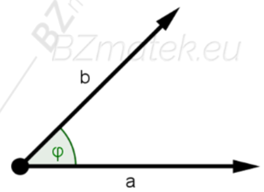
Skaláris szorzat

DEFINÍCIÓ: (Vektorok hajlásszöge)
Két vektor hajlásszögének azt a φ $(0° \leq \varphi \leq 180°)$ szöget nevezzük, amelyet a vektorok egy közös pontból felmért reprezentánsai által meghatározott félegyenesek egymással alkotnak.



Megjegyzés:
Ha a két vektor egyike nullvektor, akkor hajlásszögük nem egyértelmű.

DEFINÍCIÓ: (Skaláris szorzat)
Legyen az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hajlásszöge φ $(0° \leq \varphi \leq 180°)$. Ekkor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris (belső) szorzatán az $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ számot értjük. Jelölés: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Megjegyzés:

- *Geometriai jelentés: Két vektor skaláris szorzata az egyik vektor hosszának és a másik vektor előzőre eső merőleges vetülete hosszának szorzata.*
- *A skaláris szorzat nem művelet, mert egy rendezett vektorpárhoz rendel egy valós számot, s nem egy halmaz összes rendezett elempárjához rendel egy elemet a halmazból.*

A skaláris szorzás tulajdonságai ($\lambda \in \mathbb{R}$):

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Megjegyzés:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$*, vagyis a skaláris szorzat általában nem asszociatív, mert az egyik az* $\vec{a}$*, a másik a* $\vec{c}$ *irányába mutató vektor. Egyenlőek: pl. a két vektor párhuzamos egymással.*

Speciális helyzetű vektorok skaláris szorzata:

- Ha a két vektor egyirányú, akkor a hajlásszögük 0° és ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Ha a két vektor ellentétes irányú, akkor a hajlásszögük 180° és ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Ha a két vektor merőleges egymásra, akkor a hajlásszögük 90° és ekkor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Megjegyzés:

- *Egy vektor önmagával vett skaláris szorzata:* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, *mert ekkor a hajlásszög* 0°.
- *Ha* $0° \leq \varphi < 90°$, *akkor* $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, *ha pedig* $90° < \varphi \leq 180°$, *akkor* $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

TÉTEL:
Az $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$ vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összegével egyenlő. Jelöléssel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Megjegyzés:

- *A két vektor által bezárt szög kifejezve a képletekből:* $cos\ \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$.
- *Térbeli vektorok esetén hasonlóan számítható ki a vektorok skaláris szorzata, illetve szöge: ha* $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ és $\vec{b}\ (b_1; b_2; b_3)$, *akkor* $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

TÉTEL:
Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Melyik lehet két vektor hajlásszöge a következők közül?**

   $\alpha = -45°$ $\beta = 0°$ $\gamma = 180°$ $\delta = 270°$ $\varepsilon = 360°$ $\varphi = 1000°$

2. **(K) Mekkora két, egyaránt 5 egység hosszú vektor összege, ha a vektorok hajlásszöge a következő?**

   $\alpha = 0°$ $\beta = 60°$ $\gamma = 90°$ $\delta = 120°$ $\varepsilon = 180°$

3. **(K) Mekkora két, egyaránt 5 egység hosszú vektor különbsége, ha a vektorok hajlásszöge a következő?**

   $\alpha = 0°$ $\beta = 60°$ $\gamma = 90°$ $\delta = 120°$ $\varepsilon = 180°$

4. **(K) Melyik állítás igaz az alábbiak közül?**

   A: A vektorok skaláris szorzása kommutatív művelet.

   B: A vektorok skaláris szorzása asszociatív művelet.

5. **(K) Adj meg olyan helyzetű $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokat, hogy teljesüljön a következő egyenlőség: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$!**

6. **(K) Található - e olyan $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektor, amelyekre nem teljesül a következő egyenlőség: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$?**

7. **(K) Tekintsünk két olyan vektort, melyek közül az egyik egységvektor, azaz $|\vec{e}| = 1$. Vizsgáld meg, mit kapunk hegyes -, illetve tompaszögek esetén, ha ezeket a vektorokat összeszorozzuk!**

8. (K) Adj meg olyan $\vec{a} \neq \vec{0}$ és $\vec{b} \neq \vec{0}$ vektorokat, amelyekre teljesül a következő!

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2 \cdot \vec{b}$

9. (K) Mekkora két, egyaránt 5 egység hosszú vektor skaláris szorzata, ha a vektorok hajlásszöge a következő?

$\alpha = 0°$ $\quad$ $\beta = 60°$ $\quad$ $\gamma = 90°$ $\quad$ $\delta = 150°$ $\quad$ $\varepsilon = 180°$

10. (K) Határozd meg az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ skaláris szorzat értékét, ha $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$ és adott a két vektor által bezárt szög nagysága!

$\alpha = 30°$ $\quad$ $\beta = 45°$ $\quad$ $\gamma = 90°$ $\quad$ $\delta = 120°$ $\quad$ $\varepsilon = 180°$

11. (K) Határozd meg az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ skaláris szorzat értékét, ha $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és adott a két vektor által bezárt szög nagysága!

$\alpha = 0°$ $\quad$ $\beta = 60°$ $\quad$ $\gamma = 90°$ $\quad$ $\delta = 150°$ $\quad$ $\varepsilon = 180°$

12. (K) Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor skaláris szorzatát, ha ismert a hosszuk és a hajlásszögük!

a) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ és $\varphi = 40°$

b) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ és $\varphi = 30°$

c) $|\vec{a}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 2$ és $\varphi = 90°$

d) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{50}$ és $\varphi = 120°$

e) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$ és $\varphi = 135°$

f) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$ és $\varphi = 45°$

13. (K) Határozd meg az $\vec{a}$ vektor hosszát a következő adatok ismeretében!

a) $|\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ **és** $\varphi = 40°$

b) $|\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **és** $\varphi = 30°$

c) $|\vec{b}| = 9, \vec{a} \cdot \vec{b} = 18$ **és** $\varphi = 60°$

d) $|\vec{b}| = 7, \vec{a} \cdot \vec{b} = -12$ **és** $\varphi = 135°$

e) $|\vec{b}| = \frac{1}{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{4}$ **és** $\varphi = 150°$

f) $|\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 18 \cdot \sqrt{3}$ **és** $\varphi = 30°$

14. (K) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok $60°$ - os szöget zárnak be. Számítsd ki a következő szorzatok értékét!

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ $\quad$ $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$

15. (K) Két, egymással $60°$ - os szöget bezáró vektor skaláris szorzata 4. Ha az egyik vektor hossza a másik kétszerese, akkor milyen hosszú a két vektor?

16. (K) Két vektor abszolútértéke 12 és 7 egység. Mekkora lehet a két vektor skaláris szorzatának legkisebb illetve legnagyobb értéke? Írj fel képletet skaláris szorzatuk értékének a vektorok szögétől való függésére!

17. (K) Két vektor hossza 3 cm, illetve 4 cm. Legalább és legfeljebb mekkora lehet a skaláris szorzatuk értéke?

18. (K) Fejezd be a megkezdett igaz kijelentéseket!

A: Ha két vektor összege $\vec{0}$, akkor a két vektor hossza … .

B: Ha három vektor összege $\vec{0}$, akkor közülük bármelyik egyenlő a másik kettő … .

C: Ha két vektor merőleges, akkor összegük …, mint különbségük.

D: Ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük skaláris szorzata … egyenlő.

E: Ha két egységvektor skaláris szorzata $\frac{1}{2}$, akkor hajlásszögük … .

19. (K) Az ABC derékszögű háromszög CA és CB oldalai merőlegesek egymásra. Mennyi a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ értéke?

20. (K) Milyen helyzetű egymáshoz képest az a két egységvektor, amelyek skaláris szorzata: $0; \frac{\sqrt{3}}{2}; -0,5$?

21. (K) Egy vektor hossza 2. Mekkora szöget zár be ezzel azaz egységvektor, amely esetén a skaláris szorzat: $2; 3; \sqrt{2}; 0; -2 \cdot \sqrt{2}$!

22. (K) Mekkora a két vektor által bezárt szög nagysága, ha adott a vektorok hossza és skaláris szorzata?

a) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ **és** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$

b) $|\vec{c}| = 7, |\vec{d}| = 12$ **és** $\vec{c} \cdot \vec{d} = -60$

c) $|\vec{e}| = 5, |\vec{f}| = 4$ **és** $\vec{e} \cdot \vec{f} = 10$

d) $|g| = 2, |\vec{h}| = 3$ **és** $\vec{g} \cdot \vec{h} = 0$

e) $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 2,5$ **és** $\vec{p} \cdot \vec{q} = -5$

23. (K) Két nem párhuzamos vektorról tudjuk, hogy $|\vec{a}| = 5$ és $|\vec{b}| = 5$. Mekkora szöget zár be az $\vec{a} - \vec{b}$ és az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor?

24. (K) Határozd meg a két vektor skaláris szorzatát!

a) $\vec{a}\,(10;\,-3)$ **és** $\vec{b}\,(-1;5)$

b) $\vec{c}\,(2000;0,01)$ **és a** $\vec{d}\,(0,01;-1900)$

c) $\vec{e}\,\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$ **és** $\vec{f}\,\left(-\frac{9}{8};-\frac{6}{5}\right)$

d) $\vec{g}\,(-6;-10)$ **és** $\vec{h}\,(3;-11)$

e) $\vec{p}\,(5;-2)$ **és** $\vec{q}\,(3;0)$

25. (K) Adottak az $\vec{e}\,(-3;-1)$ **és** $\vec{f}\,(4;-1)$ **vektorok. Számítsd ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát!**

$\vec{e}$ **és** $\vec{f}$ $\qquad$ $2\vec{e}$ **és** $2\vec{f}$ $\qquad$ $\lambda\cdot\vec{e}$ **és** $\lambda\cdot\vec{f}$**, ahol** $\lambda\in\mathbb{R}$

Az eredmények alapján fogalmazd meg, miként változik két vektor skaláris szorzata, ha a vektorokat ugyanazzal a számmal szorozzuk!

26. (K) Adottak az $\vec{a}\,(3;1)$ **és** $\vec{b}\,(2;-1)$ **vektorok. Határozd meg a következő műveletek eredményét!**

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\qquad$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$ $\qquad$ $(\vec{a}-2\vec{b})^2$ $\qquad$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

27. Adottak az $\vec{a}\,(2;-1)$ **és** $\vec{b}\,(1;7)$ **vektorok. Számítsd ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát!**

$\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ $\qquad$ $-\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ $\qquad$ $-\vec{a}$ **és** $-\vec{b}$

$2\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a}+\vec{b}$ **és** $\vec{a}-\vec{b}$ $\qquad$ $2\vec{a}+\vec{b}$ **és** $\vec{a}+2\vec{b}$

28. (K) Adottak az $\vec{p}\,(5;-7), \vec{q}\,\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ **és** $\vec{r}\,(4;5,2)$ **vektorok. Számítsuk ki a következő skaláris szorzatokat!**

$\vec{p}\cdot\vec{q}$ $\qquad$ $\vec{q}\cdot\vec{r}$ $\qquad$ $\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{r}$

$(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{r}$ $\qquad$ $2\cdot(\vec{p}-3\vec{q})\cdot\vec{r}$ $\qquad$ $(\vec{p}+2\vec{q})\cdot(3\vec{p}-\vec{q})$

29. (K) Írd fel a következő vektorműveletek eredményét, ha $\vec{a}\,(2;3), \vec{b}\,(-3;2), \vec{c}(5;-1)$!

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$ $\qquad$ $(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\qquad$ $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

30. (K) Adj meg olyan vektort, amelynek az $\vec{a}(5;-3)$ vektorral való skaláris szorzata a következő: $1; -2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{7}; 2004; \sqrt{2}$!

31. (K) Az $A(-3;4), B(1;-2); C(13;6)$ pontok meghatároznak egy háromszöget. Számítsd ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA}$ felhasználásával képezhető összes különböző skaláris szorzat értékét!

32. (K) Mekkora az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$, illetve a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok skaláris szorzata, ha $A(2;2), B(7;6); C(-3;-2)$ és $D(-2;5)$?

33. (K) Mennyi a hiányzó vektor koordinátája, ha ismertek a következő adatok?

a) $\vec{a}\,(2;2), \vec{b}\,(1;-6), \vec{a}\cdot\vec{c}=14$ és $\vec{b}\cdot\vec{c}=-7$

b) $\vec{c}\,(1;-5), \vec{d}\,(-3;-12), \vec{c}\cdot\vec{e}=-13$ és $\vec{d}\cdot\vec{e}=-42$

c) $\vec{e}\,(-4;7), \vec{f}\,(-10;11), \vec{e}\cdot\vec{g}=30$ és $\vec{f}\cdot\vec{g}=49$

d) $\vec{p}\,(8;9), \vec{q}\,(-28;-15), \vec{p}\cdot\vec{r}=-9$ és $\vec{q}\cdot\vec{r}=4$

e) $\vec{u}\,(3;-2), \vec{v}\,(4;-1), \vec{u}\cdot\vec{w}=7$ és $\vec{v}\cdot\vec{w}=1$

34. (E) Határozd meg a következő vektorok skaláris szorzatát!

a) $\vec{a}\,(1;2;5)$ és $\vec{b}\,(-1;3;-7)$

b) $\vec{c}\,(0;2;3)$ és $\vec{d}\,(-2;1;3)$

c) $\vec{e}\,(2;3;4)$ és $\vec{f}\,(5;7;-1)$

d) $\vec{g}\,(\sqrt{2};5;1)$ és $\vec{h}\,(\sqrt{3};-12;2)$

e) $\vec{p}\,\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3};\sqrt{18}\right)$ és $\vec{h}\,(10;-9;\sqrt{8})$

35. (K) Határozd meg a következő vektorok hajlásszögét!

a) $\vec{a}\,(2;3)$ **és** $\vec{b}\,(-5;-1)$

b) $\vec{c}\,(5;-2)$ **és a** $\vec{d}\,(3;7)$

c) $\vec{e}\,\left(\frac{12}{5};-3\right)$ **és** $\vec{f}\,\left(\frac{7}{2};-\frac{9}{4}\right)$

d) $\vec{g}\,(4;-3)$ **és** $\vec{h}\,(-1;1{,}25)$

e) $\vec{p}\left(\frac{1}{7};\frac{3}{5}\right)$ **és** $\vec{q}\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$

36. (E) Határozd meg a következő vektorok hajlásszögét!

a) $\vec{a}\,(3;0)$ **és a** $\vec{b}\,\left(1;\sqrt{3}\right)$

b) $\vec{c}\,\left(2\cdot\sqrt{3};5\right)$ **és a** $\vec{d}\,\left(\sqrt{27};-4\right)$

c) $\vec{e}\,(3;-3)$ **és** $\vec{f}\,\left(1;\sqrt{3}\right)$

d) $\vec{g}\,\left(-\sqrt{4-2\cdot\sqrt{3}};1\right)$ **és** $\vec{h}\,\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1};\sqrt{3}\right)$

e) $\vec{p}\left(\sqrt{2};\sqrt[3]{3}\right)$ **és** $\vec{q}\left(\sqrt[4]{4};\sqrt[5]{5}\right)$

37. (K) Add meg az $\vec{a}\,(8xz;-3y)$ **és** $\vec{b}\,(6y;16xz)$ **vektorok hajlásszögét!** $(x,y,z\in\mathbb{R})$

38. (K) Tekintsük az $\vec{a}\,(3;4), \vec{b}\,(-3;4)$ **és** $\vec{c}\,(4;-3)$ **vektorokat! Mekkora szöget zár be egymással** $\vec{a}$ **és** $\vec{b}$**,** $\vec{a}$ **és** $\vec{c}$**, illetve** $\vec{b}$ **és** $\vec{c}$**?**

39. (K) Adottak az $\vec{a}\,(-3;4)$ **és** $\vec{b}\,(7;-2)$ **vektorok.**

a) **Számítsd ki a** $-2\vec{a}+3\vec{b}$ **vektor koordinátáit!**

b) **Számítsd ki az** $\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ **vektorok skaláris szorzatát!**

c) **Mekkora a két vektor abszolútértéke?**

d) **Mekkora az** $\vec{a}$ **és** $\vec{b}$ **vektorok hajlásszöge?**

e) **Állítsd elő az** $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ **és a** $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ **vektorokat az** $\vec{i}$ **és** $\vec{j}$ **vektorok lineáris kombinációjaként! Mekkora a két vektor hossza?**

40. (K) Ismerjük két vektor összegének és különbségének a koordinátáit: $\vec{a}+\vec{b}\ (3;-1)$ és $\vec{a}-\vec{b}\ (-1;5)$. Határozd meg az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor koordinátáit! Mekkora a két vektor hajlásszöge?

41. (K) A két vektor skaláris szorzatának kiszámolásával döntsd el, hogy a megadott vektorok hegyesszöget, derékszöget vagy tompaszöget zárnak - e be egymással!

a) $\vec{a}\ (-2;-3)$ **és** $\vec{b}\ (-3;2)$

b) $\vec{c}\ (3;4)$ **és a** $\vec{d}\ \left(-4;\frac{7}{2}\right)$

c) $\vec{e}\ (-1;1)$ **és** $\vec{f}\ (5;3)$

d) $\vec{g}\ (2;-5)$ **és** $\vec{h}\ \left(15;\frac{13}{2}\right)$

e) $\vec{p}\left(2;\frac{3}{2}\right)$ **és** $\vec{q}\left(\frac{15}{2};-10\right)$

42. (K) A két vektor skaláris szorzatának kiszámolásával döntsd el, hogy a megadott vektorok hegyesszöget, derékszöget vagy tompaszöget zárnak - e be egymással!

a) $\vec{a}\ (7;-1)$ **és** $\vec{b}\ (1;-6)$

b) $\vec{c}\ (0;9)$ **és a** $\vec{d}\ (-12;5)$

c) $\vec{e}\ (1;5)$ **és** $\vec{f}\ (10;-2)$

d) $\vec{g}\ (0;2022)$ **és** $\vec{h}\ (\sqrt{2};0)$

e) $\vec{p}\left(\frac{1}{5};3\right)$ **és** $\vec{q}(15;-4)$

43. (K) Adott a $\vec{v}\ (3;4)$ és a $\vec{w}\ (-1;5)$ vektor. Határozd meg a $2\vec{v}-3\vec{w}$ és a $4\vec{v}-5\vec{w}$ vektorok hajlásszögét!

44. (K) Adott a $\vec{p}\ (-1;2)$; $\vec{q}\ (3;4)$ és $\vec{r}\ (3;-4)$ vektor. Add meg az $\vec{a}=-\frac{7}{2}\vec{p}+2\vec{q}-3\vec{r}$ és $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}+5\vec{r}$ vektor hajlásszögét!

45. (E) Határozd meg a következő vektorok hajlásszögét!

a) $\vec{a}\,(2; -3; 5)$ és $\vec{b}\,(-1; -2; 5)$

b) $\vec{c}\,(2; 3; 4)$ és $\vec{d}\,(-1; -3; -5)$

c) $\vec{e}\,(-2; 3; 1)$ és $\vec{f}\,(1; 2; -3)$

d) $\vec{g}\,(2; -3; 6)$ és $\vec{h}\,(1; -4; -8)$

e) $\vec{p}(1; 2; 3)$ és $\vec{q}(3; 2; 1)$

46. (K) Add meg a hiányzó koordinátákat úgy, hogy a két vektor merőleges legyen!

a) $\vec{a}\,(-11; 4)$ és $\vec{b}\,(x; 5)$

b) $\vec{c}\,(10; -y)$ és $\vec{d}\,(-5; 12)$

c) $\vec{e}\,(-3; 12)$ és $\vec{f}\,(8; y)$

d) $\vec{g}\,(3; 2)$ és $\vec{h}\,(x, -2)$

e) $\vec{p}\,(-12; 4)$ és $\vec{q}\,(6; y)$

47. (K) Az $\vec{a}\,(3; -4)$ és $\vec{b}\,(x; 9)$ vektorok merőlegesek egymásra. Számítsd ki, hogy az $\vec{a}$ hossza hányadrésze a $\vec{b}$ hosszának!

48. (E) Add meg a hiányzó koordinátákat úgy, hogy a két vektor merőleges legyen egymásra!

a) $\vec{a}\,(\sqrt{6}; -2)$ és $\vec{b}\,\left(-\sqrt{24}; y\right)$

b) $\vec{c}\,\left(\sqrt{3}; y\right)$ és $\vec{d}\,(2; -8)$

c) $\vec{e}\,\left(3 \cdot \sqrt{5}; -y\right)$ és $\vec{f}\,\left(2 \cdot \sqrt{5}; 4\right)$

d) $\vec{g}\,\left(\sqrt{2} + 2; \sqrt{2}\right)$ és $\vec{h}\,(-1; y)$

e) $\vec{p}\,\left(-x; \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{11}}\right)$ és $\vec{q}\,\left(-9; \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}}\right)$

49. (K) Állapítsd meg az x értékét úgy, hogy a megadott vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

a) $\vec{a}\,(3; 1)$ **és** $\vec{b}\,(2x - 2; -1)$

b) $\vec{c}\,(3; 3x - 5)$ **és** $\vec{d}\,(2; -1)$

c) $\vec{e}\,(7; 12 - x)$ **és** $\vec{f}\,(1; 9 - 2x)$

d) $\vec{g}\,(x^2 - x + 1; 1)$ **és** $\vec{h}\,(2; -1)$

e) $\vec{p}\,(x; x + 2)$ **és** $\vec{q}\,(x - 1; x + 3)$

50. (K) Van – e olyan x pozitív valós szám, amelyre az $\vec{a}\,(x; x + 2)$ és $\vec{b}\,(x + 3; x + 3)$ vektorok merőlegesek egymásra?

51. (K) Az A, B, C pontok koordinátái: $A\,(3; 7), B\,(9; 14)$ és $C\,(13; 2)$. Határozd meg a k valós számot úgy, hogy az $\overrightarrow{AC}$ és az $\left(\overrightarrow{AB} - k \cdot \overrightarrow{AC}\right)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra!

52. (K) Igazold, hogy az $\vec{u}(a_2; -a_1,)$ a $\vec{v}(a_1; a_2)$ 90° - os elforgatottja!

53. (E) Legyenek az $\vec{a}\,(-3; y; 6)$ és $\vec{b}\,(8; 2; z)$ vektorok merőlegesek egymásra és az y, illetve a z prímszámok. Határozd meg az y és a z értékét!

54. (E) Mekkora a z értéke, ha a két vektor merőleges egymásra?

a) $\vec{a}\,(-2; 1; -3)$ **és** $\vec{b}\,(5; -2; z)$

b) $\vec{a}\,(2; -1; 3)$ **és** $\vec{b}\,(7; -4; z)$

55. (E) Adott két vektor: $\vec{a}\,(5; -1; 2)$ és $\vec{b}\,(-2; 3; 1)$. Keress olyan $\vec{c}$ vektort, amelyik merőleges $\vec{a}$ – ra és $\vec{b}$ – re is!

56. (E) Bizonyítsd be, hogy ha k egy nullától különböző valós szám, akkor az alábbi vektorok egy kocka egyik csúcsából kiinduló élvektorai!

$\vec{a}\,[k; -(k+1); -k \cdot (k+1)]$ $\quad$ $\vec{b}\,[-k \cdot (k+1); k; -(k+1)]$ $\quad$ $\vec{c}\,[-(k+1); -k \cdot (k+1); k]$

57. (K) Az ABC háromszög csúcsai: $A\,(-2; -1), B\,(2; -3), C\,(10; 3)$. Határozd meg a $BAC\sphericalangle$ nagyságának pontos értékét és a háromszög területét!

58. (K) Egy háromszög csúcsai az $A\,(3; -1), B\,(2; 4)$ és $C\,(-1; 5)$ koordinátájú pontok. Számítsd ki a háromszög szögeit és területét!

59. (K) Adott a koordináta – rendszerben két pont: $A\,(1; 5)$ és $B\,(6; 2)$. Határozd meg az OAB háromszög szögeit és kerületét, ahol O a koordináta – rendszer középpontja!

60. (K) Határozd meg az ABC háromszög kerületét, területét, legnagyobb szögének nagyságát és legrövidebb magasságának hosszát, ha $A\,(-1; 4), B\,(2; -2)$ és $C\,(7; 3)$!

61. (K) Számítsd ki az ABC háromszög szögeit, kerületét, területét és a magasságainak hosszát, ha $A\,(0; 2), B\,(5; 0)$ és $C\,(3; 3)$!

62. (K) Adott három pont a koordinátáival, $A\,(-3; -1), B\,(6; -2)$ és $C\,(3; 4)$. Add meg az általuk meghatározott háromszög szögeit, kerületét, területét, beírt - és köréírt kör sugarának hosszát!

63. (K) Bizonyítsd be, hogy a következő pontok egy egyenlőszárú, derékszögű háromszög csúcsai: $A\,(-3; 1), B\,(2; -2)$ és $C\,(5; 3)$! Határozd meg a háromszög kerületét, területét és az átfogóhoz tartozó magasság hosszát!

64. (K) Bizonyítsd be, hogy az $A\,(2008; 2009), B\,(2011; 2025)$ és $C\,(2015; 2011)$ pontok egy derékszögű háromszög csúcspontjai! Add meg a kerületét, területét és a legrövidebb magasság hosszát!

65. (K) Az ABC háromszög csúcsai: $A\ (-2; 1), B\ (2; -2)$ és $C\ (8; 6)$. Igazold, hogy a háromszög derékszögű, majd határozd meg a köré írt kör O középpontját és a háromszög területét!

66. (K) Bizonyítsd be, hogy az $A\ (10; 4), B\ (3; -5)$ és $C\ (1; 1)$ koordinátájú pontok derékszögű háromszöget feszítenek ki! Számítsd ki a köré írt körének területét!

67. (K) Adott a koordinátasíkon két pont: $A\ (-12; 7)$ és $B\ (14; 24)$. Mutasd meg, hogy az OAB háromszög derékszögű, ha O a koordináta - rendszer kezdőpontja! Add meg a háromszög beírt és köré írt kör sugarának hosszát!

68. (E) Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a csúcsok koordinátái: $A\ (-4; 1; 2)$, $B\ (1; 3; 5)$ és $C\ (0; 0; 2)$!

69. (K) Az $ABCD$ négyszög csúcsai: $A\ (-2; 5), B\ (2; 2), C\ (9; 17)$ és $D\ (3; 17)$. Határozd meg az $ABCD$ négyszög legnagyobb, illetve legkisebb szögét!

70. (K) Egy négyszög csúcsai $A\ (0; 0), B\ (25; -10), C\ (24; 7), D\ (10; 10)$. Határozd meg az átlók hajlásszögét és a négyszög területét!

71. (K) Az A, B, C és D pontok helyvektorai legyenek rendre $-2\vec{i} + 3\vec{j}; 3\vec{i} + 8\vec{j}; 7\vec{i} + 6\vec{j}$ és $7\vec{i} - 4\vec{j}$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszög átlói merőlegesek egymásra! Számítsd ki a négyszög területét!

72. (K) Számítsd ki annak a paralelogrammának a kerületét és területét, amelynek három egymást követő csúcsa pozitív körüljárási irányban: $A\ (-3; 4)$, $B\ (-2; -1)$ és $C\ (3; 1)$! Határozd meg a negyedik csúcsának koordinátáit!

73. (K) Az $ABCD$ négyszög csúcsai: $A\ (-1; 2), B\ (7; 3), C\ (3; 10)$ és $D\ (-5; 9)$.
Mutasd meg, hogy a négyszög átlói merőlegesek egymásra!
Igazold, hogy az $ABCD$ négyszög rombusz!
Határozd meg az $ABCD$ négyszög belső szögeinek nagyságát!

74. (K) Az x - tengely melyik pontjából látszik az AB szakasz derékszögben, ha a szakasz két végpontja: $A\,(-1;3)$ és $B\,(7;3)$?

75. (K) Az y - tengely pozitív felének melyik pontjából látszik az AB szakasz derékszögben, ha a szakasz két végpontja: $A\,(5;-6)$ és $B\,(15;14)$?

76. (E) Az AB szakasz végpontjának koordinátái: $A\,(6;a)$ és $B\,(-2;1)$. Határozd meg az A pont koordinátáit úgy, hogy az x - tengelynek csak egy olyan pontja legyen, amelyből az AB szakasz derékszögben látszik! $(a>0)$

77. (E) Határozd meg az y értékét, ha a $\vec{p}\,(3;4)$ és $\vec{q}\,(6,y)$ vektorok $60°$ - os szöget zárnak be egymással!

78. (E) Az $\vec{a}\,(4;-3)$ és $\vec{b}\,(x;-7)$ vektorok által bezárt szög $45°$. Add meg a $\vec{b}$ vektor első koordinátáját!

79. (E) Két nem párhuzamos $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor $30°$ - os szöget zár be. Hány fokos szöget zár be az $\vec{a}$ vektor az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektorral?

80. (E) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egyenlő hosszúságú vektorok $120°$ - os szöget zárnak be. Mekkora szöget zárnak be a $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$ és a $\vec{d}=5\vec{a}+4\vec{b}$ vektorok?

81. (E) Adj meg olyan $\vec{b}$ vektort, amely az $\vec{a}$ vektorral $60°$ - os szöget zár be, ha $\vec{a}\,(8;6)$!

82. (E) Add meg azokat a vektorokat, amelyek $14°$ - os szöget zárnak be a $\vec{v}\,(3;4)$ vektorral és kétszer hosszabbak a $\vec{v}$ vektornál!

83. (E) Add meg az összes olyan $\vec{u}$ vektort, amelyre teljesül, hogy merőleges a $\vec{v}\,(3;4)$ vektorra és $|\vec{u}|=|\vec{v}|$!

84. (E) Add meg azokat a vektorokat, amelyek merőlegesek a $\vec{v}\,(3;4)$ vektorra és kétszer hosszabbak a $\vec{v}$ vektornál!

85. (E) Határozd meg annak a $\vec{b}$ vektornak a koordinátáit, amely merőleges az $\vec{a}$ vektorra, továbbá $\vec{a}\,(10;-5)$ és $|\vec{b}|=\sqrt{10}$!

86. (E) Add meg az $\vec{a}\,(-3;4)$ vektorra merőleges 7 egység hosszú vektort!

87. (E) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem párhuzamos vektorok. Határozd meg a k számot úgy, hogy a $\vec{c}=(\vec{a}+k\cdot\vec{b})$ vektor merőleges legyen $\vec{b}$ - re!

88. (E) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok $60°$ - os szöget zárnak be. Milyen λ esetén lesz a $\vec{c}=(\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b})$ merőleges $\vec{b}$ – re?

89. (E) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok hajlásszöge $60°$. Tudjuk, hogy a $\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})$ merőleges $\vec{b}$ – re. Milyen kapcsolat van az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hossza között?

90. (E) Mekkora szöget zárnak be az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok, ha tudjuk, hogy a $\vec{c}=(\vec{a}+2\vec{b})$ vektor merőleges a $\vec{d}=(5\vec{a}-4\vec{b})$ vektorra?

91. (E) Mekkora az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egységvektorok szöge, ha $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})=-0,5$?

92. (E) Határozd meg az egyenlő hosszúságú $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor által bezárt szöget, ha tudjuk, hogy a $\vec{c}=(\vec{a}+2\vec{b})$ vektor merőleges a $\vec{d}=(5\vec{a}-4\vec{b})$ vektorra!

93. (E) Ha a $\vec{c}=(\vec{a}+3\vec{b})$ vektor és a $\vec{d}=(7\vec{a}-5\vec{b})$ vektor, illetve az $\vec{e}=(\vec{a}-4\vec{b})$ vektor és az $\vec{f}=(7\vec{a}-2\vec{b})$ vektor merőleges egymásra, akkor mekkora szöget zár be az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor?

94. (E) Legyen $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ által bezárt szög: $\sphericalangle(\vec{a};\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Mely valós α paraméterre lesz a $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$ és a $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ merőleges egymásra?

95. (E) Adott az $\vec{a}\,(2-2p; x^2)$ és a $\vec{b}\,(x+1; 5-p)$ vektor. Határozd meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok minden valós x esetén tompaszöget zárjanak be!

96. (E) Adott az $\vec{a}\,(4; 2)$ és a $\vec{b}\,(-2; b)$ helyvektor. Határozd meg a b értékét úgy, hogy a két vektor hajlásszögét az y - tengely felezze!

97. (E) Az $\vec{a}\,(-9; 12)$ és $\vec{b}\,(x; y)$ helyvektorok merőlegesek egymásra. A végpontokat összekötő szakaszt az y – tengely $P\,(0; p)$ pontja $3:1$ arányban osztja ketté. Határozd meg a $\vec{b}$ vektor koordinátáit!

98. (E) Legyen adott az $\vec{a}\,(x_1; 1)$ és $\vec{b}\,(x_2; 2)$ vektor. Mely görbe pontjai azon $P\,(x_1; x_2)$ pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$? Határozd meg az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor hajlásszögét, ha $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$!

99. (E) Adott az $\vec{a}\,(3; 4)$ és a $\vec{b}\,(-2; 1)$ helyvektor. Határozd meg az $\vec{a}$ – nak $\vec{b}$ – re, illetve a $\vec{b}$ – nek $\vec{a}$ – ra eső merőleges vetületének hosszát!

100. (E) Egy paralelogramma szomszédos oldalvektorainak hossza $|\vec{a}| = 26, |\vec{b}| = 13$, és az általuk bezárt szög $\varphi = 60°$. Add meg az $\vec{a} \cdot \vec{b}$ és a $\vec{b} \cdot \vec{e}$ szorzat értékét, illetve az $\vec{f}$ vektor hosszát, ahol $\vec{e}$ a rövidebb, $\vec{f}$ pedig a hosszabb átlóvektor!

101. (E) Egy kocka élei 1 egység hosszúságúak. Ennek az egyik csúcsából kiinduló élvektorait jelölje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Mivel egyenlők a következő skaláris szorzatok?

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{c}$ $\quad$ $\vec{b} \cdot \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$

$\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{b}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ $\quad$ $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

102. (E) Az egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorait jelölje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Mi az eredménye a következő műveleteknek?

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $\vec{b} \cdot \vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$

103. (E) Legyen az $ABCD$ négyzet minden oldala $\sqrt{2}$ hosszúságú. Add meg a következő skaláris szorzatok értékét!

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD}$ $\quad$ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$

104. (E) Legyen az $ABCD$ négyzet köré írt körének egy pontja a P pont. Bizonyítsd be, hogy ha a négyzet oldalaiank hossza 1 egység, akkor teljesülnek a következők!

a) $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}) = 2$

b) $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}) \cdot (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD}) = 0$

105. (E) Legyen a 10 egység oldalú $ABCD$ négyzet köré írt körének egy tetszőleges pontja a P pont. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét!

a) $\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)$

b) $\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}\right)$

106. (E) Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben (a derékszög C csúcsnál van) a befogók hossza 1. Az oldalvektorok: $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$; $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$; $\vec{c}=\overrightarrow{BA}$. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét!

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{c}$ $\quad$ $\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ $\quad$ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ $\quad$ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

107. (E) Az ABC egységoldalú szabályos háromszögben az oldalvektorok: $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét!

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\quad$ $\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\quad$ $\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$ $\quad$ $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$ $\quad$ $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$

108. (E) Az ABC háromszög oldalainak hossza 1. Legyen: $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesülnek a következő egyenlőségek!

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ $\quad$ $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}$

109. (E) Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszögben az oldalvektorok: $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$; $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ vektorokat. Határozd meg az $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ kifejezés értékét!

110. (E) Legyen az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszögben a C csúcsból kiinduló magasság talppontja T. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét!

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AT}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{TC}$

111. (E) Egy szabályos háromszög súlypontjából vegyük fel a csúcspontokba mutató $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ helyvektorokat, melyekről tudjuk, hogy egységvektorok. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét!

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{a})$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$

112. (E) Egy szabályos hatszög középpontjából a hatszög három szomszédos csúcsába mutató vektorokat jelölje rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. A hatszög oldalának hossza 1 egység. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét!

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$ $\quad$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

113. (E) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 1 egység. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét!

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{DC}$

114. (E) Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 10 egység, a hatszög középpontja a K pont. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét!

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BD}$ $\quad$ $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{EF}$ $\quad$ $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{BK}$

115. (E) Egység sugarú körbe írt szabályos hatszög csúcsai rendre: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Határozd meg a következő skaláris szorzatok értékét!

$\overrightarrow{A_1A_5} \cdot \overrightarrow{A_6A_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{A_2A_6} \cdot \overrightarrow{A_4A_2}$ $\quad$ $\overrightarrow{A_3A_5} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$

$\overrightarrow{A_1A_5} \cdot \overrightarrow{A_4A_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{A_4A_2} \cdot \overrightarrow{A_3A_6}$ $\quad$ $(\overrightarrow{A_5A_3} + \overrightarrow{A_2A_1}) \cdot \overrightarrow{A_5A_2}$

116. (E) Legyen S az ABC háromszög súlypontja, P pedig tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy ekkor teljesül: $3 \cdot PS^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - (SA^2 + SB^2 + SC^2)$!

117. (E) Az ABC háromszög S súlypontja körül szerkessz egy r sugarú kört. Bizonyítsd be, hogy a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg a kör kerületének bármely P pontjára ugyanakkora!

118. (E) Az ABC háromszög síkjában melyik P pontra teljesül, hogy a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg, vagyis a csúcsoktól mért távolságainak négyzetösszege minimális?

119. (E) Bizonyítsd be, hogy ha M az ABC hároszög BC oldalának egy tetszőleges belső pontja, akkor: $AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC$! (Stewart - tétel)

120. (E) Az ABC háromszög síkjában M olyan pont, amelyre $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Bizonyítsd be, hogy ebben az esetben $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$!

121. (E) Az ABC háromszög csúcspontjainak helyvektorait jelölje rendre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, az A és a B pontokon átmenő magasságvonalak metszéspontjának helyvektorát pedig $\vec{m}$.

a) **Igazold a következőket: $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{m}) = 0$ és $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = 0$!**

b) **Igazold, hogy az előző feltételek mellett: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{m}) = 0$!**

c) **Igazold az *a)* és *b)* pontokban kapott eredmények felhasználásával, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!**

122. (E) Adott egy AB szakasz, amelynek hossza $2R$. Vegyünk fel egy koordináta – rendszert, amelynek x - tengelye tartalmazza az AB szakaszt, kezdőpontja pedig egybeesik annak felezőpontjával. Legyen az AB átmérőjű kör egy C pontjának koordinátái: $C\ (c_1; c_2)$.

a) **Írd fel az A és B pontok koordinátáit!**

b) **Írd fel a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok koordinátáit!**

c) **Számítsd ki a $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ skaláris szorzat értékét!**
Melyik nevezetes elemi geometriai tétel állítására következtethetünk a kiszámított skaláris szorzatból? Hogyan?

123. (E) Bizonyítsd be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő!

124. (E) Bizonyítsd be skaláris szorzat segítségével, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

125. (E) Bizonyítsd be skaláris szorzat segítségével, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével!

126. (E) Adott egy $ABCD$ paralelogramma és egy O pont. Bizonyítd be, hogy ekkor teljesül a következő: $\left(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2\right) - \left(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2\right) = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$!

127. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $ABCD$ téglalap és O a tér tetszőleges pontja, akkor teljesül a következő: $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$!

128. (E) Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, ha A, B, C, D tetszőleges pont!

129. (E) Bizonyítsd be, hogy két vektor összegének és különbségének skaláris szorzata akkor és csakis akkor 0, ha a két vektor hossza egyenlő!

130. (E) Bizonyítsd be, hogy az $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$ vektor merőleges az $\vec{a}$ vektorra!

131. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség: $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \geq a \cdot c + b \cdot d$!

132. (E) Bizonyítsd be, hogy bármely a, b, c valós számra teljesül a következő egyenlőtlenség: $a + b + c \leq \sqrt{3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}$!

133. (E) Bizonyítsd be, hogy $4a + 3b \leq \sqrt{a^2 + 9} \cdot \sqrt{b^2 + 16}$! Mikor teljesül az egyenlőség?

134. (E) Igazold, a következő egyenlőtlenséget! Mikor teljesül az egyenlőség?

$$4a + 3b \leq 5 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

135. (E) Igazold a következő egyenlőtlenséget! (a, b valós számok)

$$12a + 5b \leq 13 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

136. (E) Igazold a következő egyenlőtlenséget! (a, b valós számok)

$$\sqrt{7a + 1} + \sqrt{7b + 1} \leq 3 \cdot \sqrt{2}, \text{ ha } a + b = 1 \; (7a + 1 \geq 0, 7b + 1 \geq 0)$$

137. (E) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges a_1, a_2, b_1, b_2 valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség és egyenlőség akkor áll fenn, ha létezik olyan $\lambda \geq 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda \cdot b_1$ és $a_2 = \lambda \cdot b_2$! (Cauchy - Schwarz egyenlőtlenség)

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

138. (E) Igazold a következő egyenlőtlenséget!

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \leq \sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^3\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)}$$

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(6) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $11-12.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(21) Saját anyagok