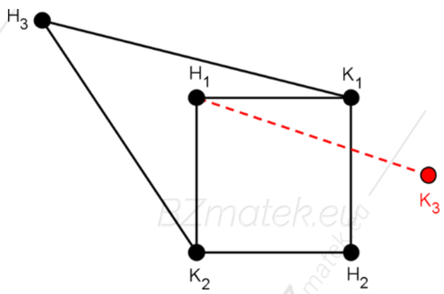












Ezek alapján nem rajzolható síkba a gráf.

■