Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Egy n csúcsú fagráfnak pontosan $n-1$ éle van.

Bizonyítás:
Ha ágnak tekintünk egy élt az egyik végpontjával, akkor minden fagráf ágakat hajtva növekszik (plusz egy él plusz egy csúcs). Ekkor a gráf egyszerű és összefüggő marad, viszont mivel a kezdő pontját is bele kell számolni, ezért a pontok száma eggyel több lesz, mint az élek száma.

■

TÉTEL:
Bármely fagráfban van legalább két elsőfokú csúcs.

Bizonyítás:
Tekintsük a gráf leghosszabb útját, s vizsgáljuk meg a kezdő és végpontját. Ha a kezdőpontnak lenne az út pontjaitól különböző szomszédos (éllel összekötött) csúcsa, akkor egy hosszabb utat kapnánk, ami ellentmond a leghosszabb út feltevésének. Amennyiben az út egy későbbi pontjába vezetne él, akkor pedig kört kapnánk, s ez ellentmondana a fagráf definíciójának. Mivel ezek a tulajdonságok az út végpontjára is fennállnak, így található két elsőfokú csúcs.

■

TÉTEL:
Minden egyszerű, összefüggő gráfnak van feszítőfája.

Bizonyítás:
Amennyiben a gráfban van kör, akkor hagyjuk el a kör egy tetszőleges élét. A keletkező gráfot megvizsgálva, amennyiben továbbra is található benne kör, akkor annak ismét hagyjuk el egy tetszőleges élét. Ezt az eljárást folytassuk addig, amíg a gráfban nem lesz kör.

Az így keletkező gráf körmentes és összefüggő, hiszen mindig körökből hagytunk el éleket, vagyis fagráf. Mivel az élek törlésével a csúcsok megmaradtak, így a megmaradt gráf feszítőfa.

■

TÉTEL:
Ha egy összefüggő gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás:
Tekintsük a gráf egy tetszőleges csúcsát, s az ebből induló leghosszabb utat. A fokszámok miatt az út másik végpontjából indulnia kell még élnek, amely nincs benne az útban. Ez az él azonban kört zár be, mert ellenkező esetben az út folytatódna, vagyis nem lenne maximális hosszú.

■