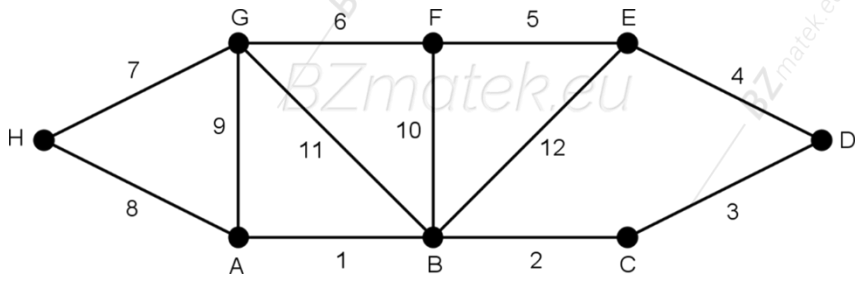
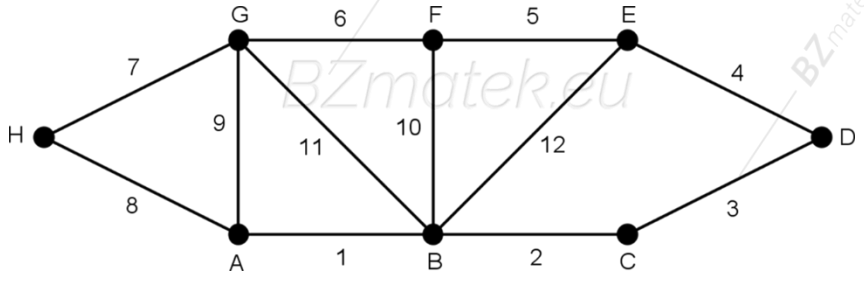
Gráfelmélet II.

DEFINÍCIÓ: (Séta)
A G gráf egy olyan élsorozatát, amelyben a csúcsok és az élek többször is szerepelhetnek, sétának nevezzük.



Egy lehetséges séta: $A; 1; B; 2; C; 3; D; 4; E; 12; B; 1; A; 9; G$

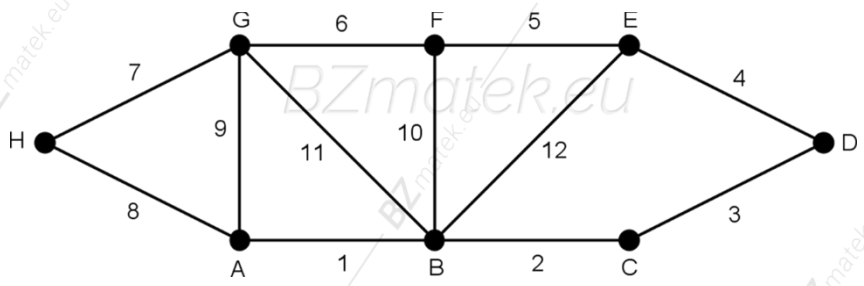
DEFINÍCIÓ: (Vonal)
A G gráf egy olyan élsorozatát, amelyben az élek nem ismétlődhetnek, de a csúcsok igen, vonalnak nevezzük.



Egy lehetséges vonal: $D; 4; E; 12; B; 11; G; 9; A; 1; B; 2; C$

<u>Megjegyzés:</u>
Abban az esetben, ha a vonal kezdőpontja megegyezik a végpontjával, akkor zárt vonalról, ellenkező esetben pedig nyílt vonalról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: (Út)
A G gráf egy élsorozatát, amelyben az élek és a csúcsok sem ismétlődhetnek, útnak nevezzük.

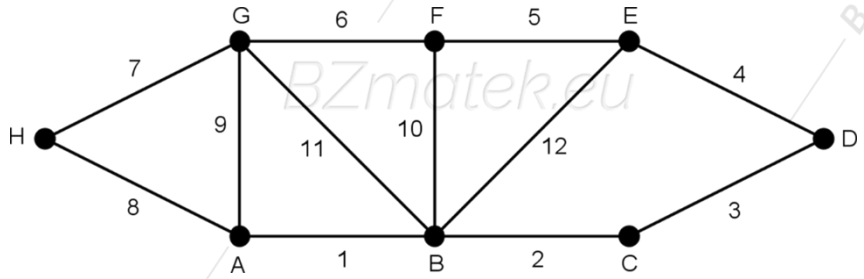


Egy lehetséges út: $H; 7; G; 9; A; 1; B; 10; F; 5; E; 4; D$

Megjegyzés:

- *Szemléletesen: Az út olyan vonal, amely sehol sem metszi önmagát.*
- *Az út hossza alatt az út által tartalmazott élek számát értjük.*

DEFINÍCIÓ: (Kör)
A G gráf egy olyan élsorozatát, amelyben az élek és a csúcsok sem ismétlődhetnek, kivéve a kezdő és végpontokat, melyek megegyeznek, körnek nevezzük.



Egy lehetséges kör: $B; 1; A; 9; G; 6; F; 10; B$

Megjegyzés:

- *Szemléletesen: A kör olyan út, melynek kezdő és végpontja megegyezik.*
- *A kör hossza alatt a kör által tartalmazott élek számát értjük.*

DEFINÍCIÓ: (Távolság)
Egy G gráf két csúcsának távolságán az azokat összekötő legrövidebb út hosszát értjük.

Megjegyzés:
Ha két csúcsot nem köt össze út, akkor a két pont távolságát végtelennek tekintjük.

DEFINÍCIÓ: (Átmérő)
Egy G gráf csúcsai közötti távolság maximumát a gráf átmérőjének nevezzük. Jele: $diam(G)$.

TÉTEL:
Ha egy gráfban van kör, akkor van két olyan pontja, amelyiket két különböző út köt össze.

TÉTEL:
Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.

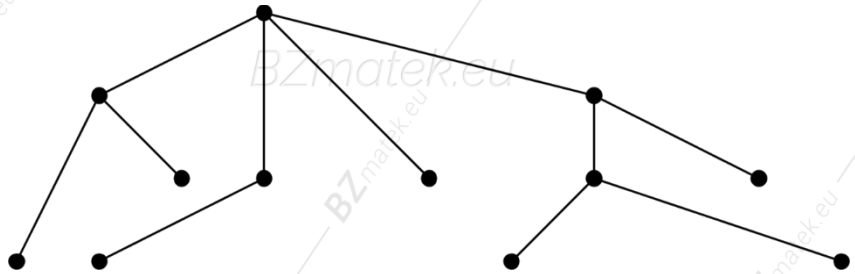
TÉTEL:
Ha egy egyszerű gráf bármely csúcspontjának foka legalább k ($k > 1$), akkor van a gráfban egy legalább $k + 1$ hosszúságú kör.

TÉTEL:
Egy összefüggő gráfban bármely kör élét elhagyva összefüggő marad.

TÉTEL:
Az n csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak legalább $n - 1$ darab éle van.

TÉTEL:
Ha egy n csúcsú összefüggő gráfban n – nél kevesebb él van, akkor a gráf tartalmaz elsőfokú csúcsot.

DEFINÍCIÓ: (Fagráf)
Egy összefüggő, egyszerű G gráfot fa gráfnak nevezünk, ha nem tartalmaz kört.



<u>*Megjegyzés:*</u>

- *A fagráf elsőfokú csúcsait leveleknek nevezzük.*
- *Egy fagráf bármely két pontját összekötve, a kapott gráfban már lesz kör.*
- *Egy fagráf bármely élét elhagyva, a kapott gráf már nem lesz összefüggő.*
- *A fenti két tulajdonságból adódik, hogy az n pontú összefüggő gráfok közül a fagráfnak van a legkevesebb éle és a fagráf a maximális élszámú körmentes gráf.*

TÉTEL:
Egy n csúcsú fagráfnak pontosan $n-1$ éle van.

TÉTEL:
Egy fagráf bármely két csúcsa között pontosan egy út létezik.

TÉTEL:
Bármely fagráfban van legalább két elsőfokú csúcs.

DEFINÍCIÓ: (Feszítőfa)
Egy G gráf feszítőfájának nevezzük a G' - t, ha G' fa és részgráfja G – nek, illetve G minden csúcsa G' - nek is csúcsa.

TÉTEL:
Minden egyszerű, összefüggő gráfnak van feszítőfája.

TÉTEL: (Cayley - tétele)
Az n csúcspontú K_n teljes gráf különböző feszítőfáinak a száma: n^{n-2}.

Megjegyzés:
Az összes különböző n csúcsú fagráfok száma n^{n-2}.

Utazó ügynök problémája:
Az utazó ügynök problémája azt jelenti, hogy a kereskedelmi utazónak adott városokat kell bejárnia, oly módon, hogy minden városba csak egyszer megy el, és végül visszatér a cégének székhelyére. Mivel egy - egy útnak jól meghatározott útiköltsége is van, így több út esetén célszerű azt az utat választania, melynek költsége minimális.

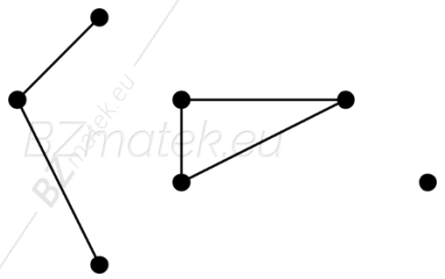
Súlyozott gráf minimális feszítőfájának keresése:
Egy gráfot súlyozottnak nevezünk, ha minden éléhez hozzá van rendelve egy valós szám. A gráf feszítőfáját minimálisnak mondjuk, ha az éleihez rendelt súlyok összege minimális.

- Kruskal - algoritmus: Először válasszuk a gráf éleiből a minimális súlyú e_1 – et. Ezt követően a megmaradó élekből válasszuk a minimális súlyú e_2 – t úgy, hogy az előzőleg választott éllel ne alkosson kört. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg tudunk olyan minimális súlyú élt kiválasztani, mely az előzőleg választott élekkel nem alkot kört. Amennyiben több ilyen él nem létezik, akkor az algoritmus véget ért.

- Prim - algoritmus: Először válasszuk ki a gráf egy tetszőleges v_1 csúcsát. Ezután kiválasztunk az erre a csúcsra illeszkedő élek közül egy minimális súlyú e_1 – et, s legyen ennek a másik végpontja v_2. A következő lépésben a v_1, illetve v_2 csúcsokra illeszkedő élek közül választunk egy minimális súlyú e_2 – t úgy, hogy az előzőleg választott éllel ne alkosson kört, s legyen ennek a másik végpontja v_3. Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg van a gráfnak még választható pontja. Amennyiben a gráf csúcsai elfogytak, akkor az algoritmus véget ért.

DEFINÍCIÓ: (Komponens)
Egy G gráfnak az összefüggő maximális részgráfjait G komponenseinek nevezzük. A részgráf maximális abban az értelemben, hogy nem lehet növelni G csúcsainak vagy éleinek hozzá vételével, mert akkor már nem lenne összefüggő.

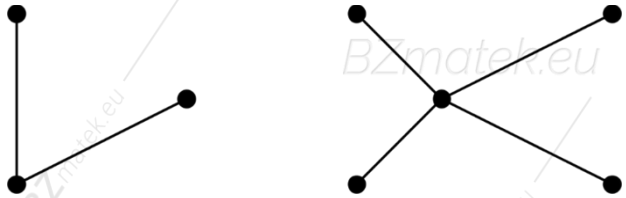
3 komponensű gráf:



Megjegyzés:
Szemléletesen: A komponensek egy nem összefüggő gráf összefüggő részei.

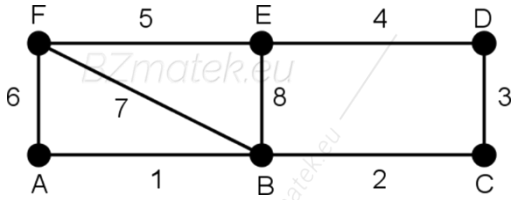
DEFINÍCIÓ: (Erdő)
Egy G gráfot erdőnek nevezünk, ha komponensei fák.

2 komponensű erdő:



TÉTEL:
Ha egy gráf erdő és k komponensből áll, akkor a csúcsok és élek számának különbsége k.

DEFINÍCIÓ: (Euler – vonal)
A G gráf egy vonalát Euler – vonalnak nevezzük, ha a gráf minden élét tartalmazza.



Egy lehetséges Euler – vonal: $F; 6; A; 1; B; 2; C; 3; D; 4; E; 8; B; 7; F; 5; E$

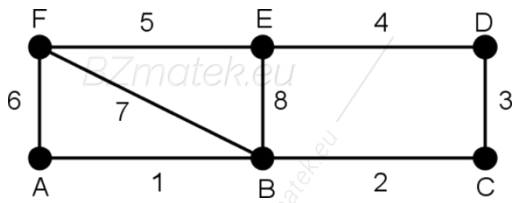
<u>*Megjegyzés:*</u>

- *A zárt Euler – vonallal rendelkező gráfot Euler – gráfnak nevezzük.*
- *Ha egy összefüggő gráf élidegen körök uniója, akkor van zárt Euler – vonala.*
- *Ha egy gráfnak* 2 *– nél több páratlan fokú csúcsa van, akkor nem rajzolható le egy vonallal.*
- *Ha egy összefüggő gráfban a páratlan fokú csúcsok száma* $2k$*, akkor legkevesebb* $k-1$ *él nem rajzolható meg egyetlen vonallal.*

TÉTEL:
Egy összefüggő gráfnak pontosan akkor van zárt Euler - vonala, ha minden csúcs foka páros.

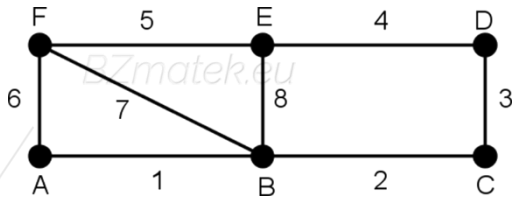
TÉTEL:
Egy összefüggő gráfnak pontosan akkor van nyílt Euler - vonala, ha pontosan kettő páratlan fokszámú csúcsa van. (Ekkor éppen ez a két csúcs az Euler – vonal kezdő, illetve végpontja.)

DEFINÍCIÓ: (Hamilton – út)
A G gráf egy útját Hamilton – útnak nevezzük, ha a gráf minden csúcsát tartalmazza.



Egy lehetséges Hamilton – út: $A; 1; B; 7; F; 5; E; 4; D; 3; C$

DEFINÍCIÓ: (Hamilton – kör)
A G gráf egy körét Hamilton – körnek nevezzük, ha a gráf minden csúcsát tartalmazza.



Egy lehetséges Hamilton – kör: $D; 3; C; 2; B; 1; A; 6; F; 5; E; 4; D$

TÉTEL:
Ha egy egyszerű, összefüggő gráfnak van olyan k csúcsa, melyek törlése után $k+1$ komponensére esik szét, akkor nincs a gráfnak Hamilton - köre.

TÉTEL:
Ha egy egyszerű, összefüggő gráfnak van olyan k pontja, melyek törlése után $k+2$ komponensre esik szét, akkor nincs a gráfnak Hamilton – útja, s így Hamilton - köre sem.

Megjegyzés:
Általános esetben nem ismert igazán jó algoritmus Hamilton – kör és Hamilton – út keresésére. A fentebb közölt két tételben a feltétel csak szükséges, de nem elégséges: előfordulhat, hogy akkor sincs a gráfban Hamilton – kör vagy Hamilton – út, ha csak k komponensre esik szét.

TÉTEL: (Dirac - tétele)
Ha egy egyszerű, összefüggő gráfnak n $(n > 2)$ csúcsa van és minden csúcsának a foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor van a gráfnak Hamilton - köre.

TÉTEL:
Ha a gráf rendje n $(n > 2)$ és bármely két nem szomszédos csúcs fokának az összege nem kisebb a gráf rendjénél, akkor a gráfnak van Hamilton - köre.

Gyakorló feladatok

1. **Rajzolj olyan fagráfot, amelyben a csúcsok fokszáma a következő!**

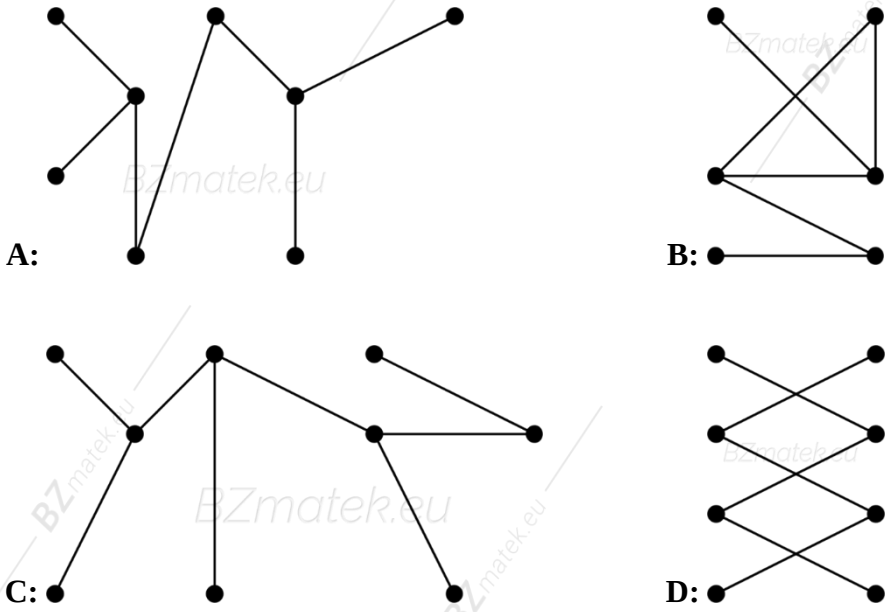
   A: 0; 1; 1; 2; 2 **B: 1; 1; 1; 1; 2; 2; 4** **C: 1; 1; 2; 2; 3; 3** **D: 1; 2; 3; 3; 4; 5**

2. **Rajzolj két különböző 6 csúcsú fagráfot!**

3. **Rajzolj olyan erdőt, amely 4 komponensből és 10 csúcsból áll! Mennyi éle van?**

4. **Egy fának 8 pontja van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? Keresd meg az összes megoldást, s rajzold le a kapott fákat!**

5. **Döntsd el, hogy melyik fa az alábbi gráfok közül! A fákban határozd meg a pontok, élek, illetve levelek, kettő – és háromfokú pontok számát!**



6. **Hány különböző kettő, illetve három pontból álló fagráf van?**

7. **Azonos gyöngyszemeket kell összekötnünk egyenlő hosszú cérnaszálakkal. A gyöngyöket csak az oda befutó cérnaszálak száma szerint különböztetjük meg, két gyöngyöt csak egy cérnaszál köthet össze. Hány különböző módon lehet 4; 5 illetve 6 szem gyöngyöt a lehető legkevesebb cérnaszállal összekötni? Rajzold le a gráfokat! Milyen gráfok keletkeznek?**

8. **Rajzold le annak a fának a gráfját, amely egy ággal indul, és minden évben minden ága hajt egy új ágat. Rajzolj a feladatnak megfelelő gráfot! Hány ága lesz ennek a fának a hatodik év végére? Hogyan adhatjuk meg az ágak számának sorozatát?**

9. **Tavasszal elültettünk egy fát, amely egy ágból állt. Ez az ág két évig nőtt, majd a második év leteltekor tavasszal hajtott egy új ágat, ezután minden tavasszal hajtott egy új ágat. Az új hajtások az első évben csak növekednek, és a második év végén kezdenek új ágat hajtani, és aztán minden évben tavasszal új ágat hajtanak. Hány ág lesz a hatodik év végén, amikor még nem hajtottak ki az új hajtások, ha közben egyetlen ág sem tört le? Rajzolj a feladatnak megfelelő gráfot!**

10. **Az $M = \{a; b; c; d; e\}$ halmaznak mennyi háromelemű részhalmaza van? Ábrázold fagráffal a részhalmazokat!**

11. **Írd fel a 3960 prímtényezős felbontását és ábrázold fagráffal!**

12. **Ábrázoljuk fagráffal a 120 prímtényezős felbontását! Mennyi nem izomorf gráfot kaphatunk?**

13. **Felrajzoljuk a családfát a dédszülőkig (vagy ameddig tudjuk). Igaz – e, hogy fagráfot kapunk? Mit jelent, ha valaki nem fagráfot rajzol fel?**

14. **Minek neveznénk azokat a fagráfokat, amelyeknek minden pontja legfeljebb másodfokú? Hány elsőfokú pontja van egy ilyen fának?**

15. **Bontsd fel a 12 – t 7 darab pozitív egész szám összegére! Meg lehet - e adni bármilyen felbontás esetén egy a tagoknak megfelelő fokszámsorozatú 7 csúcsú fagráfot?**

16. **Egy 3 piros, 4 kék és 5 fekete golyót tartalmazó dobozból húzunk 3 golyót visszatevéssel, illetve visszatevés nélkül. Rajzold meg a lehetőségek fáját mindkét esetben!**

17. **Minimum és maximum mennyi éle lehet annak a 10 csúcsú egyszerű gráfnak, amelyben nincs kör?**

18. **Mennyi éle van annak az egyszerű, összefüggő 11 csúcsú gráfnak, amelyben nincs kör?**

19. **Mennyi pontja és mennyi levele lehet annak a fának, amelyben a pontok fokszámainak összege 16?**

20. **Hány pontja van annak a fának, amelyben az élek száma pontosan ötöde a fából „hiányzó" élek (vagyis az összekötetlen pontpáok) számának?**

21. **Egy 15 pontú fagráfban 12 levél van. Mennyi lehet a többi pont fokszáma? Hány élen halad át a gráf leghosszabb útja?**

22. **Mennyi pontból áll az az erdő, amelynek 5 fájában összesen 16 él van?**

23. **Add meg egy n pontú teljes gráf és egy n pontú fa élei számának hányadosát!**

24. **Határozd meg az n pontú teljes gráf, valamint az n pontú fagráfok átmérőinek maximumát!**

25. **Tervezz 5 barát számára telefonos üzenettovábbító rendszert úgy, hogy ha bármelyikük kap egy üzenetet, az a többiekhez is eljut. A rendszer tegyen eleget a következő feltételeknek: (1) a lehető legkevesebb telefonhívással jusson el az üzenet a többiekhez; (2) senki se kapja meg kétszer ugyanazt az üzenetet!**

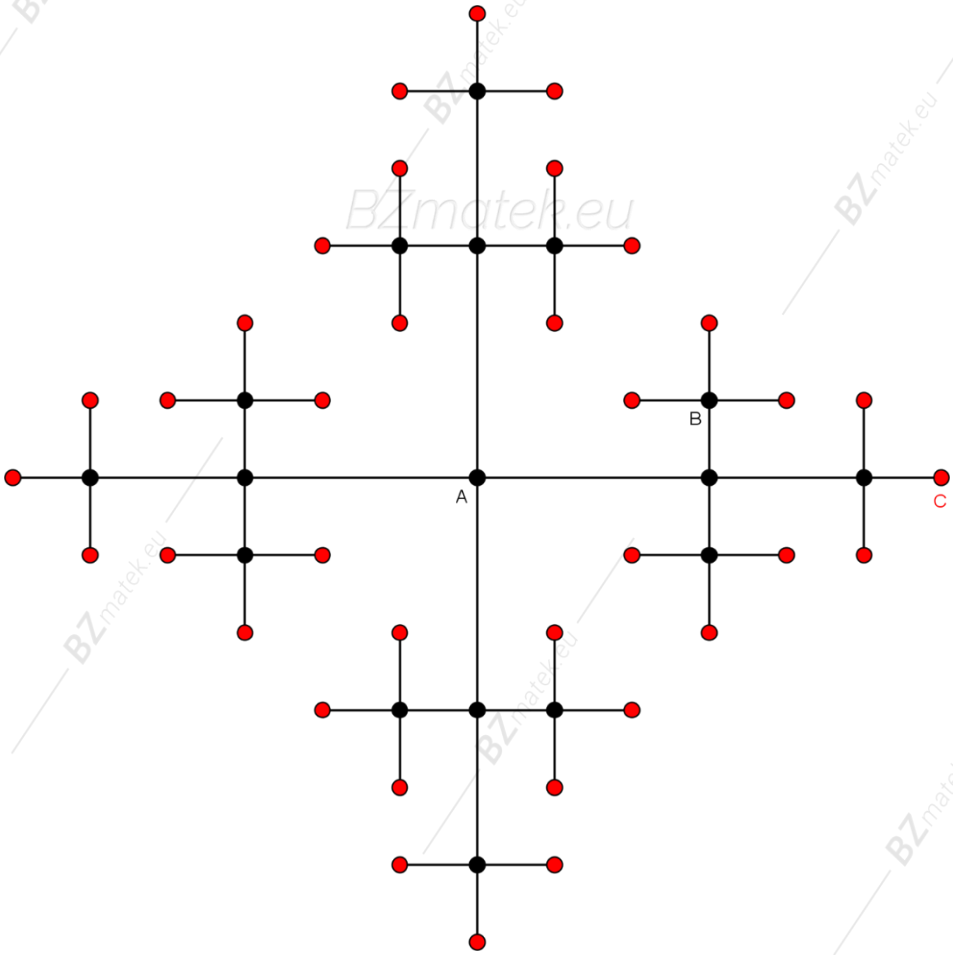
26. Egy megye 6 faluja között új utakat építenek. Legkevesebb hány utat kell építeni, ha minden faluból minden faluba új úton akarunk eljutni?

27. Legalább hány telefonvonalat kell létesíteni n számú telefonközpont között, ha azt akarjuk, hogy bármelyik központból bármelyikbe lehessen telefonálni?

28. Lehetséges – e 30 gépet összefüggő hálózatba kötni 28 kábellel?

29. Egy társaság tagjai most találkoztak először, eddig 13 e - mailcím – csere történt a megbeszélés alatt, s ennyi elegendő ahhoz, hogy pontosan egy úton bárki üzenete eljusson bárkihez. Legfeljebb hány fős lehet ez a társaság?

30. Tekintsük az alábbi fagráfot, amelyben a leveleken kívül minden pont fokszáma 4. Hány különböző hosszúságú úton juthatunk a piros levelekbe az A; B illetve C pontból kiindulva? (Egy – egy élen csak egyszer mehetünk végig.)

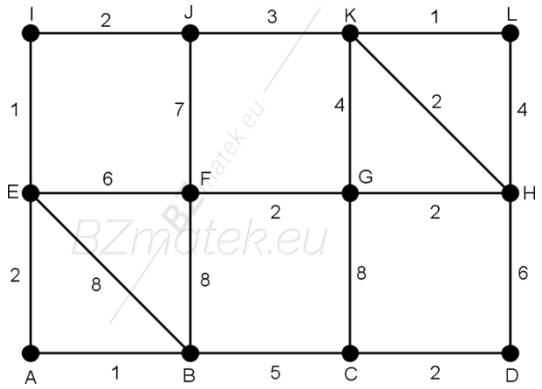


31. Ildi és Zoli a következő gráfjátékot játssza n ponton: felváltva húznak be éleket, és az veszít, aki kört zár be. Kinek van nyerő stratégiája, ha n páros, illetve ha páratlan?

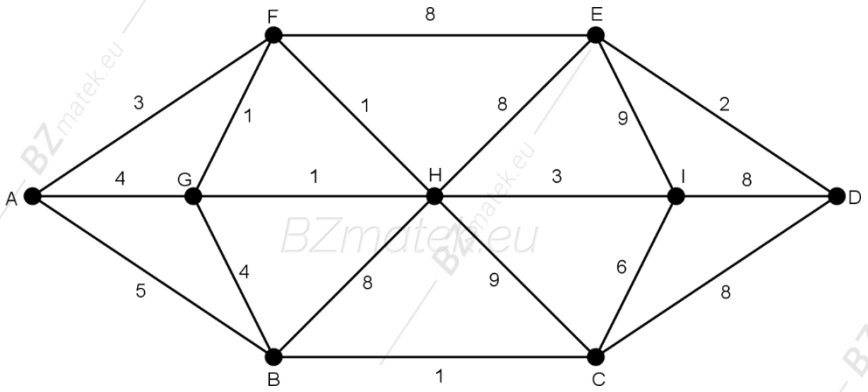
32. Hány mérkőzést játszik kieséses rendszerben n csapat, mire kiderül, hogy melyik csapat a bajnok, ha a csapatokat párba állítják, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Ha egy csapatnak nem jut pár, akkor mérkőzés nélkül jut tovább. Hány mérkőzésre van szükség, ha azt is meg akarják állapítani, hogy melyik csapat a második legjobb? Szemléltetéskor milyen gráfot kapunk?

$n = 32$ $\qquad$ $n = 48$ $\qquad$ $n = 1024$ $\qquad$ $n = 2\,765\,288$

33. A 12 település között vízvezetékrendszert terveznek. A települések helyzetét és a közöttük lévő csatornafektetés összköltségeit az alábbi ábra modellezi. Az A település csatlakozik az országos hálózatra. Add meg a leggazdaságosabban megépíthető rendszert úgy, hogy minden település be legyen kötve a hálózatba!



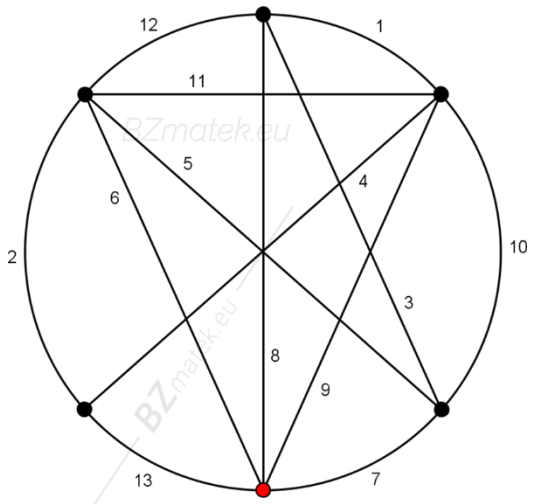
34. Keress kétféleképpen maximális költségű favázat az alábbi gráfban!

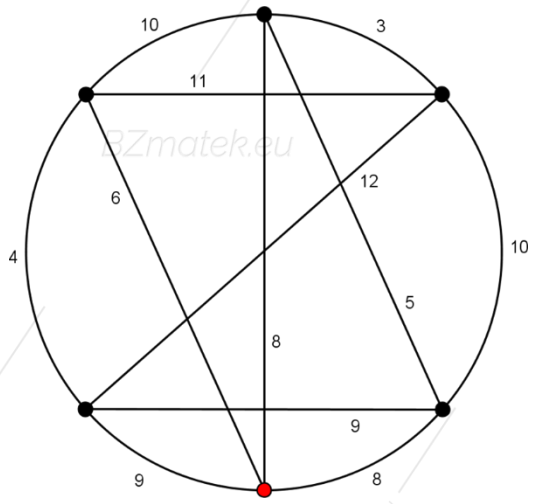


35. Egy megye 6 települése között vízvezetékrendszert terveznek. A települések helyzetét és a közöttük lévő esetleges csatornafektetés összköltségeit az alábbi egy – egy ábra modellezi. Színnel jelöltük azt a települést, amelyik az országos hálózatra csatlakozik. (A költségek a különböző domborzati viszonyok és távolságok miatt nagyon eltérőek, s nem rajzoltuk be a megépíthetetlen vezetékeket.) A tervezési szempontok a következők:

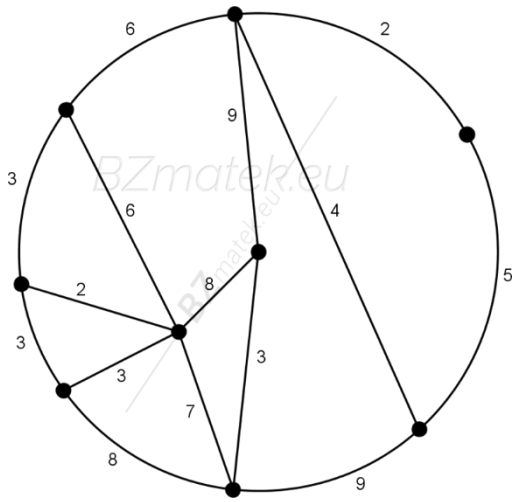
1. Minden települést be kell kötni a hálózatba.
2. A lehető leggazdaságosabban kell eljárni, vagyis cél az összköltség minimalizálása.

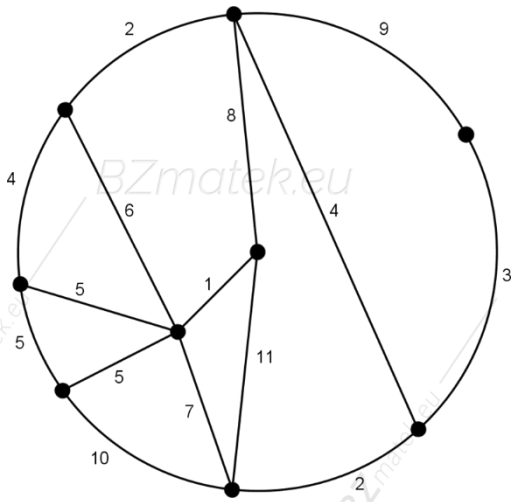
Mennyi a minimális költség? Adj meg egy – egy ilyen megépíthető rendszert!





36. Add meg az alábbi két gráf egy – egy maximális költségű favázát! Mennyi ez a maximális költség?





37. Van – e olyan fagráf, amelyben van nyitott Euler – vonal? Ha van, akkor milyennek kell lennie a gráfnak?

38. Van – e olyan fagráf, amelyben van zárt – Euler – vonal?

39. Van – e olyan gráf, amelyben van zárt – és nyílt – Euler vonal is?

40. Van – e olyan séta, amely út, de nem vonal?

41. Adott néhány fokszámsorozat.

A: 0; 1; 1; 2; 2; 4; 4; 5 **B: 1; 1; 2; 2; 7** **C: 1; 1; 1; 12; 2; 3; 3**

D: 1; 1; 1; 1; 2 **E: 4; 4; 4; 4; 4** **F: 3; 3; 3; 4; 5**

A következő állítások melyik fokszámsorozatra igazak?

a) **Rajzolható ilyen összefüggő gráf.**

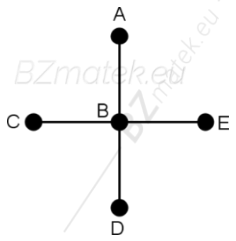
b) **Rajzolható ilyen egyszerű gráf.**

c) **Rajzolható ilyen összefüggő gráf úgy, hogy akármelyik élét elhagyva a gráf már nem lesz összefüggő.**

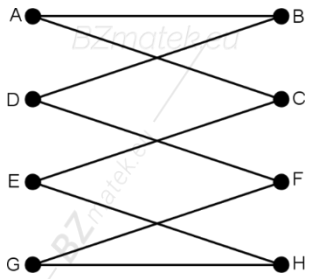
d) **A gráfnak van Euler – vonala.**

e) **Az így rajzolható gráfban biztosan van kör.**

42. Adj meg két sétát az alábbi gráfban, amelyen át *A* – ból *E* – be juthatunk!



43. Tartalmaz – e kört az ábrán látható „cipőfűző” gráf?

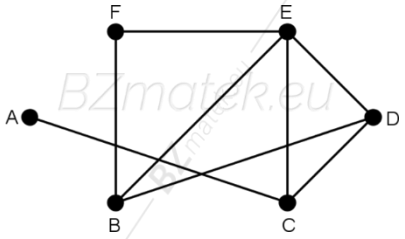


44. Adj meg az alábbi gráfban olyan bejárást, ami az *A* csúcsból *F* pontba visz és teljesül rá a következő!

a) **séta, de nem vonal és nem út**

b) **vonal, de nem út**

c) **út**



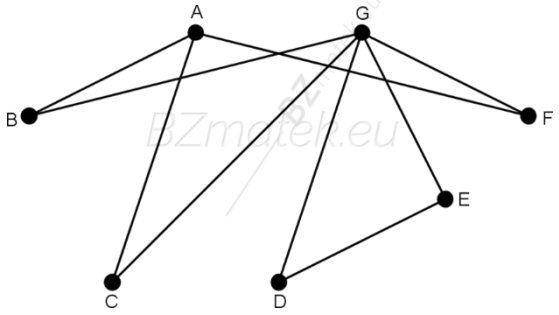
45. Adj meg az alábbi gráfban olyan bejárást *A* – ból *G* – be, amelyre teljesül a következő!

a) **séta, de nem vonal és nem út**

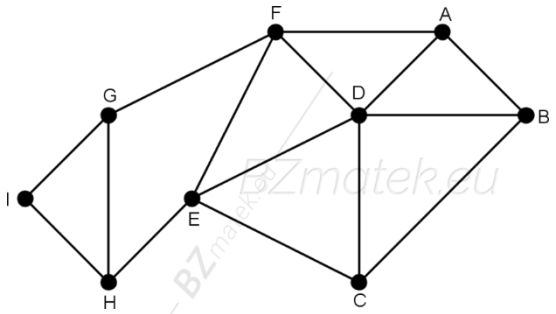
b) **vonal, de nem út**

c) **út**

(A 3 vonalat úgy add meg, hogy *A* – n és *G* – n kívül ne legyen közös pontjuk!)



46. Tekintsük a következő gráfot.



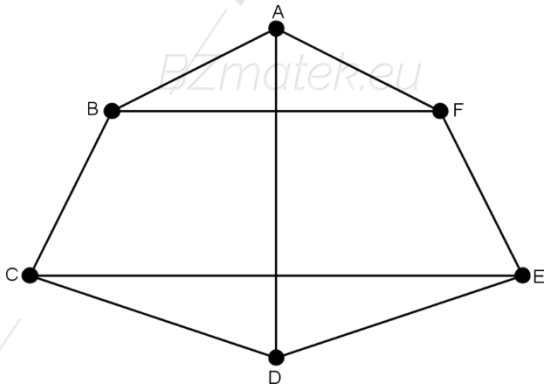
a) **Adj meg két különböző utat az *A* és az *I* pontok között!**

b) **Adj meg egy olyan vonalat az *A* és az *I* pontok között, amelyik nem út!**
Adj meg egy olyan utat, amelynek élei szerepelnek a vonal élei között is!

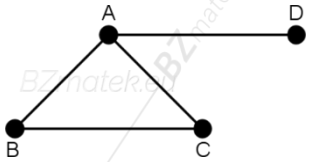
c) **Adj meg egy olyan sétát az *A* és az *I* pontok között, amelyik nem vonal!**
Adj meg egy olyan vonalat, amelynek élei szerepelnek a séta élei között!

d) **Adj meg egy kört! Igaz-e, hogy a kör bármely élét törölve a gráf összefüggő marad?**

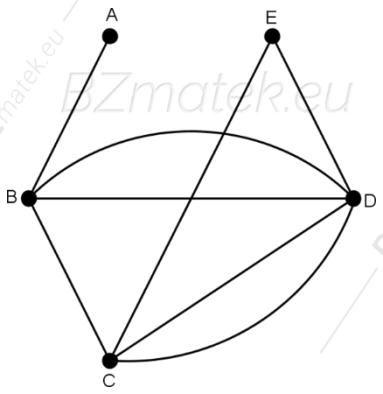
47. Adj meg 6 olyan utat az alábbi gráfban, amelyek az *A* pontból indulnak, minden pontot érintenek és különböző a végpontjuk!

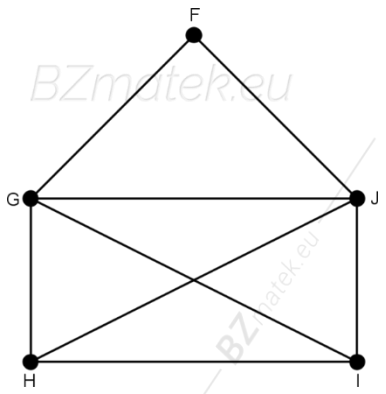


48. Írd fel az alábbi gráfban az összes olyan vonalat, amely a gráf minden élét tartalmazza!

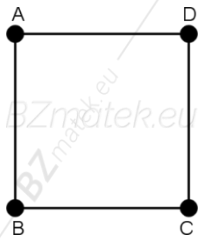


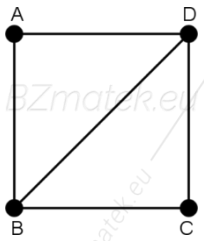
49. Létezik – e nyílt vagy zárt Euler – séta az alábbi gráfokban?

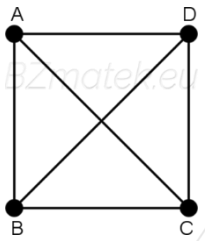




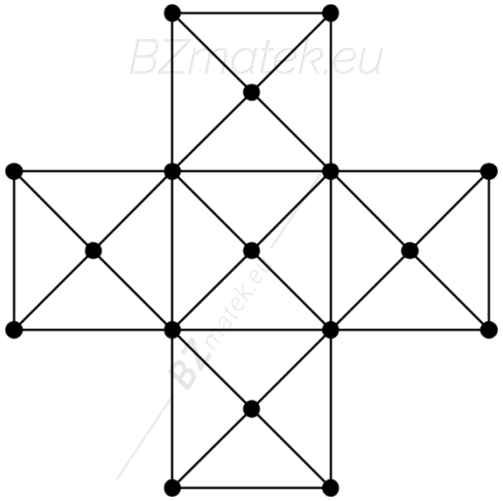
50. Az alábbi gráfok közül melyikben van zárt és melyikben van nyitott Euler – vonal?

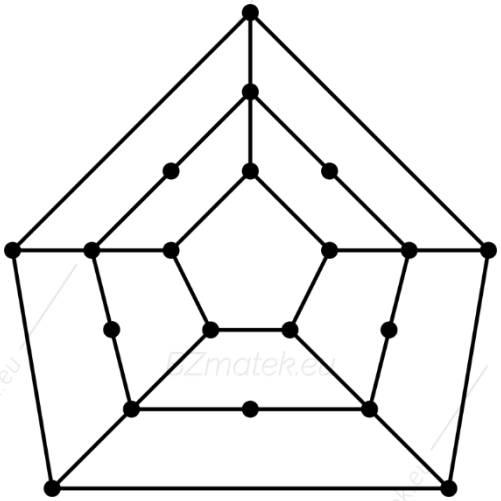




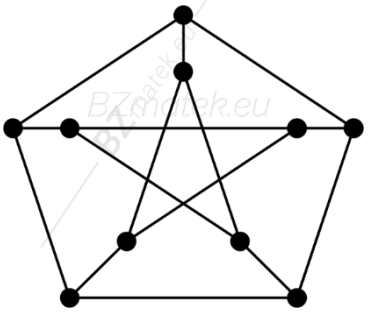


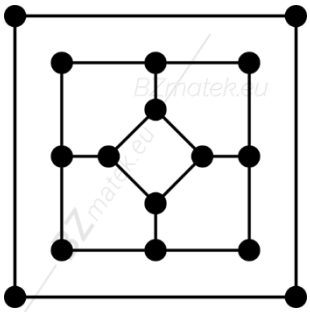
51. Van – e Hamilton – kör, illetve Hamilton - út az alábbi gráfokban?

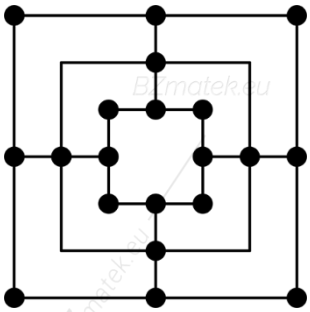




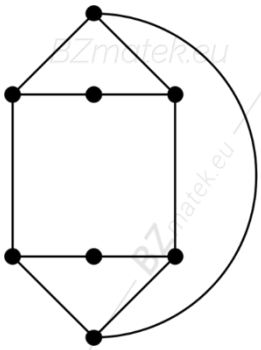
52. Van – e Hamilton – köre, illetve Hamilton útja a következő gráfoknak?

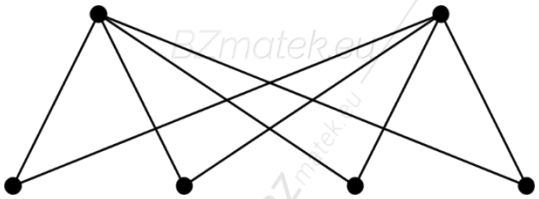


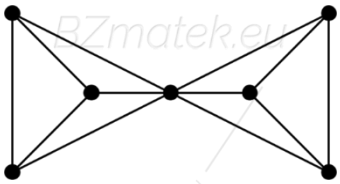


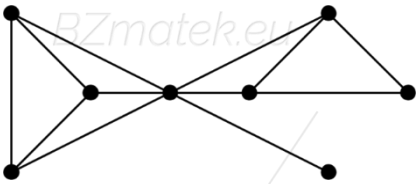


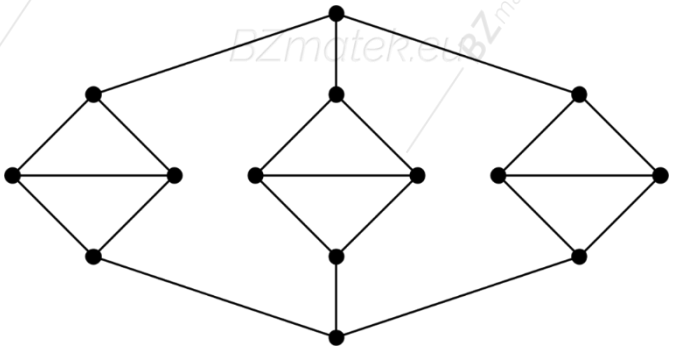
53. Van – e Hamilton – köre, illetve Hamilton útja a következő gráfoknak?



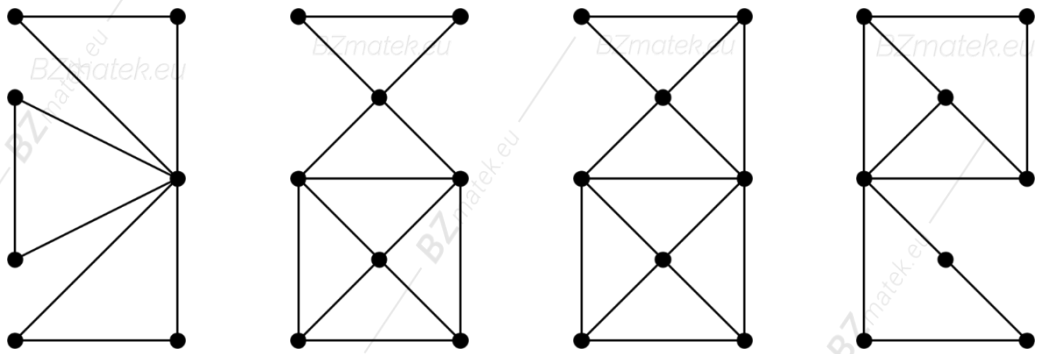




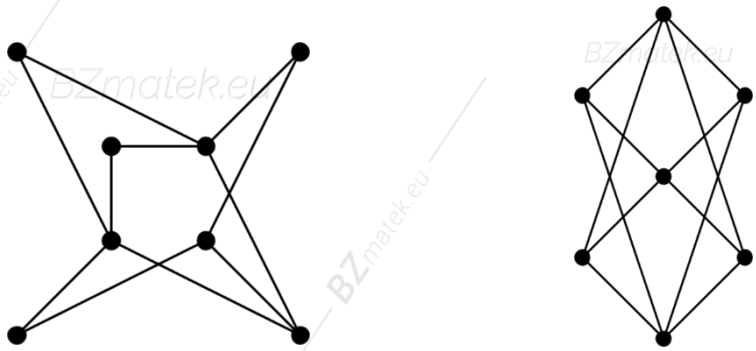




54. Az alábbiak közül melyeknek van Euler – vonala, illetve Hamilton – köre?



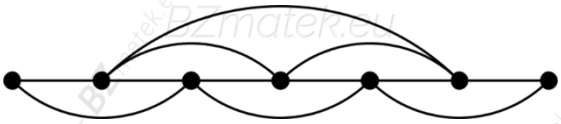
55. A gráf csúcsainak színezése segítségével bizonyítsuk be, hogy a következő gráfoknak nincs Hamilton – köre! Van – e a gráfokban Hamilton – út?

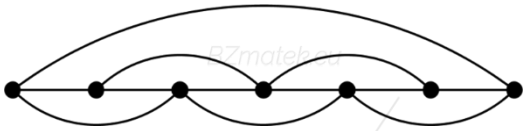


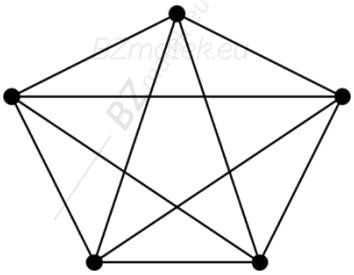
56. Rajzolj meg egy – egy Hamilton – kört a szabályos poliéderek gráfjaiban!

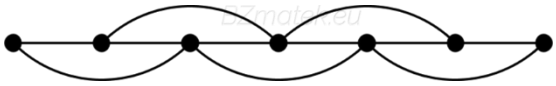
57. Melyik n csúcsú teljes gráfok rajzolhatók meg egyetlen ceruzavonással, a ceruza felemelése nélkül?

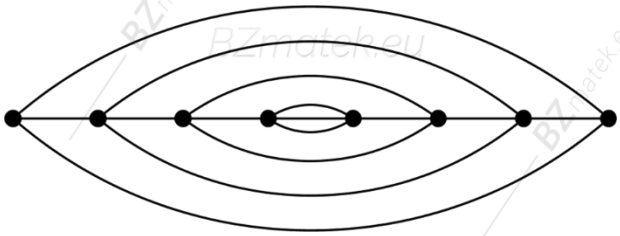
58. Lerajzolhatók - e a következő ábrák a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladjunk végig?

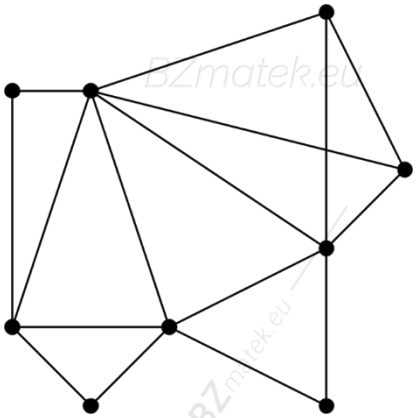




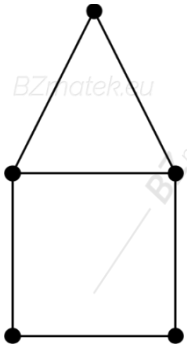


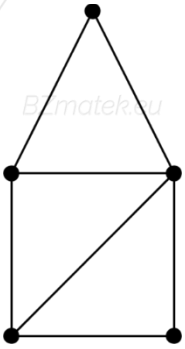


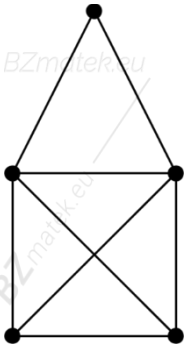


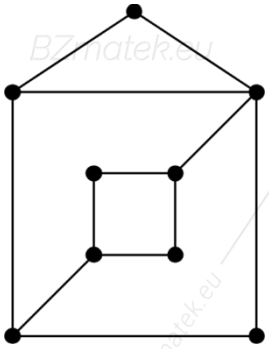


59. Melyik házat tudjuk lerajzolni a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy egyik vonalat sem rajzoljuk át többször?





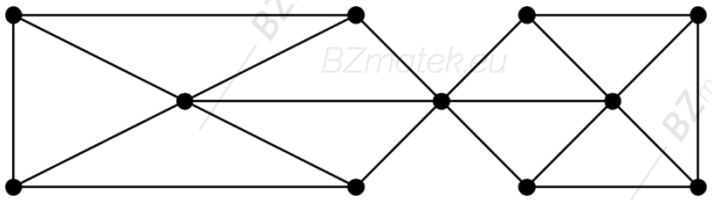




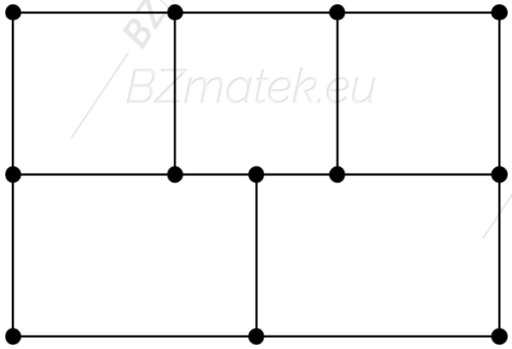
60. Legkevesebb hány élt kell elhagyni az alábbi gráfból, hogy teljesüljön a következő:

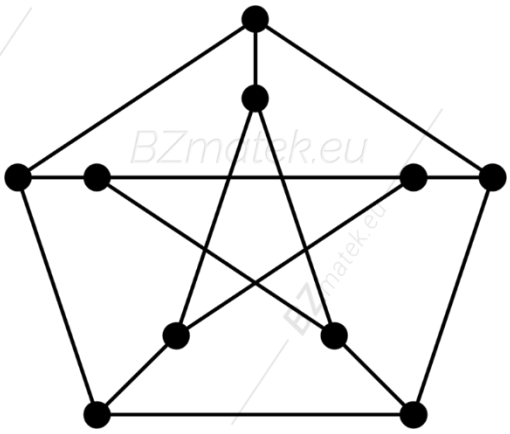
a) **kiindulva egy csúcsából, végig haladhassunk úgy az éleken, hogy minden élt pontosan egyszer járjunk be és végül visszaérkezzünk a kiindulási csúcsba?**

b) **kiindulva egy csúcsából, végig haladhassunk úgy az éleken, hogy minden élt pontosan egyszer járjunk be?**



61. Legalább hányszor kell felemelni a ceruzát és egy másik pontban folytatni a rajzolást, hogy megrajzoljuk az ábrákat úgy, hogy egy szakaszt se rajzoljuk át egynél többször?

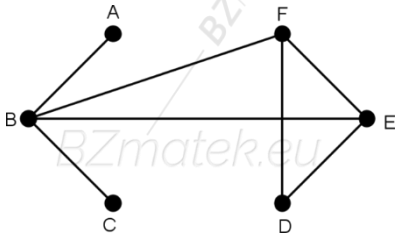




62. Az alábbi gráfban nem található sem nyitott, sem zárt Euler – vonal.

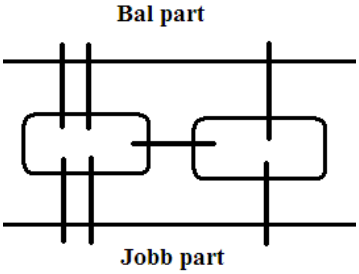
a) **A lehető legkevesebb él berajzolásával érd el, hogy legyen a gráfban nyitott, illetve zárt Euler - vonal!**

b) **Melyik él törlésével érhetjük el, hogy nyitott Euler – vonal legyen a gráfban?**



63. Rajzold meg a szabályos ötszög minden átlóját. Az így kapott alakzatot tekintsük olyan gráfnak, amelynek a pontjai az ötszög öt csúcsa. Van – e ennek a gráfnak zárt, illetve nyílt Euler – vonala?

64. A 18. században Königsberg városát a Pergel folyón 7 híd kötötte össze (ábrán).



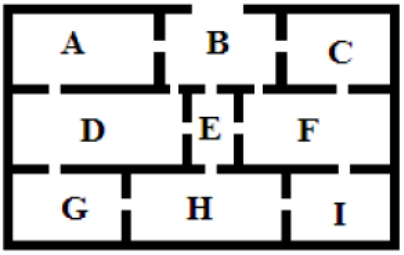
a) **Vasárnaponként a város lakói szívesen sétálgattak, és felvetették a következő kérdést: lehetséges - e, hogy valaki a lakásából indulva minden hídon átsétáljon, majd hazaérkezzen úgy, hogy egyik hídon se menjen át egynél többször? (A problémával Eulerhez fordultak, aki a szentpétervári akadémia tanára volt.)**

b) **Van - e olyan városrész, amelyből indulva bejárhatjuk a hidakat úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer menjünk át, de nem kell feltétlenül visszaérkeznünk a kiindulási helyre?**

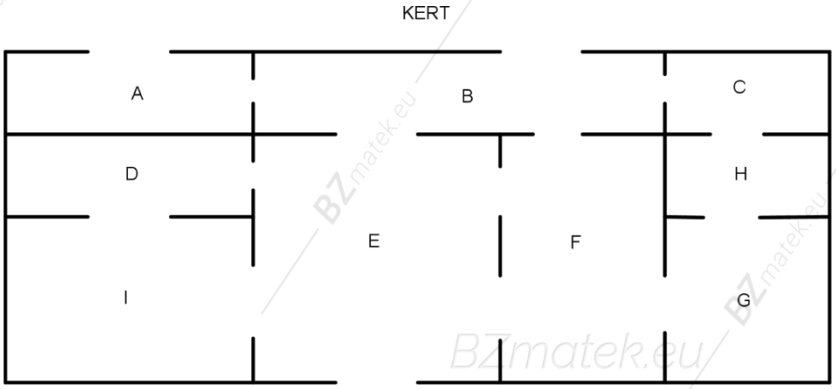
c) **Legkevesebb hány hidat kell építeni, és hova, hogy legyen olyan városrész, amelyből indulva be tudjuk járni a hidakat úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer menjünk át, és nem kell feltétlenül visszaérkeznünk a kiindulási helyre?**

d) **Legkevesebb hány hidat kell építeni és hová, hogy legyen olyan városrész, amelyből indulva be tudjuk járni a hidakat úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer menjünk át és visszaérkezzünk a kiindulási helyre?**

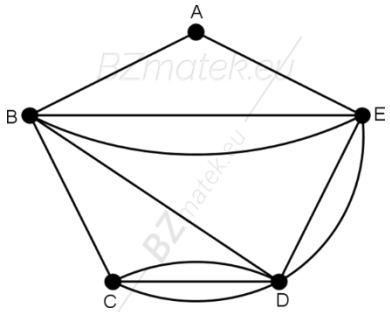
65. Betörőt fogtak a bankban, melynek alaprajza az ábrán látható. A betörőt a széf kinyitása közben fülelték le, és a biztonsági rendszer segítségével megállapították, hogy mire odáig eljutott, minden ajtón pontosan egyszer ment át. Melyik helyiségben van a széf?



66. Az alábbi térkép egy ház alaprajzát szemlélteti. A tulajdonos a tapétát nézegetve a falon éppen most fejezte be a szokásos ellenőrző körutat, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer haladt át. Hol tartózkodik most?



67. Egy biztonsági őr szállásáról indulva az ábrán látható ellenőrzési útvonalat járta be. Hol van a szállása és hol van most?

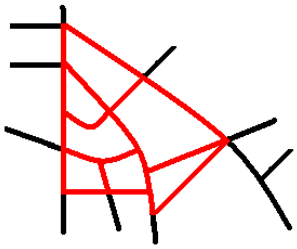


68. A térképen látható városrész pirossal jelzett utcáit egy meleg nyári nap estéjén locsoló kocsival locsolják.

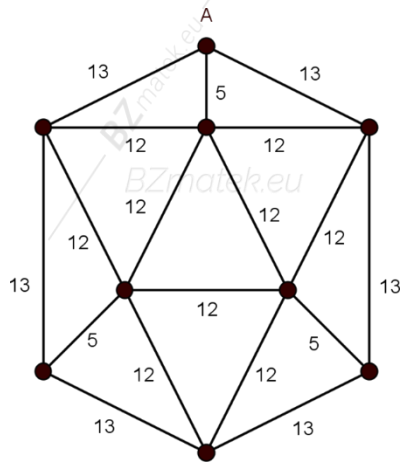
a) **Lehetséges - e, hogy a locsoló kocsi minden utcán végigmenjen, de egyik utcán se menjen végig egynél többször?**

b) **Az utcáknak megfelelő gráfnak legfeljebb hány élét hagyhatjuk el úgy, hogy a gráf még összefüggő maradjon?**

c) **Az utcáknak megfelelő gráfnak legalább hány élét kell elhagyni, hogy a gráfban ne legyen kör, de még összefüggő legyen?**



69. Az ábra 9 falu közötti úthálózatot mutatja, az utakra írt számok a falvak távolságát jelentik kilométerben. Az utak állapotát ellenőrzik, ezért egy autó indul az *A* faluból, és végigjárja az összes utat. Milyen útvonalat válasszon, hogy az összes útszakaszt megnézze és a lehető legrövidebb úton visszatérjen *A* - ba?



70. Tekintsük egy kocka, illetve egy oktaéder csúcsait és éleit egy gráf csúcsainak, illetve éleinek.

a) **Végig mehet - e egy légy a kocka élein úgy, hogy minden csúcsot éppen egyszer érint? (Nem kell minden élen áthaladnia.)**

b) **Végig mehet - e egy légy a kocka élein úgy, hogy minden élen egyszer és csakis egyszer halad át?**

c) **Hány testátlót kell felvenni a kockában, hogy a légy végigmehessen az éleken és a testátlókon úgy, hogy minden élen, illetve az adott testátlókon pontosan egyszer haladjon végig?**

d) **Megteheti – e az utat a légy az oktaéder élhálózatán úgy, hogy minden élen pontosan egyszer halad végig?**

71. A 4×4 – es sakktáblát be lehet - e járni egyetlen lóval lóugrásokkal úgy, hogy mindig olyan mezőre lépünk, melyen korábban még nem jártunk?

72. Az 5×5 – ös sakktáblát be lehet - e járni egyetlen lóval lóugrásokkal oly módon, hogy mindig olyan mezőre lépünk, melyen korábban még nem jártunk?

73. Bejárhatja - e a huszár a 8×8 – as sakktáblát úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjen, és utolsó lépéssel visszatérjen a kiindulási ponthoz? Bejárhatja - e a sakktáblát úgy, hogy az utolsó lépésként nem kell visszatérnie a kiindulási ponthoz?

74. Átlós lépés nélkül be tudja - e járni a király a sakktáblát úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépjen, és utolsó lépéssel visszatérjen a kiindulási ponthoz, ha a sakktábla 4×4 - es; 5×5 - ös vagy 8×8 - as? Bejárhatja - e a feltételek mellett a sakktáblát akkor, ha utolsó lépésként nem kell visszatérnie a kiindulási ponthoz?

75. Egy $24\ dm$ hosszú zárt (kör alakú) drótszálból egy $2\ dm$ élű kocka élvázát kell elkészíteni. Legfeljebb hány él alakítható ki úgy, hogy közbe ne vágjuk el a drótot?

76. Egy $10\ cm$ élhosszúságú kocka élvázát akarjuk elkészíteni egy $12\ dm$ hosszúságú zárt (kör alakú) drótdarabból. A drótot a lehető legkevesebb helyen vágjuk el, meghajlítjuk, majd a megfelelő helyeken összeforrasztjuk. Hány helyen kell elvágni? Változik – e a helyzet, ha a drótszál vonal alakú, vagyis a két vége szabad?

77. Igazold gráfok segítségével, hogy odaírhatjuk a szabályos tízszög csúcspontjaihoz az $1; 2; \dots; 5$ számjegyek valamelyikét úgy, hogy bármely különböző, a fenti számjegyekből álló számpár előforduljon a tízszög oldalainak két végpontjaként!

Odaírhatjuk – e a szabályos tizenötszög csúcspontjaihoz az $1; 2; \dots; 5; 6$ számjegyek valamelyikét úgy, hogy bármely külnöböző, a fenti számjegyekből álló számpár előforduljon a tízszög oldalainak két végpontjaként?

78. Egy 10 tagú titkos társaság esetén tudjuk, hogy bármely tagtól származó üzenet bármely taghoz elér vagy közvetlenül, vagy a többiek közül néhányon keresztül. Bizonyítsd be, hogy ha a társaság tagjai között 10 – nél kevesebb ismeretség van, akkor van közöttük olyan, aki csak egy másik tagot ismer!

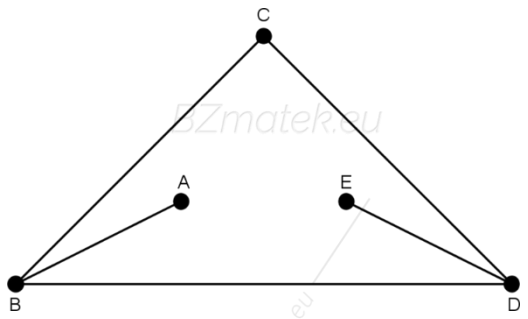
79. Igazold, hogy ha egy 6 csúcsú gráfnak legalább 6 éle van, akkor a gráfban van kör!

80. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú összefüggő, egyszerű gráfnak n éle van, akkor pontosan egy kör van benne!

81. Igazold, ha egy 5 csúcsú gráfban minden pontból legalább 2 él indul, akkor a gráfban van kör!

82. Igazold, hogy bármely, legalább két pontból álló fagráfban az elsőfokú pontok száma legalább kettővel több, mint a legalább háromfokú pontok száma! Mit állíthatunk azokról a fagráfokról, melyekben az elsőfokú pontok száma pontosan kettővel több, mint a legalább háromfokú pontok száma?

83. Melyik két csúcs van egymástól legtávolabb az alábbi gráfban? Mekkora a gráf átmérője?



84. Legyen $ABCDEFGH$ egy kocka, amelynek alja az $ABCD$ négyzet. Az A felett E csúcs van, továbbá $EFGH$ és $ABCD$ körüljárása megegyezik. Tekintsük most az A, B, C, D, E, F, G, H csúcsú gráfot, amelyben két pont között pontosan akkor van él, ha a kocka két megfelelő csúcsa valamely lapátló két vége. Eljuthatunk – e a gráf B pontjából a H csúcsba az éleken közlekedve? Mekkora a gráf átmérője?

85. Határozd meg a kocka gráfjának az átmérőjét!

86. Az egyszerű, összefüggő G gráfnak 8 pontja van. Mennyi a feltételt kielégítő G gráfok átmérőinek maximuma, ha G minden pontjának foka: 2; 6; illetve 4?

87. Egy n pontú egyszerű gráf minden pontjánk fokszáma 2 és minden komponense egyetlen kör. Hány kört tartalmazhat maximum ez a gráf?

88. Egy n csúcsú egyszerű gráfnak $\binom{n-1}{2} + 1$ éle van. Bizonyítsd be, hogy ez a gráf összefüggő!

89. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis a következő állítás?

A: Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok és élek számának az összege páratlan.

B: Ha egy 19 csúcsú egyszerű gráfban nincs kör, akkor 18 éle van.

C: Minden fagráfnak van legalább három elsőfokú pontja.

D: Van olyan fagráf, amelynek nincs két elsőfokú csúcsa.

E: Van olyan fagráf, amelyben van zárt Euler - vonal.

F: Van olyan fagráf, amelynek van két olyan pontja, amelyek között van két különböző út.

90. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis a következő állítás?

A: Ha egy gráf összefüggő, akkor bármely pontjából bármely pontjába vezet séta.

B: Ha egy gráfban van kör, akkor a gráf összefüggő.

C: Ha egy összefüggő gráfban van zárt Euler – vonal, akkor a gráfban van olyan pont, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad.

D: Ha egy gráfban van olyan él, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad, akkor a gráfban van kör.

E: Ha egy gráfnak 20 pontja és 21 éle van, akkor a gráfnak van köre.

F: Ha egy gráfnak van zárt Euler – vonala, akkor a gráf minden pontjának fokszáma páros.

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(10) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(11) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(13) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(14) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(15) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(16) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(21) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(22) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(23) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(24) Saját anyagok