Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL: (Kézfogási tétel - fokszámtétel):
Egy véges gráfban a csúcsok fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

Bizonyítás:
Mivel minden él 2 csúcshoz tartozik, így a fokszámokat összeadva, az éleket kétszer számítjuk.

■

TÉTEL:
Bármely véges gráf páratlan fokú csúcsainak a száma páros.

Bizonyítás:
Mivel az élek száma természetes szám, így a fokszámok összege páros. Ezek alapján nem lehet a páratlan fokú csúcsok száma páratlan, mert akkor az összeg is páratlan lenne.

■

TÉTEL:
Bármely véges gráfban van két pont, amelynek a foka egyenlő.

Bizonyítás:
Indirekt tegyük, hogy az n csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma különböző: $0,1,\dots,n-1$. Mivel az $n-1$ fokszámú csúcsból minden más csúcsba vezet él, így nem lehet egyszerre $n-1$ és 0 fokszámú csúcs is a gráfban. Ekkor a gráf csúcsainak fokszámait tekintve $n-1$ darab lehetőség adódik, viszont n darab csúcsa van. Ellentmondás adódik, mert így biztosan lesz legalább 2 olyan csúcs, amelynek a fokszáma megegyezik.

■

TÉTEL:
Az n csúcsú teljes gráf éleinek száma: $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

Bizonyítás:

Első bizonyítás:
Bármely két csúcs között vezet pontosan egy él. Mivel egy csúcsból $n-1$ darab él fut ki, így n csúcs esetén a kifutó élek száma: $n\cdot(n-1)$. Ekkor azonban egy élt kétszer számoltunk, vagyis a gráf összes élének száma: $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

Második megközelítés:
Mivel n csúcsból kell kiválasztanunk 2 pontot úgy, hogy egyet csak egyszer jelölhetünk ki, s a sorrend nem számít, így ismétlés nélküli kombinációval számolunk: $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

■

TÉTEL:
Ha egy $2n$ pontú egyszerű gráf minden csúcs fokszáma legalább n, akkor a gráf összefüggő.

Bizonyítás:

Első bizonyítás:
Be kell látnunk, hogy a feltétel teljesülése esetén, a gráf bármelyik két csúcsa között vezet út. Tekintsük a gráf két tetszőleges csúcsát. Ha van közöttük él, akkor készen vagyunk, mert lesz közöttük út. Amennyiben nincsenek összekötve éllel, akkor azonban a két csúcs esetén külön – külön lennie kell n darab szomszédos (éllel összekötött) csúcsnak, vagyis van legalább egy közös szomszédos csúcsuk. Ekkor szintén készen vagyunk, mert a három csúcson át lesz út.

Második bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő, vagyis a gráf legalább két komponensre esik szét. A fokszámok miatt mindegyik komponensben legalább $n+1$ darab csúcsnak lennie kell. Ekkor azonban ellentmondás adódik, mert a gráfban így legalább $2n+2$ darab csúcs van. Ezek alapján nem teljesülhet a feltevésünk, vagyis az eredeti állítás igaz.

Harmadik bizonyítás:
Indirekt tegyük fel, hogy a gráf nem összefüggő, vagyis a gráf legalább két komponensre esik szét. A csúcsok száma miatt az egyik komponensben n darab vagy annál kevesebb csúcsnak kell lennie. Ekkor azonban ellentmondás adódik, mert egy legfeljebb n pontú egyszerű gráfban a legmagasabb fokszám csak $n-1$ lehet (fagráf). Ezek alapján nem teljesülhet a feltevésünk, vagyis az eredeti álltás igaz.

■

TÉTEL:
Egy egyszerű gráf és a komplementergráfja közül legalább az egyik összefüggő.

Bizonyítás:
Mutassuk meg, hogy ha a gráf nem összefüggő, akkor a komplementere összefüggő, vagyis a komplementergráf két tetszőleges csúcsa között mindig létezik út.

Tekintsük a komplementergráf két tetszőleges csúcsát.

Amennyiben a gráfban nincsenek összekötve éllel, akkor készen vagyunk, mert a komplementer gráfban lesz közöttük él.

Ha a gráfban a két csúcsot él köti össze, akkor tekintsünk egy harmadik csúcsot, amely nem érhető el úttal egyik kiindulási csúcsból sem. Ilyen biztosan létezik, mert a gráf nem összefüggő. Ekkor azonban ez a csúcs a komplementergráfban össze lesz kötve a két kezdeti csúccsal, vagyis készen vagyunk, mert a komplementergráfban lesz közöttük út.

■