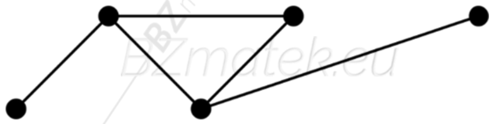
Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Gráfelmélet I.

DEFINÍCIÓ: (Gráf)
Az olyan alakzatot, amely pontokból és bizonyos pontpárokat összekötő vonaldarabokból áll, gráfnak nevezzük.

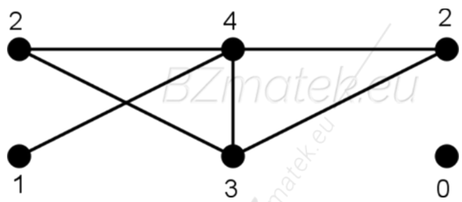


Megjegyzés:

- *A pontokat a gráf csúcsainak, a vonalakat a gráf éleinek nevezzük.*
- *A gráfok esetén a geometriai elhelyezkedés (a vonalak alakja) nem számít, csak bizonyos pontpárok összekötöttsége.*
- *A vonaldarabok keresztezhetik egymást, de az élek (belső) metszéspontja (ha van ilyen) nem pontja a gráfnak.*
- *A gráf két csúcsát szomszédosnak nevezzük, ha azokat él köti össze.*
- *A gráf csúcsait $v_1; v_2; \dots; v_k$ – vel, az éleit $e_1; e_2; \dots; e_k$ – vel jelöljük.*
- *A csúcsok számát a gráf rendjének, az élek számát pedig a gráf méretének is szokás nevezni.*

DEFINÍCIÓ: (Véges gráf)
A G gráfot véges gráfnak nevezzük, ha csúcsainak és éleinek a száma is véges, tehát egy nem negatív egész szám.

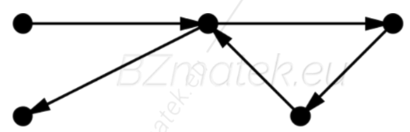
DEFINÍCIÓ: (Fokszám)
A G gráf v csúcsának fokszámán (fokán) a csúcsra illeszkedő élek számát értjük. Jele: $d\ (v)$.



Megjegyzés:

- *Egy G gráfot megadhatunk a fokszámsorozatával, vagyis a csúcsok fokszámainak növekvő sorrendben való megadásával. Az ábrán látható gráf fokszámsorozata:* $0; 1; 2; 2; 3; 4$.
- *A gráf csúcspontjai fokszámának maximumát $\Delta\ (G)$ – vel, minimumát $\delta\ (G)$ – vel jelöljük.*

DEFINÍCIÓ: (Irányított gráf)
Egy G gráfot irányított gráfnak nevezünk, ha az élei két csúcsa közül az egyiket kezdőpontnak, a másikat végpontnak tekintjük.



Megjegyzés:
Irányított gráf esetén a csúcsoknak megkülönböztetjük a befokát (csúcsokba befutó élek számát) és kifokát (csúcsokból kifutó élek számát).

TÉTEL:
Egy véges irányított gráfban a csúcsok befokának összege egyenlő a csúcsok kifokának összegével.

TÉTEL: (Kézfogási tétel - fokszámtétel):
Egy véges gráfban a csúcsok fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

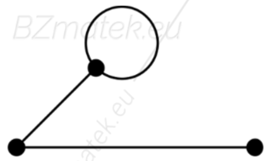
TÉTEL:
Bármely véges gráf páratlan fokú csúcsainak a száma páros.

TÉTEL:
Bármely véges gráfban a csúcsok fokszámainak összege páros.

TÉTEL:
Bármely véges gráfban van két pont, amelynek a foka egyenlő.

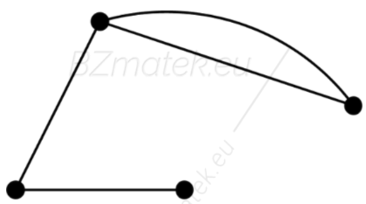
DEFINÍCIÓ: (Izolált csúcs)
A G gráf egy pontját izolált csúcsnak nevezzük, ha nem illeszkedik rá él, vagyis a fokszáma 0.

DEFINÍCIÓ: (Hurokél)
A G gráf egy élét hurokélnek nevezzük, ha az él két végpontja megegyezik.

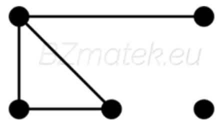


Megjegyzés:
A hurokélt a fokszám során 2 *élnek tekintjük.*

DEFINÍCIÓ: (Többszörös él)
A G gráf éleit többszörös (párhuzamos) éleknek nevezzük, ha ugyanazt a két csúcsot kötik össze.



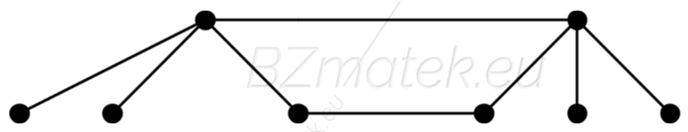
DEFINÍCIÓ: (Egyszerű gráf)
A G gráfot egyszerű (ismeretségi) gráfnak nevezzük, ha nem tartalmaz többszörös élt és hurokélt sem.



TÉTEL:
Bármely G egyszerű gráfban van két olyan csúcs, amelyeknek fokszáma megegyezik.

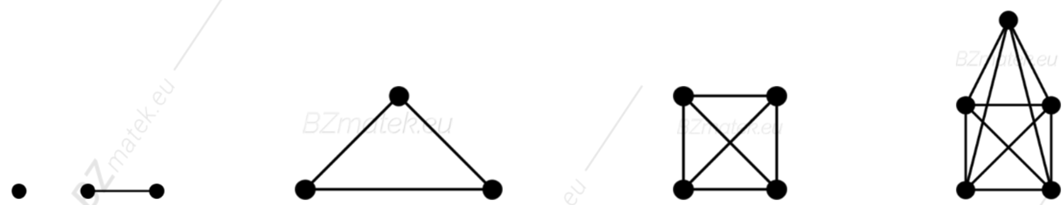
DEFINÍCIÓ: (Üres gráf)
Az él nélküli G gráfot üres gráfnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Összefüggő gráf)
Egy G gráfot összefüggőnek nevezünk, ha bármely csúcsból vezet bármely másik csúcsba út.



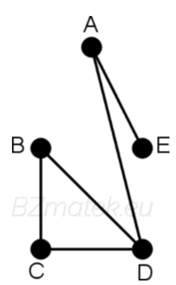
Megjegyzés:
Szemléletesen: Az összefüggő gráf nem tartalmaz izolált csúcsot.

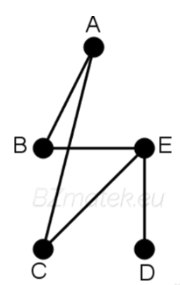
DEFINÍCIÓ: (Teljes gráf)
Egy n pontú egyszerű gráfot n csúcsú teljes gráfnak nevezünk, ha bármely két csúcsa össze van kötve éllel. Jele: K_n.



TÉTEL:
Az n csúcsú teljes gráf éleinek száma: $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

DEFINÍCIÓ: (Komplementer gráf)
Egy n pontú, egyszerű G gráfnak n csúcsú teljes gráffá kiegészítő gráfját az eredeti gráf komplementer gráfjának nevezzük. Jele: $\overline{G}$.

Eredeti gráf: 

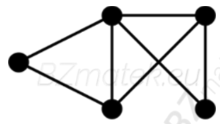
Komplementer gráf: 

Megjegyzés:
A komplementer gráf csúcsai megegyeznek az eredeti gráf csúcsaival, s éppen azok a csúcsok vannak össze kötve éllel, melyek az eredeti gráfban nem voltak összekötve.

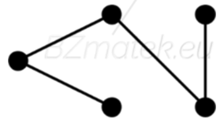
DEFINÍCIÓ: (Részgráf)
Egy G gráf részgráfja az eredeti gráf valahány csúcsából és az ezekhez a csúcsokhoz eredetileg tartozók közül valahány élből áll.

Megjegyzés:
Szemléletesen: A részgráfot úgy kapjuk, hogy az eredeti gráfból bizonyos élt, vagy csúcsot törlünk és a csúcsok törlése esetén az összes rájuk illeszkedő éleket is törölnünk kell.

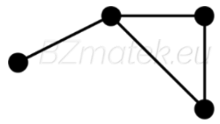
Eredeti gráf:



Élek törlésével kapott részgráf:



Csúcs törlésével kapott részgráf:

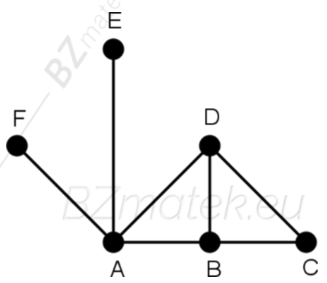


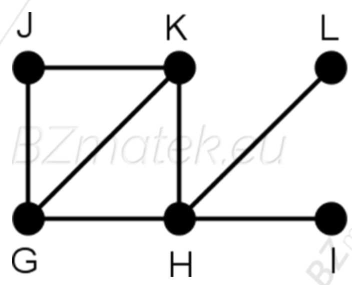
DEFINÍCIÓ: (Izomorf gráfok)
Két gráfot izomorfnak (azaz gráfelméleti szempontból megegyezőnek) nevezünk, ha éleik között és csúcsaik között is létezik illeszkedéstartó, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Megjegyzés:

- *Szemléletesen: Két gráfot egyenlőnek (izomorfnak) tekintünk, ha található a két gráf csúcsai között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amelyik úgy felelteti meg az egyik gráf csúcsait a másik gráf csúcsainak, hogy az egyik gráfban két csúcsot pontosan annyi él köt össze, mint a másik gráfban a nekik megfelelő csúcsokat.*

- *Az izomorf gráfoknak ugyanannyi élük és csúcsuk van, s az egymásnak megfelelő csúcsok fokszáma megegyezik.*





Megfeleltetés: $A \rightarrow H; B \rightarrow G; C \rightarrow J; D \rightarrow K; E \rightarrow I; F \rightarrow L$

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Rajzolj olyan egyszerű gráfot melynek fokszám sorozata a következő!

A: $1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 9$ **B:** $1; 1; 2; 3; 4$

C: $0; 1; 2; 3; 4; 5; 5; 6; 7; 9$ **D:** $3; 4; 6; 6; 8; 9; 9; 9; 9; 9$

E: $0; 1; 2; 2; 3$ **F:** $1; 1; 2; 3; 5$

G: $1; 2; 3; 3; 3$ **H:** $1; 2; 2; 3; 4; 4$

I: $1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3$ **J:** $1; 2; 3; 3; 4; 5$

K: $1; 2; 3; 3; 4$ **L:** $0; 0; 2; 3; 3; 4; 4$

2. (K) Rajzolj olyan (nem feltétlen egyszerű) gráfot, ahol a fokszámsorozat a következő!

A: $3; 3; 3; 3; 4$ **B:** $2; 2; 2; 3; 3$

C: $1; 2; 2; 3; 3; 5; 6$ **D:** $0; 0; 4; 4; 4; 4$

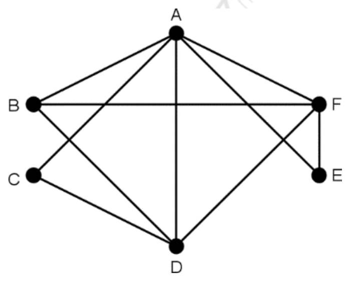
E: $0; 1; 2; 3; 4; 4; 5$ **F:** $1; 1; 2; 2; 4$

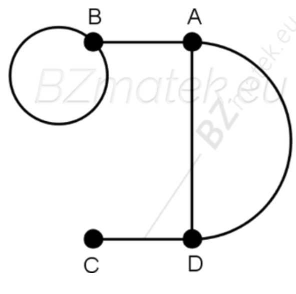
G: $0; 1; 2; 3; 4; 6; 6$ **H:** $0; 0; 0; 3; 4; 7; 8$

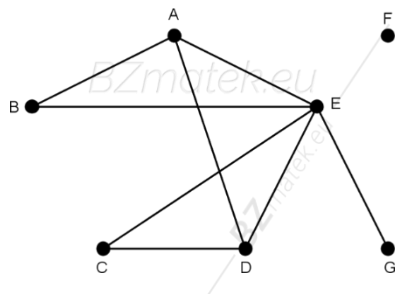
I: $1; 2; 2; 3; 4; 4; 5; 6; 6$ **J:** $2; 2; 3; 3; 3$

K: $0; 1; 2; 3; 4$ **L:** $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$

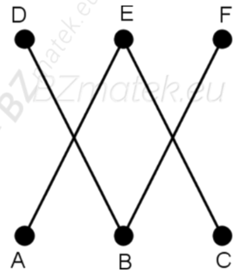
3. (K) Add meg az alábbi gráfok fokszámsorozatát! Melyik nem egyszerű gráf?

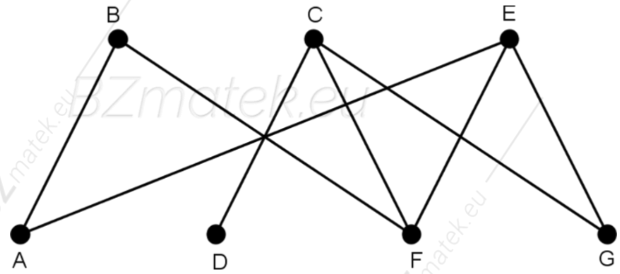


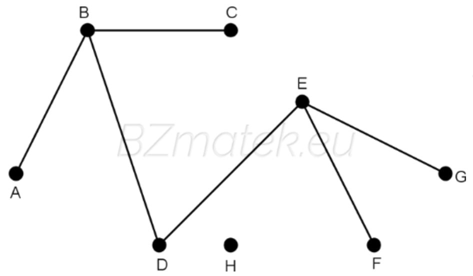




4. (K) Egy 6, egy 7, illetve egy 8 tagú társaságban az ismeretségeket a mellékelt gráfok szemléltetik. Határozd meg, hogy az egyes embereknek hány ismerőse van a társaságban! Összefüggők - e a gráfok?







5. (K) Rajzolj egyszerű, nem összefüggő gráfokat, amelyekben fokszámok a következők!

A: $\mathbf{1; 1; 1; 1; 2}$ **B:** $\mathbf{2; 2; 2; 2; 2; 2}$ **C:** $\mathbf{2; 2; 2; 3; 3; 3; 3}$

6. (K) Adj elégséges feltételt fokszámok segítségével, ami biztosítja, hogy az egyszerű $\boldsymbol{n}$ pontú gráf összefüggő, illetve nem összefüggő!

7. (K) Igazold, hogy ha egy 6 pontú gráfnak legfeljebb 4 éle van, akkor a gráf nem összefüggő!

8. (K) Igazold, hogy ha egy 10 pontú gráfnak 9 éle van, akkor van olyan pontja, amelyből 1 vagy 0 él indul!

9. (K) Rajzolj olyan gráfot, amelynek 6 csúcsa van, 12 éle és minden csúcs fokszáma 4!

10. (K) Az $\boldsymbol{A, B, C, D, E}$ és $\boldsymbol{F}$ pontokat tetszés szerint vonalakkal kötünk össze. Ez lehet önmagába visszatérő vonal is, és két pont között több vonalat is húzhatunk. Az első öt pontból kiinduló vonalak száma rendre $\mathbf{7; 2; 5; 4; 2}$. Csak azt tudjuk, hogy $\boldsymbol{F}$ – ből 3 vagy 4 vonal indul. Melyik lehet a helyes eredmény?

11. (K) Létezik – e olyan 3 csúcsú gráf, amelyben a csúcsok fokszáma: $0; 1; 3$?

12. (K) Létezik – e olyan 4 tagú társaság, amelyben egy embernek három ismerőse van, egy embernek kettő, egynek egy, a negyediknek pedig egy sem?

13. (K) Szemléltess gráffal 4 olyan települést, melyek közül egyből 3, kettőből 2 és egyből 1 út indul ki a többi három település felé!

14. (K) Létezhet - e olyan úthálózat 4 település között, hogy az egyikből 2 út indul ki, kettőből 3, míg a negyediket a másik három közül eggyel sem köti össze közvetlen út?

15. (K) Egy 5 fős társaság ötödének 1, a tagok $0,4$ – ének 2, az emberek $20\ \%$ - ának 3, a többieknek pedig 4 ismerőse van a társaságon belül. (Az ismeretség kölcsönös). Szemléltesd az ismeretségeket gráffal!

16. (K) Egy 5 tagú társaságban végig kérdezzük az embereket arról, hogy hány ismerősük van a társaság tagjai közt. Válaszul ketten 1 – et, ketten 3 – at és egy valaki 2 – t mondott. (Az ismertség mindig kölcsönös.) Szemléltesd a társaságon belüli ismeretségi viszonyokat gráffal!

17. (K) Egy 5 fős társaságban mindenkinek van legalább egy ismerőse. (Az ismeretség kölcsönös.) Rajzolj egy, a szituációt ábrázoló gráfot!

18. (K) Egy 5 fős társaságban mindenkinek pontosan 2 ismerőse van a társaságon belül. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Van – e közöttük 3 olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást?

19. (K) Létrehozható - e 5 falu között olyan úthálózat, amely 4 utat tartalmaz, továbbá bármelyik faluból bármelyik másikba el lehet jutni? Ha a válasz igen, akkor rajzolj egy ilyen gráfot!

20. (K) Igaz – e, hogy ha egy 5 tagú társaságban mindenkinek legalább 3 ismerőse van, akkor van olyan személy is, aki mindenkit ismer?

21. (K) Egy 6 fős társaságban van 2 olyan ember, aki senkit nem ismer, míg a többiek mindannyian pontosan 1 másikat ismernek a csapatból. Adj meg egy lehetséges ismeretségi gráfot! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

22. (K) Egy találkozón 6 ember vett részt, a résztvevők egyharmada 5, ketten közülük 3, a többiek pedig 2 emberrel fogtak kezet. Szemléltesd gráffal a kézfogásokat!

23. (K) Egy találkozón 6 ember vett részt, a résztvevők fele 5, harmada 4 emberrel fogott kezet, egy ember pedig 3 emberrel. Szemléltesd gráffal a kézfogásokat!

24. (K) Egy találkozón 6 ember vett részt. A résztvevők felének 3, harmadának 2 és egy embernek 1 haragosa van a társaságban. Szemléltesd gráffal az egymással haragban levő embereket!

25. (K) Egy 6 tagú társaságban megkérdezzük az embereket, hogy kinek hány ismerőse van a társaság tagjai között. Válaszul háromszor 1 – et, kétszer 2 – t és egyszer 5 – öt kapunk. (Az ismeretségek mind kölcsönösek.) Szemléltesd a társaságon belüli ismeretségi viszonyokat gráffal!

26. (K) Egy 6 fős társaságban mindenkit megkérdeztek, hogy mennyi ismerőse van a többiek között. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Az első öt megkérdezett személy válasza a következő volt: $1; 2; 3; 3; 5$. Ábrázold gráffal a társaság ismeretségi viszonyait! Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

27. (K) Vacsora közben a vendégek egymás között adták – vették a salátástálat. A hat személyből ötnél $2; 3; 3; 4; 5$ alkalommal fordult meg a tál. Hányszor lehetett legalább és legfeljebb a tál a hatodik vendég kezében? (Ugyanazon két személy kétszer nem adta a tálat egymásnak.) Adj konkrét példát mindkét esetre!

28. (K) Egy 7 tagú társaságról tudjuk, hogy hat embernek mennyi ismerőse van a társaságban: $1; 1; 2; 3; 4; 6$. Rajzolj erről a társaságról egy lehetséges ismeretségi gráfot, és add meg a hetedik ember ismerőseinek számát ebben az esetben! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

29. (K) Összejön a hét törpe, de nincs mindenki mindenkivel jóban. Előfordulhat – e, hogy üdvözléskor mindegyik törpe pontosan 1 társával ne fogjon kezet?

30. (K) Egy 5 tagú társaságban megkérdezték, kinek hány ismerőse van a társaságban. Igazat mondtak – e, ha a válaszok a következők voltak? (Tegyük fel, hogy az ismeretségek kölcsönösek.) Ha igen, akkor szemléltesd gráffal az ismeretségeket!

A: $1; 1; 2; 2; 3$ **B:** $1; 2; 3; 4; 4$ **C:** $0; 1; 2; 3; 3$ **D:** $0; 1; 2; 3; 4$

31. (K) Egy 6 tagú társaságban mindenkit megkérdeztünk, hány embert ismer a jelenlévők közül. (Az ismeretség kölcsönös.) Igazat mondtak – e, ha a következő válaszokat adták?

A: $1; 1; 1; 2; 3; 3$ **B:** $2; 2; 3; 3; 3; 4$ **C:** $2; 3; 3; 4; 5; 5$ **D:** $2; 3; 4; 5; 5; 5$

E: $0; 1; 1; 2; 2; 2$ **F:** $0; 1; 2; 2; 4; 5$ **G:** $1; 2; 2; 3; 5; 5$ **H:** $3; 3; 3; 5; 5; 5$

I: $1; 2; 3; 3; 5; 5$ **J:** $1; 1; 2; 3; 3; 3$ **K:** $1; 1; 1; 2; 4; 5$ **L:** $1; 2; 2; 2; 4; 5$

32. (K) Egy 7 tagú igazgatótanácsból néhányan a gyűlés előtt kezet fogtak egymással. Lehet – e tagonként a kézfogások száma a következő?

A: $2; 2; 3; 3; 4; 4; 5$ **B:** $0; 2; 2; 2; 3; 4; 6$ **C:** $2; 2; 2; 2; 2; 2; 2$

33. (K) Egy 8 tagú társaságban mindenkit megkérdeztünk, hány embert ismer a jelenlévők közül. (Az ismeretség kölcsönös.) Igazat mondtak – e, ha a következő válaszokat adták?

A: $0; 1; 2; 4; 5; 5; 6; 7$ **B:** $2; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 5$ **C:** $0; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 4$

34. (K) Egy 9 tagú társaságban a bankett előtt néhányan koccintanak egymással. Lehet – e a koccintások száma a következő?

A: $1; 1; 3; 4; 4; 4; 6; 8; 8$ **B:** $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$

C: $1; 1; 2; 2; 3; 3; 6; 8; 8$ **D:** $1; 1; 3; 5; 6; 6; 8; 8; 8$

35. (K) Egy 6 pontú, egyszerű, összefüggő gráfban van $1; 2; 3; 4$ és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka?

36. (K) Előfordulhat - e, hogy egy $n = 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$ fős társaságban mindenki pontosan 3 embert ismer?

37. (K) Van – e olyan 21 tagú társaság, amelyben mindenkinek 7 ismerőse van, ha az ismeretség mindig kölcsönös?

38. (K) Egy házibuliban 5 fiú és 5 lány vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az este folyamán hány különböző partnerrel táncolt. A cédulákon a következő számok szerepeltek: $2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 2;\ 3;\ 4;\ 4;\ 4;\ 4$. Lehetséges - e ez? (Csak ellenkező neműek táncoltak egymással.)

39. (K) Egy 4 házaspárból álló társaság elmegy táncolni. Az este végén mindenki felírja egy papírra, hogy hány ellenkező nemű emberrel táncolt. A papíron hét darab 3 – as és egy 1 – es szerepel. Lehetséges - e ez?

40. (K) Egy 5 fős társaságban 3 nő és 2 férfi található és tudjuk, hogy az azonos neműek nem ismerik egymást. Mindenki felírta egy darab papírra, hogy hány ismerőse van a társaság tagjai között. Lehetséges - e, hogy a papíron szereplő számok: $1; 2; 2; 2; 3$?

41. (K) Egy társaságban 5 nő és 5 férfi szórakozik együtt. Mindenkit megkérdezünk az este végén, hogy hány ellenkező nemű emberrel táncolt az este folyamán. A nők válaszai rendre: $2; 2; 3; 3; 5$. A férfiak válaszai pedig: $1; 2; 2; 4; 5$. Bizonyítsd be, hogy valaki rosszul számolt!

42. (K) Bizonyítsd be a következőket! (Az ismeretségek kölcsönösek.)

A: Nincs olyan 8 személyől álló társaság, ahol az embereknek rendre $7, 7, 7, 6, 6, 6, 4, 4$ ismerősük volna!

B: Nincs olyan 9 személyől álló társaság, ahol az embereknek rendre $8, 8, 8, 7, 7, 7, 5, 4, 4$ ismerősük volna!

43. (K) Egy 5 pontú egyszerű gráfban megrajzolunk 8 élt. Mutasd meg, hogy mindig van legalább 2 olyan csúcs, amelyből pontosan 3 él indul ki! Adj meg egy olyan gráfot, amely ezt szemlélteti!

44. (K) Adott 5 város úgy, hogy közülük bármely 3 - ból kiválasztható 2, amelyeket út köt össze. Bizonyítsd be, hogy az utak száma legalább 4!

45. (K) Egy sakkversenyen bármelyik két játékos legfeljebb egyszer játszott egymással. Igaz – e, hogy a verseny bármely pillanatában volt legalább két olyan versenyző, aki addig ugyanannyi lejátszott mérkőzésnél tartott? (Az éppen tartó mérkőzést nem tekintjük lejátszottnak.)

46. (K) Egy társaságban néhányan kezet fognak egymással. (Bármely két ember legfeljebb egyszer fogott kezet.) Bizonyítsd be, hogy van 2 olyan ember, akik ugyanannyiszor fogtak kezet! Igaz marad - e az állítás, ha megengedjük, hogy két ember között több kézfogás is történjen?

47. (K) A 16 focicsapat körmérkőzéses tornán vesz részt. Bizonyítsd be, hogy a torna bármely pillanatában van 2 olyan csapat, akik addig azonos számú mérkőzést játszottak le!

48. (K) Egy egyszerű gráfnak 7 csúcsa van. Lehetséges – e, hogy minden csúcs foka különböző legyen?

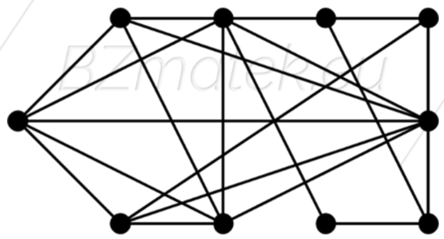
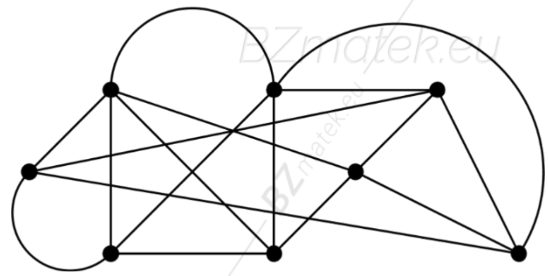
49. (K) Igaz - e, hogy egy 6 fős társaságban mindig van 2 olyan ember, akik ugyanannyi embert nem ismernek a társaságból?

50. (K) Lehetséges – e, hogy egy n pontú gráfban a pontok fokszámai különböző, de egymás után következő egész számok? Lehetséges – e ez egyszerű gráfok esetén?

51. (E) Zoli meghívott magához 8 embert vendégségbe. A vendégek közül néhányan kezet fogtak egymással, illetve a házigazdával. (Bármely két ember legfeljebb egyszer fogott kezet.) Amikor megszámolták, hogy ki hányszor fogott kezet, kiderült, hogy a vendégek közül mindenki különböző számú emberrel fogott kezet. Hányszor fogott kezet Zoli?

52. (E) Péternek 28 osztálytársa van. Mind a 28 – nak különböző számú barátja van az osztályban. Hány barátja van (közülük) Péternek? (A barátságok kölcsönösek.)

53. (K) Hány éle van a következő gráfoknak?

54. (K) Hány éle van annak az 5 csúcsú egyszerű gráfnak, amelynek a fokszámai a következők?

A: $0; 1; 1; 1; 3$ **B:** $1; 1; 2; 2; 2$ **C:** $1; 1; 1; 1; 2$ **D:** $1; 2; 2; 3; 4$

55. (K) Hány éle van annak a 8 csúcsú gráfnak, amelynek a fokszámai a következők? Rajzolj ilyen gráfokat!

A: $1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3$ **B:** $0; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 6$ **C:** $1; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 7$

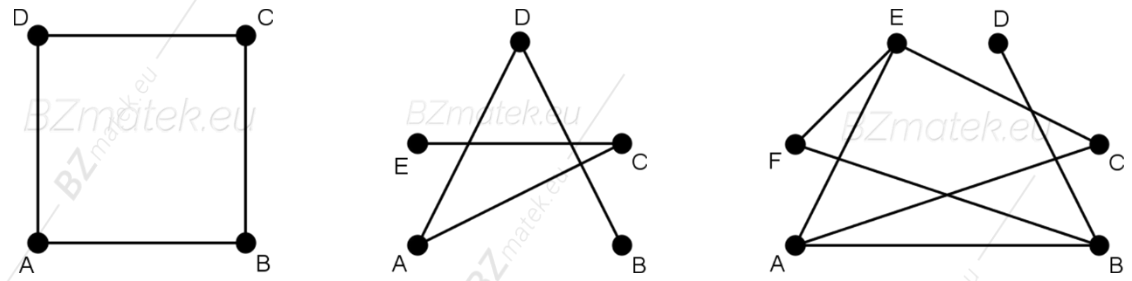
56. (K) Hány ismeretség van abban a 7 tagú társaságban, ahol minden ember pontosan 2 másikat ismer a társaság tagjai közül? Ábrázold gráf segítségével az ismertségi viszonyokat! (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

57. (K) Egy találkozón 12 ember vett részt. Hatan közülük hárommal, ketten közülük öttel, míg négyen hat emberrel fogtak kezet. Hány kézfogás volt?

58. (K) Nyolc sakkozó körmérkőzést játszik. Hány mérkőzést játszottak le, ha tudjuk, hogy négy sakkozó mindegyike már három, négy sakkozó mindegyike pedig már négy mérkőzést játszott le?

59. (K) Tekintsük a sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos lóugrással. Hány éle van az így kapott gráfnak?

60. (K) Rajzold meg az alábbi gráfok komplementerét!



61. (K) Egy 5 csúcsú gráfban két csúcs fokszáma 3, és három csúcsé 2. Rajzolj fel egy ilyen gráfot! Rajzold meg a komplementer gráfját!

62. (K) Egy összejövetelen az 5 résztvevő közötti kézfogások száma $1; 2; 2; 3; 4$ volt. Szemléltesd gráffal a meg nem történt kézfogásokat!

63. (K) Adott egy 7 csúcsú egyszerű gráf fokszámsorozata. Határozd meg a gráf komplementerének a fokszámait! Mennyi éle van a gráf komplementerének?

A: $0; 2; 2; 3; 3; 3; 5$ **B:** $1; 2; 2; 2; 3; 4; 4$

64. (K) Egy 16 csúcsú egyszerű gráfnak negyedannyi éle van, mint a komplementerének. Hány éle van a gráfnak?

65. (K) Egy 12 csúcsú egyszerű gráfnak fele annyi éle van, mint komplementerének. Hány éle van a gráfnak?

66. (K) Legalább és legfeljebb hány éle van egy olyan egyszerű 4 csúcsú gráfnak, amelynek több éle van, mint a komplementerének? Rajzolj fel egy - egy ilyen gráfot!

67. (E) Egy társaságról tudjuk, hogy mindenki legalább a társaság felét ismeri. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Lehet – e a teljes társaságot két olyan részre bontani, hogy a két csoportból bárhogyan is választunk ki egy – egy embert, azok biztosan nem ismerik egymást?

68. (E) Egy országban két vasúttársaság van, amelyek együttesen bármely két település között létesítettek legalább egy járatot. Igazold, hogy az egyik társaság járatainak megszüntetésével még mindig eljuthatunk vasúton az ország egyik településéről egy tetszőleges másikba! Fogalmazd meg a feladat állítását a gráfok nyelvén!

69. (K) Hány éle van egy egyszerű gráfnak és komplementerének együttesen?

70. (K) Rajzolj egy 6 csúcsú teljes gráfot!

71. (K) Melyek azok a gráfok, amelyekben bármely két élnek van közös végpontja?

72. (K) Egy 6 pontú egyszerű gráfban van izolált pont. Legfeljebb mennyi éle lehet?

73. (K) Legalább hány éle van annak a gráfnak, amelynek 3 csúcsa van és összefüggő?

74. (K) Rajzolj két különböző 6 csúcsú gráfot, amelyben minden pont fokszáma legalább három! Legalább és legfeljebb hány éle van ezeknek a gráfoknak?

75. (K) Hány éle van egy 7, illetve egy 28 pontú teljes gráfnak?

76. (K) Hány csúcsú az a teljes gráf, amelynek n éle van?

$\boldsymbol{n = 10}$ $\quad$ $\boldsymbol{n = 21}$ $\quad$ $\boldsymbol{n = 190}$ $\quad$ $\boldsymbol{n = 152}$

77. (K) Egy 10 csúcsú teljes gráfban hányféleképpen tudunk kiválasztani két élt? Hányféleképpen lehet kiválasztani úgy, hogy az a két él egy csúcsban csatlakozzon?

78. (K) Két teljes gráf összes élének száma 111. Az egyiknek 2 – vel több csúcsa van, mint a másiknak. Mennyi csúcsú a két gráf?

79. (K) Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek legalább annyi éle van, mint a pontok számának a négyszerese, és kevesebb, mint a pontok számának az ötszöröse?

80. **(K) Egy 11 fős társaságban mindenki ismer mindenkit. Hány ismeretség van a társaság tagjai között?**

81. **(K) Egy 10 fős baráti társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hány kézfogás volt összesen?**

82. **(K) Egy rendezvényen 8 barát találkozik. Koccintással üdvözlik egymást. Hány koccintásra kerül sor?**

83. **(K) Egy kör kerületén kijelöltünk 10 pontot. Ha mindegyiket mindegyikkel össze szeretnénk kötni úgy, hogy bármelyik kettő pontosan egy szakasszal legyen összekötve, akkor összesen hány szakaszt kell berajzolnunk?**

84. **(K) Egyik megyében 6 falu között új utakat építenek. Legkevesebb hány utat kell építeni, ha minden faluból minden faluba új úton akarunk eljutni? Összesen mennyi utat kell építeni közéjük, ha azt szeretnénk, hogy minden faluból minden másikba vezessen közvetlenül egy út?**

85. **(K) Egy konvex 21 szögnek összesen mennyi oldala és átlója van? A berajzolt átlóknak hány közös pontja van?**

86. **(K) Nyolc sakkozót két csoportra kell osztani úgy, hogy az egyes csoportokon belüli körmérkőzéses versenyek során lejátszott mérkőzések együttes száma a legkevesebb legyen. Hogyan osszuk két csoportra a sakkozókat?**

87. **(K) Egy 5 pontú egyszerű gráf pontjainak fokszámai a következők: $2, 2, 2, 2, 4$. Hány élt kell még berajzolnunk, ha teljes gráffá szeretnénk kiegészíteni?**

88. **(K) Egy n pontú egyszerű gráfban n él van. Hány élt kell még berajzolnunk, hogy egy n pontú teljes gráfot kapjunk?**

89. **(K) Egy estélyen 11 - en vettek részt. Akik ismerték egymást, koccintottak egymással egy pohár pezsgővel. Akik nem ismerték egymást, azok kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Lehetséges – e, hogy ugyanannyi koccintás volt, mint kézfogás?**

90. (K) Egy 7 fős társaság találkozón vett részt. A találkozó elején az ismeretségek száma $1; 1; 2; 2; 2; 3; 5$ volt, míg a találkozó végén már mindenki ismert mindenkit. Hány új ismeretségek kötöttek? Ábrázold az új ismeretségek gráfját!

91. (K) Egy körmérkőzéses sakkversenyen, ahol mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik, összesen 91 partira került sor. Hány játékos vett részt a versenyen?

92. (K) Mennyien vettek részt egy versenyen, ha minden résztvevő egy – egy mérkőzést játszott az összes többi résztvevővel és összesen 231 mérkőzést bonyolítottak le?

93. (K) Egy körmérkőzéses tornán most minden csapatnak 3 mérkőzése van hátra, eddig 48 mérkőzés fejeződött be. Hány csapat vesz részt a tornán? Hány mérkőzést rendeznek összesen? (A torna során mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik.)

94. (K) Egy osztálytalálkozón az emberek három asztalhoz ülnek le. (Minden asztalhoz legalább 2 fő.) Az első asztalnál hárommal többen ülnek, mint a második asztalnál és néggyel kevesebben, mint a harmadik asztalnál. A vacsora előtt az egyes asztaloknál mindenki mindenkivel koccintott egyet, és így a harmadik asztalnál 22 – vel több koccintás történt, mint az első két asztalnál összesen. Hány fős volt az osztály, ha mindenki eljött a találkozóra?

95. (E) Egy körmérkőzéses tornán 7 csapat vesz részt. (A körmérkőzéses lebonyolítás esetén minden csapat minden másikkal pontosan egyszer játszik.) Hány mérkőzésre kerül sor összesen? Igazold, ha egy mérkőzés időtartama 1 óra, és 3 pálya áll rendelkezésre, akkor a torna lebonyolítható 7 óra alatt, de kevesebb idő alatt nem!

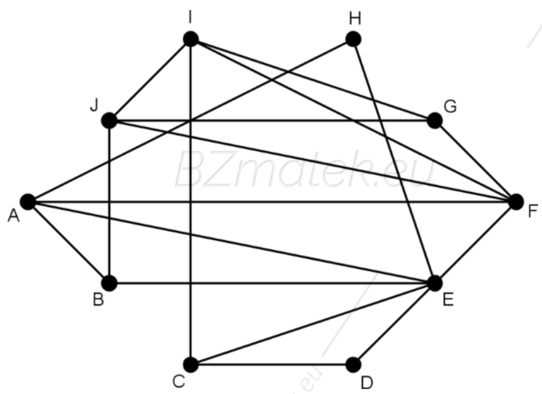
96. (K) Tíz csapat egyfordulós körmérkőzéses bajnokságot játszik. Ha már 40 mérkőzést lejátszottak, akkor mennyi mérkőzés van még hátra?

97. (K) Tizenhárom csapat egyfordulós körmérkőzéses bajnokságot játszik. 42 mérkőzést már lejátszottak. Hány mérkőzés van még hátra?

98. (K) Tíz csapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással. Ha minden csapat eddig 5 mérkőzést játszott már, akkor hány meccs van hátra?

99. (K) Focibajnokságon van olyan csapat, amelyik már 7 mérkőzést játszott. Legalább hány meccs volt már, ha 11 csapat nevezett a bajnokságra? Összesen mennyi meccsnek kell lennie a bajnokság végén?

100.(K) Egy 10 csapatos bajnokságban minden csapat minden másikkal megmérkőzik egyszer. Az alábbi ábrán az eddig lejátszott mérkőzéseket látjuk. (A pontok a csapatokat szemléltetik, az élek pedig a két csapat között már lejátszott mérkőzést.) A bajnokságban eddig 6 fordulót rendeztek meg, azonban néhány mérkőzés elmaradt. (Egy fordulóban mindegyik csapat egy mérkőzést játszik, ha nincs elmaradó meccs.)



a) **Add meg annak a 4 csapatnak a betűjelét, amelyek közül bármely 2 már lejátszotta az egymás közötti mérkőzését!**

b) **Melyik csapat az, amelyiknek nem maradt még el mérkőzése?**

c) **Hány mérkőzés maradt el az első 6 fordulóban?**

d) **Mennyi mérkőzést fognak még játszani a bajnokságban?**

101.(K) Az iskolában futballbajnokságot hirdettek. Tavasszal a csapatok egyfordulós körmérkőzést játszottak. (Minden csapat minden csapattal egyszer játszott.)

a) **Hány csapat nevezett a bajnokságra, ha az összes mérkőzés száma hárommal nagyobb volt a résztvevő csapatok számának a kétszeresénél?**

b) **Az őszi fordulóban ugyanezek a csapatok vettek részt, de a bajnokság a rossz idő miatt félbeszakadt. Lehetséges – e, hogy az egyes csapatok által addig lejátszott mérkőzések számának az összege 11?**

c) **Legfeljebb hány mérkőzést tartottak meg az ősszel, ha volt olyan csapat, amelyik még egyszer sem játszott?**

102. (K) Tíz csapat körmérkőzéses bajnokságban vesz részt. 11 mérkőzést már lejátszottak. Igazold, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább háromszor játszott!

103. (K) Tizenöt csapat körmérkőzéses bajnokságban vesz részt. 50 mérkőzést már lejátszottak. Igazold, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább hétszer játszott!

104. (K) Egy bajnokságban 8 csapat játszik körmérkőzést, eddig 9 meccs zajlott le. Bizonyítsd be, hogy van olyan csapat, amely legalább háromszor játszott már!

105. (K) Egy iskolai sakkversenyre 12 tanuló nevezett be. Eddig már legalább 26 partit lejátszottak. Igazold, hogy van olyan sakkozó, aki legalább 5 játszmán van túl!

106. (K) Egy körmérkőzéses bajnokságban 16 csapat vesz részt. A bajnokságban 35 meccset már lejátszottak. Igazold, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább 5 mérkőzést lejátszott!

107. (E) Egy 18 résztvevős bajnokságban eddig 8 fordulót rendeztek: mindegyik csapat 8 másikkal játszott. Igazold, hogy van 3 olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzés sem volt!

108. (E) Egy 16 főből álló cserkészcsapat 21 napig táborozott. Minden délután $4-4$ cserkész sakk – körmérkőzést vívott. Bizonyítsd be, hogy voltak olyanok, akik legalább kétszer mérkőztek meg egymással!

109. (E) Bizonyítsd be, hogy egy 6 tagú társaságnak mindig van vagy 3 olyan tagja, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy 3 olyan tagja, akik kölcsönösen nem ismerik egymást! Teljesül – e ez 5 tagú társaság esetén is? Igaz – e az állítás egy n tagú társaságra, ahol $n \geq 6$?

110. (E) Egy 6 fős klubban mindenki ismer mindenkit. A viszony közöttük kétféle lehet: ellenséges, vagy baráti, továbbá a viszony mindig szimmetrikus (azaz, ha én baráti viszonyban vagyok valakivel, akkor ő is baráti viszonyban van velem). Mutasd meg, hogy van a klubban vagy 3 olyan ember, akik páronként barátok, vagy 3 olyan ember, akik páronként ellenséges viszonyban vannak egymással!

111. (E) Egy asztalitenisz – versenyen a főtáblára kerülésért a versenyzőket 5 darab 6 - os csoportba osztották be, ahol egy – egy csoporton belül a versenyzők körmérkőzést játszanak. Bizonyítsd be, hogy a verseny bármelyik pillanatában egy csoporton belül vagy van 3 olyan versenyző, akik az egymás elleni mérkőzésüket már mind lejátszották, vagy van 3 olyan versenyző, akik közül még semelyik 2 sem játszott egymással!

112. (K) Egy iskola sakkbajnokságán 15 fő vesz részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszik. Összesen hány játszmát játszanak le a sakkozók a bajnokság végéig?

Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A: Van olyan időpillanat a bajnokság során, amikor mindenki pontosan három játszmán van túl.

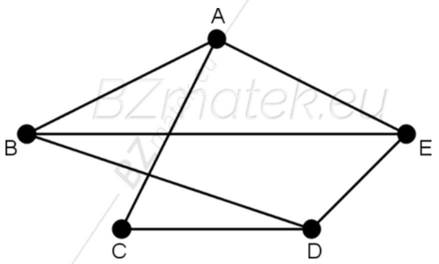
B: A mérkőzés bármely időpillanatában van két olyan sakkozó, aki azonos számú játszmát játszott.

113. (K) Egy társaságban van 6 fiú és néhány lány. Minden fiú pontosan 2 lányt ismer, és minden lány pontosan 3 fiút. (Az ismeretség kölcsönös.) Hány lány van a társaságban?

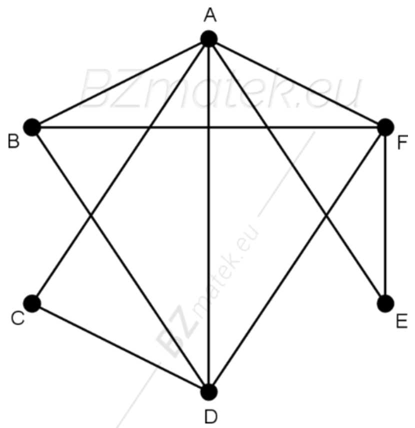
114. (K) Szemléltesd gráffal a következő kapcsolatot!
Tekintsük a természetes számokat 2 – től 7 – ig. Két szám akkor van kapcsolatban, ha nem relatív prímek, vagyis a két szám legnagyobb közös osztója nem 1.

115. (K) Sorszámozd be egy szabályos hétszög csúcsait 1 – től 7 – ig. Kösd össze élekkel a páratlan sorszámú csúcsokat, majd ugyanígy a páros sorszámúakat, végül a hárommal osztható sorszámúakat. Írd le a legrövidebb útvonalat a csúcsok sorszámaival, amelyen keresztül a 2 – es sorszámú csúcsból a 3 – as sorszámúba, illetve az 5 – ös csúcsból a 4 - esbe juthatunk!

116. (K) Az alábbi ábrán egy sakkverseny 5 versenyzője között már lejátszott mérkőzéseket láthatjuk. A versenyzők nevei: Anita, Boldizsár, Cecília, Dénes, Elemér. Sorold fel a még hátralevő mérkőzéseket, ha minden játékos minden játékossal pontosan egy mérkőzést játszik!



117. (K) Az alábbi ábrán a Debreceni Egyetem egy kispályás labdarúgótornájának hat csapata által már lejátszott mérkőzéseket látjuk. Sorold fel a még hátralevő mérkőzéseket, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik!

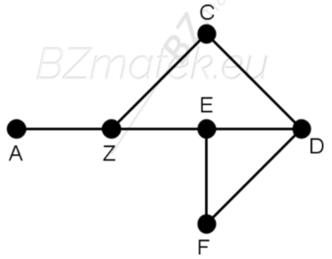


118. (K) Zoli színházlátogatást szervez a barátaival. Egy kávézóban találkoznak, s az alábbi ábra azt mutatja, hogy a megjelentek közül ki kit ismer.

a) **Akik nem ismerik egymást, azok a kávézóban kézfogással bemutatkoznak egymásnak. Hány kézfogásra kerül sor?**

b) **Le tudnak – e ülni a kávézóban egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki mellett egy – egy régi ismerőse ül?**

c) **Ha a színházban, egy sorban véletlenszerűen leülnek, mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy Zoli két lány között ül majd?**



119. (K) Balázs tudja Anna és Dia telefonszámát, Eszter Csabáét. Dia is beszélt már telefonon Csabával. Ábrázold gráffal, hogy ki kinek a telefonszámát ismeri! (Az ismeretség kölcsönös.) Minimum hány hívás szükséges, hogy Anna beszélhessen telefonon Eszterrel?

120. (K) Aladár és Betti ismerik egymást, Betti ismeri Gábort is. Karcsi mindhármukat ismeri. Ábrázold gráffal az ismeretségeket! (Az ismeretség kölcsönös.)

121. (K) Egy konferencia 5 résztvevője: A, B, C, D, illetve E. Tudjuk, hogy E ismer mindenkit az asztalnál. D nem ismeri A – t, de a többieket ismeri. C két résztvevőt ismer, B pedig hármat. Ábrázold a társaság tagjai közötti ismeretségeket egy gráffal, és add meg, hogy kiket ismer az asztalnál az A – val jelölt személy! (Minden ismeretség kölcsönös.)

122. (K) Egy család kirándulni megy. Az anya szendvicseket készít: kettőt – kettőt saját magának és a férjének; hármat a fiának és egyet a lányának. Szemléltesd irányításnélküli gráffal a szendvicskészítést, ha a pontok a család tagjait jelölik; minden él pedig egy, az adott személynek készült szendvicset!

123. (K) András, Béla, Csaba, Dénes és Elek a kollégiumban egy szobába kerülnek. Béla ismerte mind a négy társát, a többiek viszont mindannyian három embert ismertek a négy szobatárs közül. Csaba nem ismerte Dénest. Rajzolj egy gráfot, amely az 5 diák egymás közötti korábbi ismeretségét szemlélteti!

124. (K) Egy titkosszolgálat ügynöke éppen akciót vezet. A Q ügynök látja a célszemélyt és kollégáit: R – t és S – t. Kollégái is látják őt és egymást, de nem látják a célszemélyt. Ekkor feltűnik a téren a célszemély mellett a személyi testőre, aki régebben szintén tagja volt a titkosszolgálatnak. Észreveszi a tömegben Q - t és R – t, majd kimenti a célszemélyt. Ekkor Q ezt látva lefújja az akciót. Ábrázold gráffal, ki kit látott a meghiúsult akcióban! (A célszemély végig a testőrét figyeli.)

125. (K) Attila, Bence, Csaba, Dániel, Elek és Ferenc egy előadáson ugyanahhoz az asztalhoz kerülnek. Attila már ismerte korábbról Bencét, Csabát és Ferencet. Bence osztálytársa Eleknek, aki egy másik előadáson már megismerte Dánielt. Ferenc és Csaba szintén találkozott már egymással régebben. Hány szobatársával nem találkozott még eddig Ferenc?

126. (K) Egy iskolai sakkbajnokság döntőjébe hatan jutottak be: Aladár, Béla, Csaba, Dénes, Ferenc és Emil. Délután két óráig a következő mérkőzéseket már lejátszották: Aladár – Béla, Dénes – Csaba, Emil – Ferenc, Aladár – Dénes, Csaba – Emil. Szemléltesd ezt az állapotot gráf segítségével! A mérkőzések hányad részét játszották már le, ha a döntőben mindenki játszik mindenkivel?

127. (K) Egy 7 agú társaságban (kölcsönös) barátságok vannak: Andrásnak 3; Bélának 2; Csabának 5; Daninak 1; Ervinnek 4; Ferinek 5; Gábornak szintén 4 barátja van.

a) **Rajzolj olyan gráfot, amely a társaság barátságait ábrázolja!**

b) **Az összes lehetséges barátságnak hány százaléka valósul a csoportban?**

128. (K) Egy 6 fős klubba a klubalapító András hívott meg mindenkit. Rajta kívül János ismeri még Csillát és Edinát, Csilla pedig Zolit és Gábort.

a) **Ábrázold gráffal a fenti ismeretségeket!**

b) **Időközben kiderült, hogy két klubtag eltitkolt egy ismeretséget, és egyedül Edinának van a klubban a legkevesebb ismerőse. Kik titkolóztak eddig?**

129. (K) Egy teniszkupán a következő hat ember vett részt: Anna, Géza, Jenő, Károly, Márton és Réka. A első napon a következő mérkőzéseket tartották meg: $A-R, R-J, M-K, A-J, M-G, M-J$.

a) **Ezen versenynap végén le tudnak – e ülni a versenyzők egymás mellé úgy, hogy bármely két szomszédos ember mérkőzése már lezajlott?**

b) **A versenynap estéjén néhányan moziban voltak, olyanok, akik között egyetlen mérkőzés sem volt még. Legfeljebb hányan lehettek?**

c) **Hány mérkőzés van még a versenyből hátra, ha mindenki mindenkivel egyszer játszik?**

130. (K) Egy iskola sakkbajnokságán András, Béla, Csaba, Dénes és Elemér egyfordulós körmérkőzéses rendszerben játszik egymással. András már játszott Csabával és Bélával. Béla játszott Elemérrel és Elemér játszott Dénessel.

a) **Szemléltesd gráfon a feladatnak megfelelő állapotot!**

b) **Hány játszmát kell még játszaniuk?**

c) **Hány pontot gyűjthet még András, ha a győzelemért 1, a döntetlenért $0,5$ és a vereségért 0 pont jár? (Add meg az összes lehetőséget!)**

131. (K) Az iskolai futball döntőjébe 6 csapat került: a $10.F$, a $11.E$, a $11.F$, a $12.A$, a $12.C$ és a $12.H$ osztályok csapatai. A versenykiírás szerint bármely két csapatnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig a $10.F$ már játszott a $11.E$ – vel, a $12.A$ – val és a $12.H$ – val. A $11.E$ játszott már a $12.C$ – vel is. A $11.F$ csak a $12.C$ – vel játszott, a $12.A$ pedig a $10.F$ – en kívül csak a $12.H$ – val mérkőzött meg. A $12.C$ és a $12.H$ egyaránt két mérkőzésen van túl.

a) **Szemléltesd gráffal a lejátszott mérkőzéseket! Hány mérkőzés van még hátra?**

b) **Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 6 csapat közül a $12.H$ első három hely valamelyikén végez, ha nincs holtverseny? (Minden lehetséges sorrendet egyformán valószínűnek tételezünk fel.)**

132. (K) A focibajnokság rájátszásában 4 csapat szerepel: $F; G; K; L$. Mindenki mindenkivel játszik egyszer, de még nem játszottak le minden meccset. Az F csapat legyőzte a K - t, viszont kikapott a G - től, és emellett játszott egy döntetlent. Több döntetlen eddig nem volt. A K és a G csapatnak is ugyanannyi győzelme van, mint veresége. A K utolsó meccséről kitiltották a közönséget. Az L csapat utolsó meccsén eldől majd a bajnokság sorsa, sikerült jegyet szereznünk rá, de ki lesz az L csapat ellenfele?

133. (K) Hat pingpongozó körmérkőzést játszik. Egy versenyző már 3 mérkőzést játszott és ő szerzett eddig legtöbb pontot, egy versenyző még csak 1 mérkőzésen van túl, amelyen veszített. A többiek $2-2$ mérkőzést játszottak és egyformán állnak.

a) **Ki hányszor győzött és hányszor veszített eddig?**

b) **Hány mérkőzés van még hátra?**

134. (K) Egy kutyakiképző tréningen a bernáthegyi összebarátkozott a csaucsauval. Az agár, a bulldog és a tacskó már előző héten találkoztak. Most éppen a bernáthegyi ismerkedik a bulldoggal és az agárral. Ábrázold gráffal, hogy melyik kutyafajták ismerik egymást a telepen, ha a dobermannt külön képzik ki egy elkerített részen!

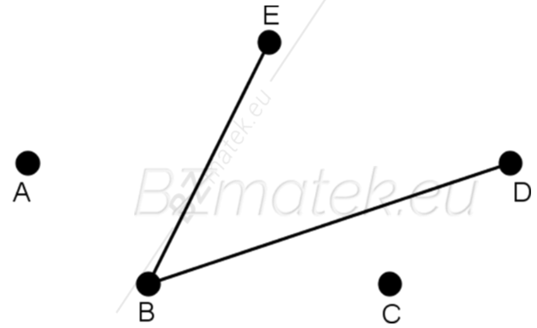
135. (K) Egy légitársaság alkalmazottja feljegyezte a Budapest, London, Párizs, Amszterdam és München közötti repülőjáratokat. Rajzold le a városok közötti repülőjáratokat, ha következők a feltételek!

a) **Budapestről 3, Londonból 1, a többi városból $2-2$ járat indul.**

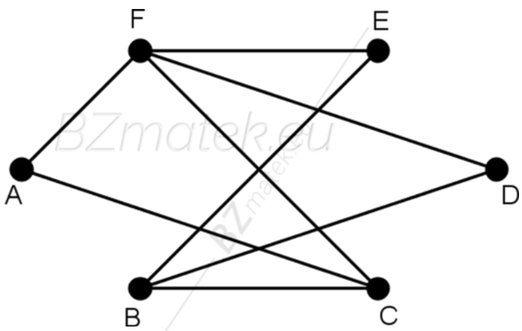
b) **Budapestről 4, Londonból 2, a többi városból $3-3$ járat indul.**

c) **Budapestről, Londonból és Párizsból $4-4$, a többi városból $2-2$ járat indul.**

136. (K) Az alábbi ábrán 5 település között úgy kell 4 szakaszból álló úthálózatot építeni, hogy minden településből el lehessen jutni bármelyik másikba és legyen olyan település, amelyből három út vezet ki. Szemléltesd gráffal az úthálózatot!



137. (K) Az alábbi ábra 6 nagyváros (A, B, C, D, E és F) közötti buszjáratokat mutatja. Ha két város vonallal van összekötve, akkor a két város közt közvetlen (átszállás nélküli) buszjárt közlekedik. Eljuthatunk – e az A városból a B városba átszállás nélkül? Eljuthatunk – e 1, illetve 3 átszállással?



138. (K) Egy telefonhálózatban 6 központ mindegyike legalább 3 másikkal van közvetlen kapcsolatban. Létesíthető – e ekkor bármely 2 központ között kapcsolat közvetlenül vagy más központokon keresztül? Mi a helyzet akkor, ha a „3 másikat” 2 – re csökkentjük?

139. (K) Tervezz 5 barát számára telefonos üzenettovábbító rendszert úgy, hogy ha bármelyikük kap egy üzenetet, az a többiekhez is eljusson! A rendszer tegyen eleget a következő két feltételnek: (1) a lehető legkevesebb telefonhívással jusson el az üzenet a többiekhez; (2) senki se kapja meg kétszer ugyanazt az üzenetet.

140. (K) Egy megye 6 faluja között úgy építették az utakat, hogy mindegyik faluból mindegyik faluba vezet közvetlen út. Télen egy nagy havazás után az összes út járhatatlanná vált. Legkevesebb hány útszakaszt (két falut összekötő közvetlen út) kell letakarítani ahhoz, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba el lehessen jutni?

141. (K) Egy kis térségben az A városból építettek utat C - be és D - be, B - ből pedig E - be. Az egyetlen helység, ahol még nem építkeztek: F. Mennyi utat kell még építeni, hogy minden helységből minden helységbe pontosan egy úton lehessen eljutni? Adj meg két különböző lehetséges megvalósítást! (A térséget csak az említett helységek alkotják.)

142. (K) Tizenkét fiú levelez. Mindegyik fiú legalább két másikkal tartja a kapcsolatot. Valamelyikük elküld egy hírt az egyik ismerősének. Az is elküldi egy ismerősének, de nem annak, akitől kapta. Más forrásból a fiúk nem jutnak a hírhez.

a) **Biztosan eljut - e a hír mindenkihez, mielőtt visszajut egy olyan fiúhoz, aki már tudta azt?**

b) **Igaz - e, hogy a hír biztosan visszajut egy olyan fiúhoz, aki már tudta azt?**

c) **Legkevesebb hány fiúhoz jut el a hír?**

143. (K) Négy számítógépet úgy szeretnénk 4 kábellel hálózatba kötni úgy, hogy ha valamelyik két gép közötti kapcsolat sérülne, a rendszer akkor is maradjon működőképes, azaz az információk bármelyik gépről bármelyikre eljuthassanak. Mutass rá egy ábrával, hogy a feladat megoldható!

144. (K) Rendszerépítő munkásoknak 25 gépet kellene összefüggő hálózatba kötniük, ehhez a leltár szerint 23 kábelük van. Meg tudják – e valósítani a tervet?

145. (K) Egy számítógépes hálózat 4 gépből fog állni. Három kábel áll rendelkezésre az összekötéshez, szeretnénk, ha a rendszer összefüggő lenne, azaz bármelyik két gép között lehetséges legyen (esetleg egy vagy több köztes gépet beiktatva) a kommunikáció. Adott kábelezés estén két számítógép távolsága alatt azt a legkisebb természetes számot értjük, ahány kábelen át kell haladnia az információnak, míg elér az egyik géptől a másikig. Keress olyan kábelezést, amikor minimális lesz a gépek közötti távolságok átlaga (a 6 lehetséges géppárra)!

146. (K) Nyolc telefonközpont közötti kapcsolatrendszerről a következőket tudjuk:

1. **Bármely két központ között létesíthető kapcsolat.**
2. **Bármelyik két különböző vonal tönkremenése esetén is még összefüggő a maradék rendszer, de bármely három esetén ez a feltétel már nem teljesül.**
3. **A három legnagyobb központ egymást közvetlenül is el tudja érni.**

Rajzolj a feltételeket megvalósító hálózati gráfot minél kevesebb éllel!

147. **(K) Egy turista bejárta egy város 6 utcáját úgy, hogy mindegyiken pontosan kétszer ment végig, de úgy nem tudta bejárni őket, hogy mindegyiken csak egyszer menjen végig. Lehetséges volt – e ez akkor, ha az utcák között lehet zsákutca is?**

148. **(K) Rendeljünk hozzá az egyes sakkfigurákhoz egy – egy gráfot a következő szabály szerint: legyenek a sakktábla mezői a gráf csúcsai, s ebben a 64 pontú gráfban két pont közötti él azt jelenti, hogy az adott figura az egyik mezőről átléphet a másikra (az iránytól eltekintve). Mennyi a G8, illetve a D4 mezőhöz tartozó pont fokszáma, ha egy huszár áll a mezőn, és csak L alakban léphet? (Tételezzük fel, hogy a többi mező üres.)**

149. **(K) Rendeljünk hozzá az egyes sakkfigurákhoz egy – egy gráfot a következő szabály szerint: legyenek a sakktábla mezői a gráf csúcsai, s ebben a 64 pontú gráfban két pont közötti él azt jelenti, hogy az adott figura az egyik mezőről átléphet a másikra (az iránytól eltekintve). Van – e olyan figura, amire az összes pont fokszáma ugyanannyi? (A táblán más figura nem áll.)**

150. **(E) Egy iskolai kirándulás 28 résztvevőjét megkérdezték, hogy hány osztálytársa van a kirándulás résztvevői között. Az első 15 válasz a következő volt: 8 - an mondtak 5 - öt, 2 - en mondtak 4 - et és 5 - en mondtak 3 - at. Mi lehetett a hiányzó 13 válasz, ha tudjuk, hogy mindenkinek volt osztálytársa a kiránduláson?**

151. **(E) Egy kiránduláson 35 gyerek vett részt. Mindenkitől megkérdeztem, hogy hány osztálytársa van a jelenlévők között. Elárulom az első 22 választ: 8 – an mondtak 6 - ot, 7 – en mondtak 4 – et, 5 – en mondtak 3 – at, 2 – n pedig 2 – t. Mi lehet a hiányzó 13 válasz?**

152. **(E) Egy 25 főt foglalkoztató kisválallkozásnak különböző nemzetiségű dolgozói vannak. Az új cégvezető megkérdezett néhány főt, hogy hány azonos nemzetiségű munkatársa dolgozik a cégnél. A válaszok a következők voltak: 5 fő mondott 6 – ot, 12 fő mondott 4 – et, 1 fő mondott 2 – t.**

a) **Hány különböző nemzet tagjai vesznek részt dolgozóként a kisvállalkozásban?**

b) **Ha megkérdezte volna a többi dolgozót is, milyen válaszokat hallott volna az új cégvezető?**

153. (E) Egy ökölvívó edzésen 4 egymást követő súlycsoport összesen 6 versenyzője készül a bajnokságra. Mind a 6 versenyző megmérkőzik minden olyan klubtársával, aki legfeljebb egy súlycsoportban tér el az ő súlycsoportjától. Hányan tartoznak az egyes súlycsoportokba, ha összesen 7 edzőmérkőzést kell vívniuk?

154. (E) Hat fiú közül pontosan kettő almát lopott, s a vallomások a következők:

Hugó: Csaba és Gábor a tettes. **János: Dénes és Tamás a bűnös.**

Dénes: Tamás és Csaba tette. **Gábor: Hugó és Csaba a tolvaj.**

Csaba: Dénes és János követték el.

A vallomások közül négyben az egyik bűnöst helyesen, a másikat helytelenül nevezték meg. Az ötödik (sorrendben nem feltétlenül ötödik) vallomásban megnevezettek mindketten ártatlanok. Kik lopták el az almákat?

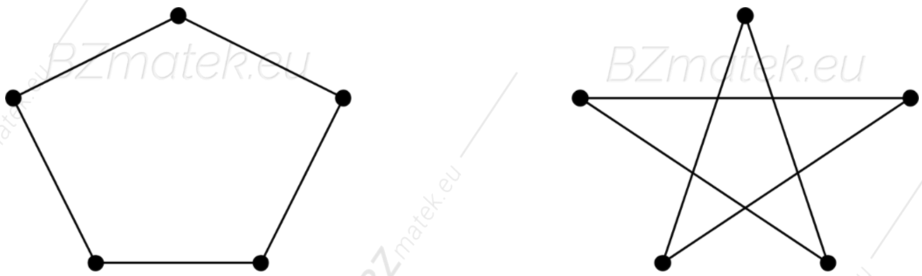
155. (E) Tudjuk, hogy egy társaságban mindenkinek legalább két ismerőse van. Bizonyítsd be, hogy ekkor a társaságnak legalább három tagját le lehet ültetni egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a mellette ülőket! (Az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük.)

156. (E) Levelezést folytat egymással 17 tudós. Összesen három témáról leveleznek, és bármelyik kettőt megkérdezzük, azok leveleznek egymással, de mindig ugyanarról az egy témáról. Mutasd meg, hogy biztosan van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármely kettő ugyanarról a témáról levelez egymással!

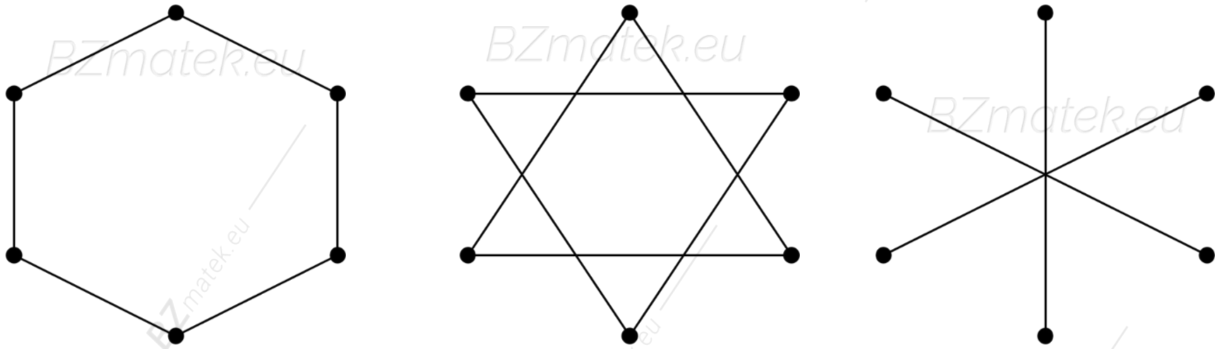
157. (E) Egy országban 7 repülőút köti össze a fővárost a többi várossal. Az összes többi városból pontosan 4 repülőútvonal indul, kivéve a legkisebb városát, ahonnan csak egy út indult. Mutasd meg, hogy ebből a városból (esetleg más városokat érintve) eljuthatunk a fővárosba repülővel!

158. (E) Harminckét település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsd be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településről bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával!

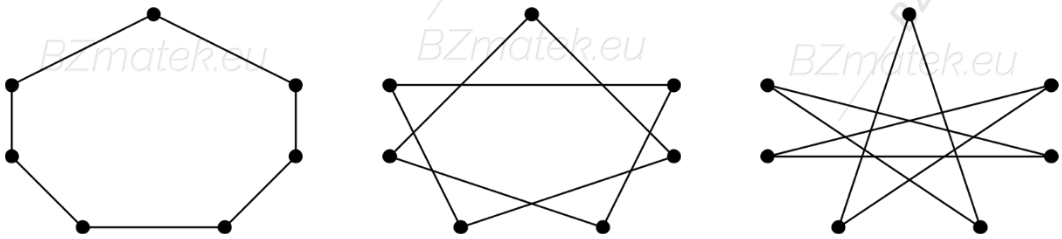
159. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?



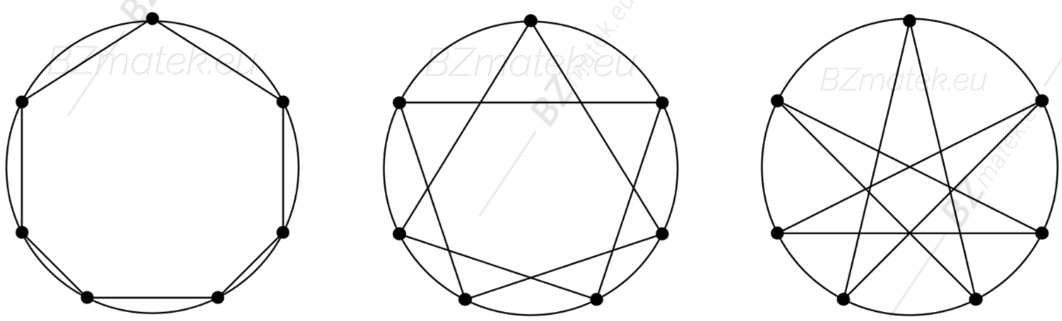
160. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?



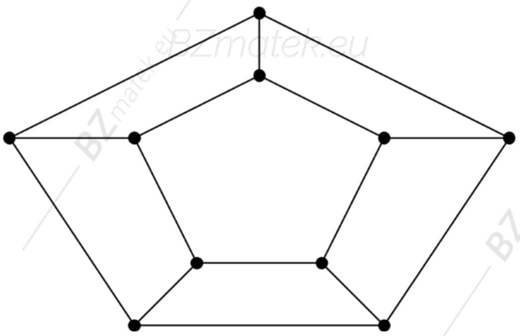
161. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?

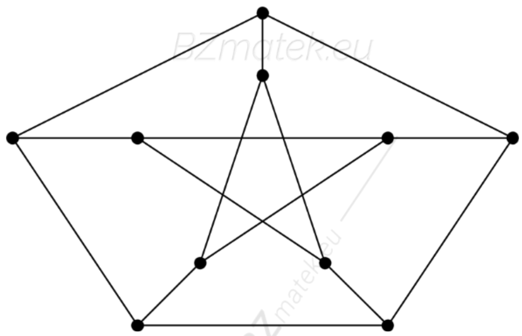


162. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?

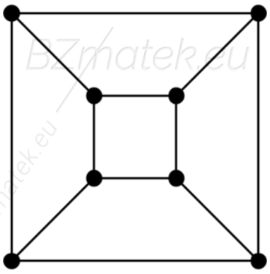


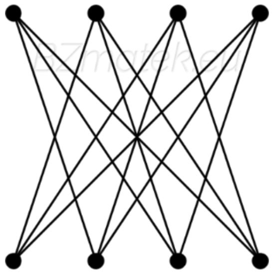
163. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?



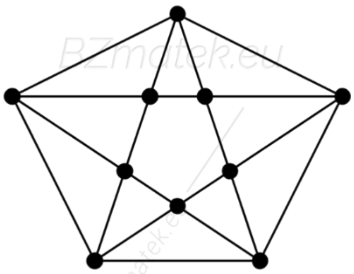


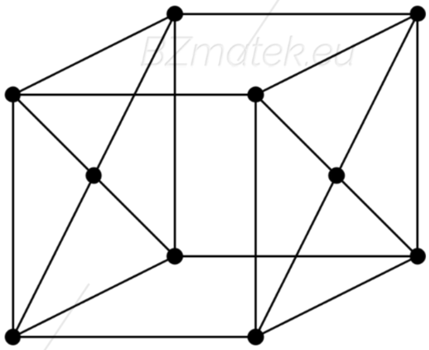
164. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?



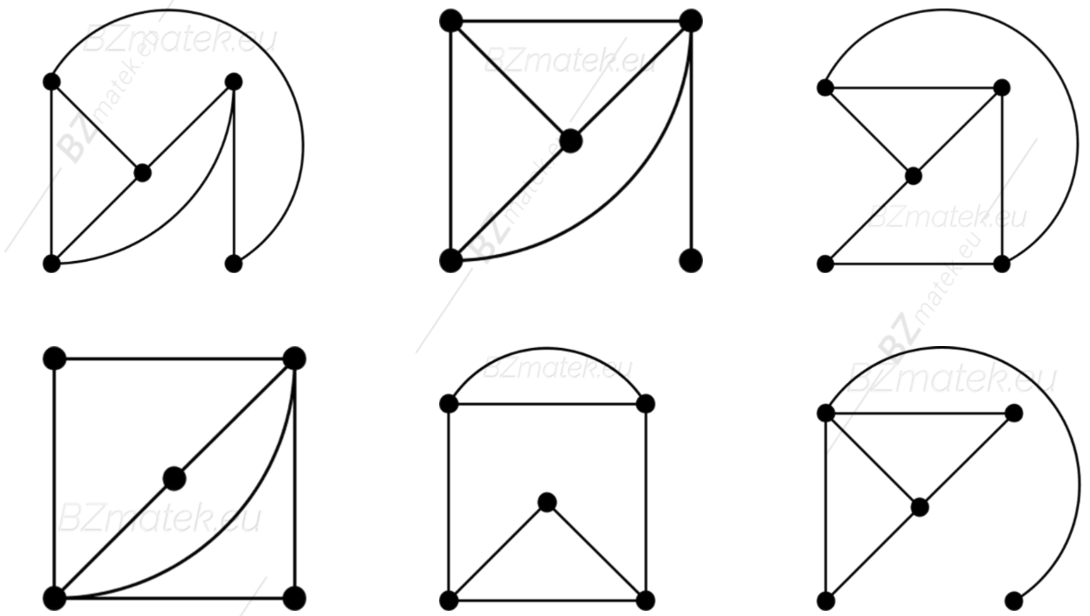


165. (K) Izomorfak – e a következő gráfok?

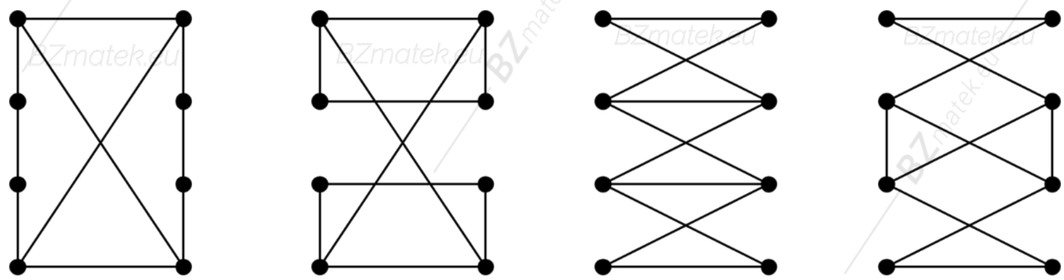




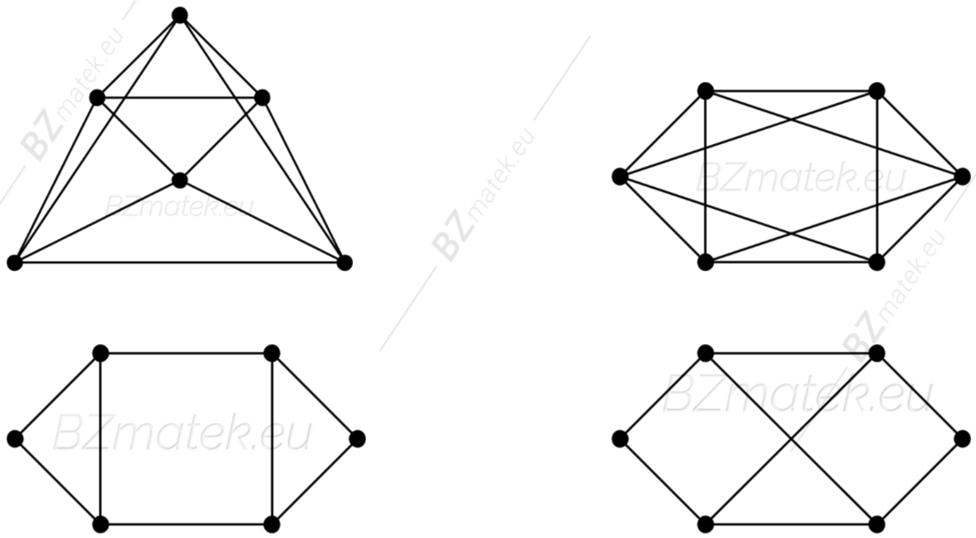
166. (K) Vannak – e az alábbi gráfok között izomorfak?



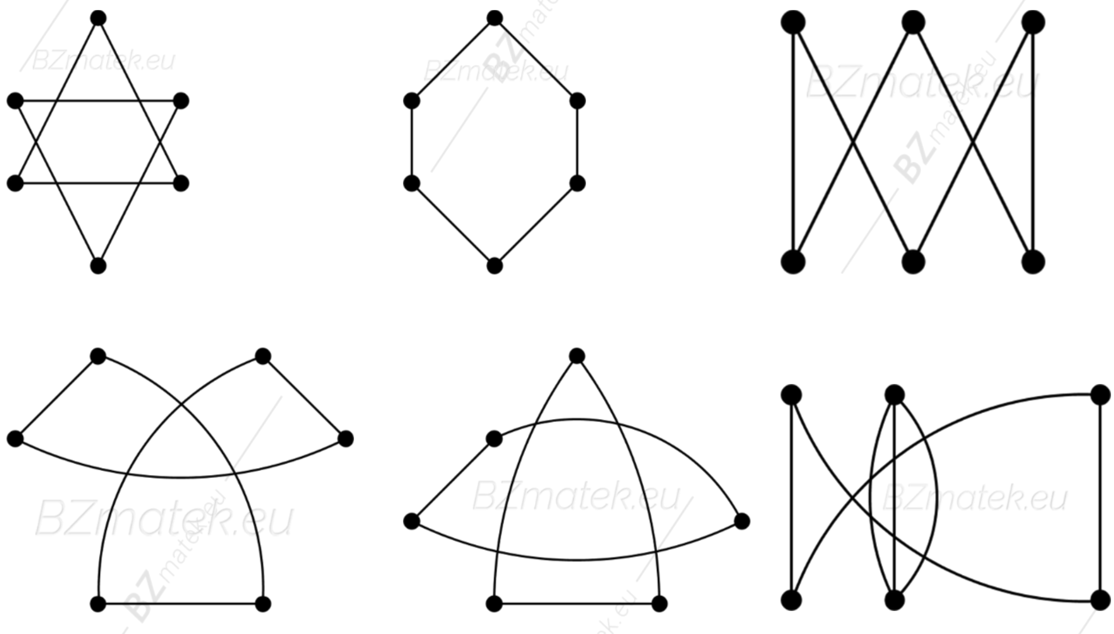
167. (K) Vannak – e izomorfak a következő gráfok között?



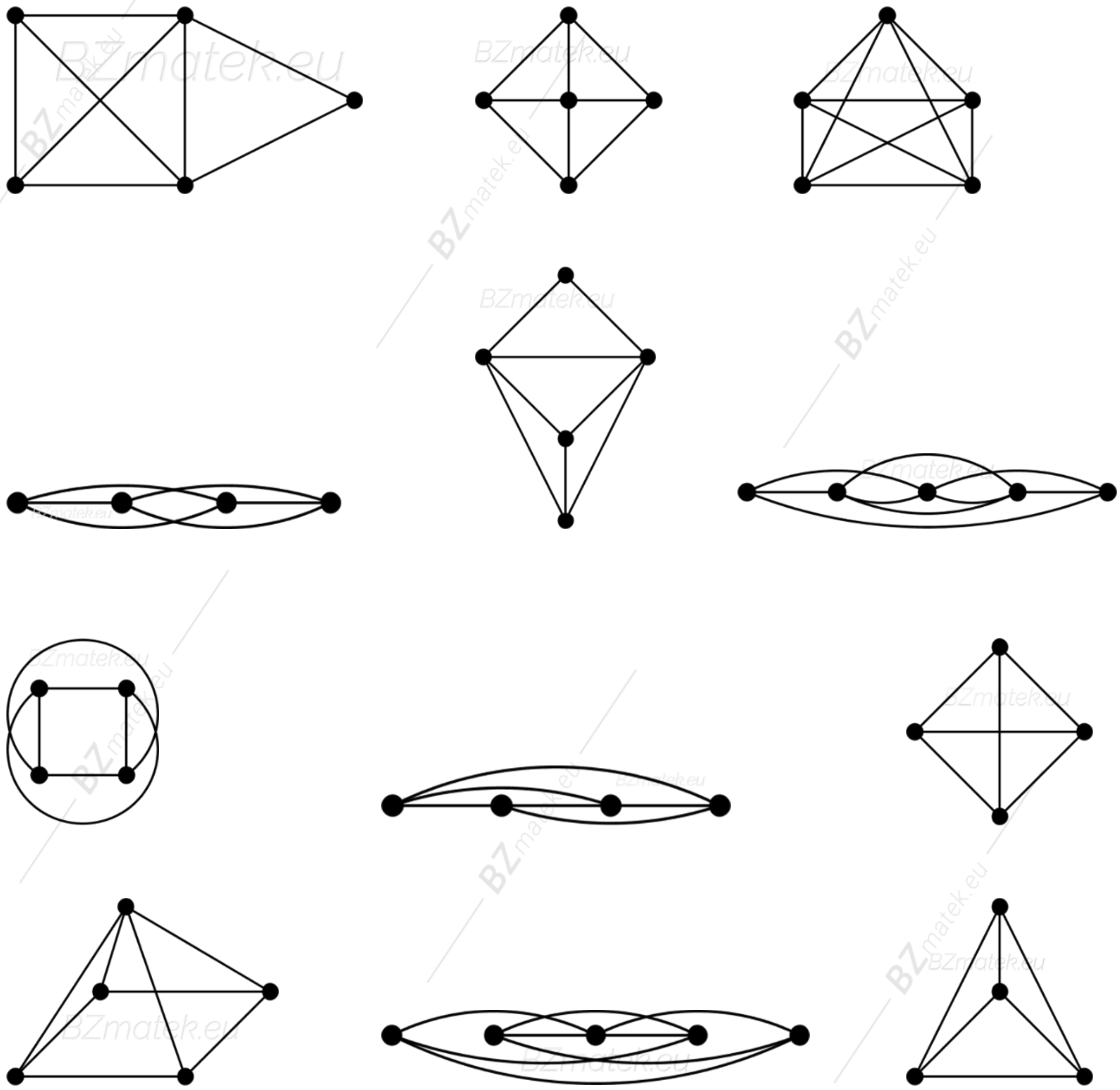
168. (K) Melyik gráfok izomorfak az alábbiak közül egymással?



169. (K) A következő 6 csúcsú gráfokban minden csúcs fokszáma 2. Keresd meg közülük az izomorfokat! Legkevesebb hány élt kell behúznunk az egyes gráfokban ahhoz, hogy mind a 6 izomorffá váljék?



170. (K) Melyek izomorfak egymással az alábbi gráfok közül?



171. (K) Ábrázold az összes lehetséges 7 pontú gráfot, amelyben a fokszámok a következők: 1; 1; 1; 1; 2; 3; 3!

172. (K) Egy 5 csúcsú egyszerű gráfnak 3 éle van. Rajzold le az összes esetet! Igaz – e, hogy az 5 csúcsú 7 élű egyszerű gráfokból ugyanennyi van?

173. (K) Rajzolj két nem izomorf 5 pontú, összefüggő gráfot, amelyekben 1 darab másodfokú, 3 darab harmadfokú és 1 darab elsőfokú pont van!

174. (K) Hány olyan lényegesen különböző, 4 csúcsú, 3 élű egyszerű gráf van?

175. (K) Hány olyan 6 pontú egyszerű gráf van, melyben a pontok fokszáma legalább 2?

176. (E) Adott az A, B, C pontok a síkon. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a három pontból:

a) **ha sem a pontokat, sem az éleket nem különböztetjük meg;**

b) **ha az AB, BC és AC éleket megkülönböztetjük?**

177. (E) Adott az A, B, C, D pontok a síkon. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a négy pontból:

a) **ha sem a pontokat, sem az éleket nem különböztetjük meg;**

b) **ha két élt különbözőnek tekintünk, amikor legalább az egyik végpontjuk más?**

178. (E) Tekintsünk n megkülönböztetett pontot. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a pontokból? (Két élt különbözőnek tekintünk, ha legalább egyik végpontjuk más.)

179. (E) Három élből szeretnénk egyszerű gráfot készíteni. Legalább hány pontú legyen a gráf, ha ebben a gráfban a lehető legtöbb különböző három élű egyszerű gráfot akarjuk előállítani? (A csúcsokat és az éleket nem különböztetjük meg.) Általánosítsd a kérdést n élre! Ekkor mit mondhatunk?

180. (K) Igaz – e, hogy bármely két olyan 8 pontú gráf izomorf, amelyeknek minden csúcsa harmadfokú?

181. (E) Egy arborétumban 5 úttal kötötték össze az üvegházakat. Ez a lehető legkevesebb út úgy, hogy bármely háztól bármelyikhez el lehessen jutni, akár más üvegházak érintésével.

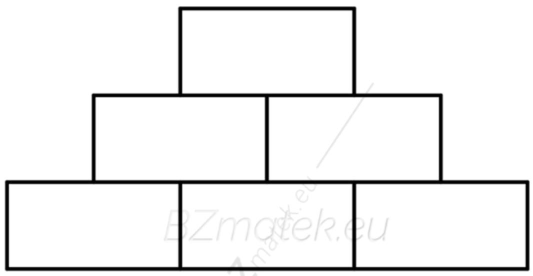
a) **Hány üvegház van az arborétumban?**

b) **Rajzolj lehetséges térképeket az úthálózatról. Hány lényegében különböző (nem izomorf) úthálózat lehetséges?**

182. (E) Egy 5 település közötti úthálózatban bárhonnan bárhová pontosan kétféleképpen lehet eljutni. Rajzolj fel egy szituációt! Hány lehetőség van?

183. (E) Adott 5 falu, jelöljük őket A, B, C, D, E – vel, amelyek között nincs három vagy több egy egyenesen. A falvak között 4 egyenes szakaszból álló utat akarnak építeni úgy, hogy mindegyik faluból mindegyik faluba el lehessen jutni (nem feltétlenül közvetlen úton, esetleg több útszakaszt bejárva). Az utak keresztezhetik egymást, ám ekkor felüljárót építenek, így útközben nem lehet áttérni egy másik útra. Bizonyítsd be, hogy összesen 125 ilyen hálózat készíthető!

184. (E) A kőműves az ábrán láthatóhoz hasonlóan épít falat. Ezt ábrázoljuk gráffal úgy, hogy a pontok a téglák, az élek pedig mutatják, melyik tégla melyikre támaszkodik. Hány éle van a gráfnak, ha az alsó sorban n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ darab tégla található?



185. (K) Egy gyereknek 3 feladata van. Ábrázold irányított gráffal, hogyan szervezheti a teendőit egymás után! Hányféle beosztás létezik?

186. (K) Egy társaságban két ember beszélget.

A: Megfigyeltem, hogy a társaságban azoknak éppen páros a száma, akiknek páratlan számú ismerőük van itt.

B: Én meg azt vettem észre, hogy azoknak a száma páratlan, akiknek páros számú ismerősük van itt.

A két állítás közül melyik érvényes bármely társaságra?

A másik állítás milyen számú társaságokra igaz?

187. (K) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis az állítás!

A: Van olyan 6 csúcsú egyszerű gráf, ahol az éleinek száma megegyezik a komplementer gráf éleinek számával.

B: Egy 4 csúcsú összefüggő gráfnak legalább 4 éle van.

C: Van olyan egyszerű gráf, aminek 7 csúcsa van és mindegyik fokszáma 5.

D: Ha egy 7 csúcsú egyszerű gráfnak páratlan darab éle van, akkor komplementerének is páratlan darab éle van.

E: Ha egy teljes gráfnak páros darab éle van, akkor csúcsainak száma is páros.

F: Van olyan 5 pontú egyszerű gráf, ahol a fokszámok összege 22.

G: Van olyan 6 pontú egyszerű gráf, aminek 16 éle van.

H: Ha egy 9 pontú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7, akkor van 8 is.

I: Ha egy 6 pontú egyszerű gráfnak 10 éle van, akkor összefüggő.

J: Ha egy gráf összefüggő, akkor van olyan él, amelyet elhagyva összefüggő marad.

188. (K) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis az állítás!

A: Ha egy teljes gráfnak páratlan számú éle van, akkor a csúcsai száma is páratlan.

B: Ha egy gráf pontjainak száma páratlan, akkor a fokszámok összege is páratlan.

C: Létezik olyan 5 fős társaság, amelyben az ismeretségi számok $2; 2; 2; 3; 3$.

D: Létezik olyan 4 csúcsú gráf, amelyben az egyes csúcsok fokszáma $0; 2; 3; 5$.

E: Nincs olyan 6 pontú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok $0; 2; 2; 3; 4; 5$.

F: Egy 5 pontú egyszerű, teljes gráf éleinek száma 20.

G: Egy 5 csúcsú, összefüggő gráfnak legalább 4 éle van.

H: Van olyan gráf, amelynek a fokszámai rendre: $1; 2; 2; 2; 3; 3$.

I: Ha egy egyszerű gráfban minden fokszám legalább 2, akkor a gráf összefüggő.

J: Egy adott gráf, illetve a komplementer gráfja közül legalább az egyik összefüggő.

189. (K) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis az állítás!

A: Bármely gráfban a fokszámok összege egyenlő az élek kétszeresével.

B: Bármely gráfban a fokszámok összege páros.

C: Ha egy n pontú egyszerű gráfban az élek száma $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.

D: Ha egy gráfban páratlan számú csúcs van, akkor a van páros fokú csúcsa.

E: Egy 5 csúcsú, egyszerű gráfnak nem lehet 11 éle.

F: Ha az n csúcsú összefüggő gráfnak n – nél kevesebb éle van, akkor van elsőfokú csúcsa.

G: A legalább két pontú gráfban van két azonos fokszámú pont.

H: A legalább két pontú egyszerű gráfban van két azonos fokszámú pont.

I: Ha egy egynél több pontból álló egyszerű gráfban nincs izolált pont és kevesebb él van, mint ahány pont, akkor a gráfnak van elsőfokú pontja.

J: Ha egy gráfban van izolált csúcs, akkor a gráf nem egyszerű.

190. (K) Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis az állítás!

A: Ha két egyszerű gráf izomorf, akkor komplementerük is az.

B: Ha két egyszerű gráf komplementere izomorf, akkor az eredeti gráfok is azok.

C: Ha két gráf izomorf, akkor megfelelő csúcsaik fokszáma páronként egyenlő.

D: Ha két gráfban a megfelelő csúcsok fokszáma páronként megegyezik, akkor a két gráf izomorf.

E: A gráf komplementerének a komplementere izomorf az eredeti gráffal.

F: Ha egy n pontú gráfban az élek száma $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.

G: A fokszámok egyértelműen meghatározzák a gráfot.

H: A fokszámok egyértelműen meghatározzák az egyszerű gráfot.

I: Egy 7 csúcsú irányított gráfban a kifokok összege egyenlő a befokok összegével.

J: Van olyan 4 csúcsú irányított gráf, ahol a befokok összege 2, a kifokok összege 4.

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 − 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(10) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(11) Gerőcs László; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(12) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(13) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(14) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(15) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(16) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(20) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(21) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(22) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(23) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(24) Saját anyagok