Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 0; 1; 2$ .... Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:

Bármely M magasságú csonkagúla térfogata: $V = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$.

Bizonyítás:

Tekintsük a csonkagúla m magasságú kiegészítő gúláját.

Az így kapott nagyobb gúla és a kiegészítő gúla hasonló egymáshoz.

Megfelelő aránypárból írjuk fel a kiegészítő gúla magasságát:

$$\lambda = \frac{M+m}{m} \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = \left(\frac{M+m}{m}\right)^2 = \frac{T_a}{T_f} \quad \rightarrow \quad \frac{M+m}{m} = \sqrt{\frac{T_a}{T_f}} = \frac{\sqrt{T_a}}{\sqrt{T_f}}$$

$$\rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{T_f} \cdot M}{\sqrt{T_a} - \sqrt{T_f}} = \frac{\sqrt{T_f} \cdot M \cdot \left(\sqrt{T_a} + \sqrt{T_f}\right)}{T_a - T_f}$$

A csonkagúla térfogatát megkaphatjuk a két gúla térfogatának különbségeként.

Behelyettesítve a kiegészítő gúla magasságára kapott kifejezést, adódik a bizonyítandó állítás:

$$V_{csg} = V_{ng} - V_{kg} = \frac{T_a \cdot (M+m)}{3} - \frac{T_f \cdot m}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(T_a \cdot M + T_a \cdot m - T_f \cdot m\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[T_a \cdot M + m \cdot \left(T_a - T_f\right)\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[T_a \cdot M + \frac{\sqrt{T_f} \cdot M \cdot \left(\sqrt{T_a} + \sqrt{T_f}\right)}{T_a - T_f} \cdot \left(T_a - T_f\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[T_a \cdot M + \sqrt{T_f} \cdot M \cdot \left(\sqrt{T_a} + \sqrt{T_f}\right)\right] = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$$

Második bizonyítás:

Legyen a kiegészítő gúla magassága m_1, a nagy gúla magassága m_2, a test magassága $M = m_2 - m_1$.

A hasonlóság segítségével felírhatjuk a következőket:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} \quad \rightarrow \quad m_2 = \lambda \cdot m_1$$

$$\lambda^2 = \frac{T_a}{T_f} \quad \rightarrow \quad \lambda = \sqrt{\frac{T_a}{T_f}}$$

$$\lambda^3 = \frac{V_{ng}}{V_{kg}} \quad \rightarrow \quad V_{ng} = \lambda^3 \cdot V_{kg}$$

A csonkagúla térfogatát megkaphatjuk a két gúla térfogatának különbségeként.

Behelyettesítve a kapott kifejezéseket, adódik a bizonyítandó állítás:

$$V_{csg} = V_{ng} - V_{kg} = \lambda^3 \cdot V_{kg} - V_{kg} = V_{kg} \cdot (\lambda^3 - 1) = \frac{T_f \cdot m_1}{3} \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + \lambda + 1) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\lambda \cdot m_1 - m_1) \cdot \left(\lambda^2 \cdot T_f + \lambda \cdot T_f + T_f\right) = \frac{(m_2 - m_1) \cdot \left(T_a + \sqrt{\frac{T_a}{T_f}} \cdot T_f + T_f\right)}{3} =$$

$$= \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$$

Harmadik bizonyítás:

Legyen a kiegészítő gúla magassága m_1, a nagy gúla magassága m_2, a test magassága $M = m_2 - m_1$.

A hasonlóság segítségével felírhatjuk a következőket:

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} \qquad \lambda^2 = \frac{T_a}{T_f} \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{T_a}{T_f} = \frac{{m_2}^2}{{m_1}^2} \qquad \rightarrow \qquad T_a = \lambda \cdot {m_2}^2 \quad T_f = \lambda \cdot {m_1}^2$$

A csonkagúla térfogatát megkaphatjuk a két gúla térfogatának különbségeként.

Behelyettesítve a kapott kifejezéseket, adódik a bizonyítandó állítás:

$$V_{csg} = V_{ng} - V_{kg} = \frac{T_a \cdot m_2}{3} - \frac{T_f \cdot m_1}{3} = \frac{\lambda \cdot {m_2}^3}{3} - \frac{\lambda \cdot {m_1}^3}{3} = \frac{\lambda}{3} \cdot ({m_2}^3 - {m_1}^3) =$$

$$= \frac{\lambda}{3} \cdot (m_2 - m_1) \cdot ({m_2}^2 + m_2 \cdot m_1 + {m_1}^2) =$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{3} \cdot ({m_2}^2 \cdot \lambda + m_2 \cdot m_1 \cdot \lambda + {m_1}^2 \cdot \lambda) = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$$

■

TÉTEL:

Bármely M magasságú csonkakúp térfogata: $V = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3} = \frac{\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right) \cdot M \cdot \pi}{3}$.

<u>Bizonyítás:</u>

Tekintsük a csonkakúp $x - M$ magasságú kiegészítő kúpját (az x a nagy kúp magassága).

Az így kapott nagyobb kúp és a kiegészítő kúp hasonló egymáshoz.

Megfelelő aránypárból írjuk fel a nagy kúp magasságát:

$$\lambda = \frac{x}{R} = \frac{x - M}{r} \qquad \rightarrow \qquad x - M = \frac{x \cdot r}{R} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{M \cdot R}{R - r}$$

A csonkakúp térfogatát megkaphatjuk a két kúp térfogatának különbségeként.

Behelyettesítve a kapott kifejezéseket, adódik a bizonyítandó állítás:

$$V = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot x}{3} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot (x - M)}{3} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot x}{3} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{x \cdot r}{R}}{3} = \frac{R^3 \cdot \pi \cdot x}{3R} - \frac{r^3 \cdot \pi \cdot x}{3R} = \frac{\left(R^3 - r^3\right) \cdot \pi \cdot x}{3R} =$$

$$= \frac{(R - r) \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi \cdot \frac{M \cdot R}{R - r}}{3R} = \frac{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi \cdot M}{3} = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$$

Második bizonyítás:

Tekintsük a csonkakúp y magasságú kiegészítő kúpját.

Az így kapott nagyobb kúp és a kiegészítő kúp hasonló egymáshoz.

Megfelelő aránypárból írjuk fel a nagy kúp magasságát:

$$\lambda = \frac{y + M}{y} = \frac{2R}{2r} \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{M}{y} = \frac{R}{r} \qquad \rightarrow \qquad (R - r) \cdot y = M \cdot r$$

A csonkakúp térfogatát megkaphatjuk a két kúp térfogatának különbségeként.

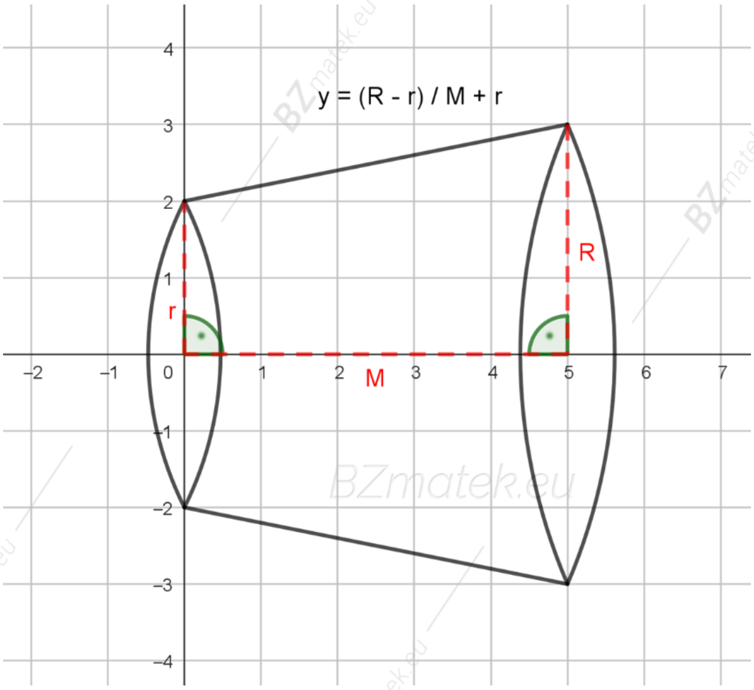
Behelyettesítve a kapott kifejezést, adódik a bizonyítandó állítás:

$$V = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot (M + y)}{3} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot y}{3} = \frac{\left[R^2 \cdot M + \left(R^2 - r^2\right) \cdot y\right] \cdot \pi}{3} = \frac{\left[R^2 \cdot M + (R + r) \cdot (R - r) \cdot y\right] \cdot \pi}{3} =$$

$$= \frac{\left[R^2 \cdot M + (R + r) \cdot M \cdot r\right] \cdot \pi}{3} = \frac{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi \cdot M}{3} = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$$

Harmadik bizonyítás:

Forgassuk meg az $y = \frac{R-r}{M} \cdot x + r$ egyenletű egyenest az x – tengely körül a $[0; M]$ intervallumon:



$$V = \pi \cdot \int_0^M \left(\frac{R-r}{M} \cdot x + r\right)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^M \left[\left(\frac{R-r}{M}\right)^2 \cdot x^2 + r^2 + 2 \cdot r \cdot \left(\frac{R-r}{M}\right) \cdot x\right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[\left(\frac{R-r}{M}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r^2 \cdot x + 2 \cdot r \cdot \left(\frac{R-r}{M}\right) \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^M =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{R^2 - 2 \cdot r \cdot R + r^2}{M^2} \cdot \frac{M^3}{3} + r^2 \cdot M + \frac{R \cdot r - r^2}{M} \cdot M^2\right) =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{(R^2 - 2 \cdot r \cdot R + r^2) \cdot M}{3} + r^2 \cdot M + (R \cdot r - r^2) \cdot M\right] =$$

$$= \pi \cdot \frac{M}{3} \cdot (R^2 - 2 \cdot r \cdot R + r^2 + 3 \cdot r^2 + 3 \cdot R \cdot r - 3 \cdot r^2) =$$

$$= \pi \cdot \frac{M}{3} \cdot (R^2 + r \cdot R + r^2) = \frac{(R^2 \cdot \pi + R \cdot r \cdot \pi + r^2 \cdot \pi) \cdot M}{3} = \frac{\left(T_a + T_f + \sqrt{T_a \cdot T_f}\right) \cdot M}{3}$$

■

TÉTEL:
Bármely csonkakúp felszíne: $A = [R^2 + r^2 + (R + r) \cdot a] \cdot \pi$.

<u>Bizonyítás:</u>
Az alaplap területe $T_a = R^2 \cdot \pi$, a fedőlap területe pedig $T_f = r^2 \cdot \pi$.

Legyen a kiegészítő kúp alkotója x.

Az így kapott nagyobb kúp és a kiegészítő kúp hasonló egymáshoz.

Megfelelő aránypárból írjuk fel a kiegészítő kúp alkotóját:

$$\lambda = \frac{x}{r} = \frac{x + a}{R} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{a \cdot r}{R - r}$$

Az egyenes csonkakúp palástja kiterítve egy körgyűrűcikk, melynek két sugara x és $x + a$, a hozzájuk tartozó körívek hossza pedig $2 \cdot r \cdot \pi$ és $2 \cdot R \cdot \pi$.

Behelyettesítve a kiegészítő kúp alkotójára kapott kifejezést, a palást területe a következő:

$$T_p = \frac{(x + a) \cdot 2 \cdot R \cdot \pi}{2} - \frac{x \cdot 2 \cdot r \cdot \pi}{2} = (x + a) \cdot R \cdot \pi - x \cdot r \cdot \pi = a \cdot R \cdot \pi + x \cdot \pi \cdot (R - r) =$$

$$= a \cdot R \cdot \pi + \frac{a \cdot r}{R - r} \cdot \pi \cdot (R - r) = (R + r) \cdot a \cdot \pi$$

Ebből adódik a bizonyítandó állítás:

$$A = R^2 \cdot \pi + r^2 \cdot \pi + (R + r) \cdot a \cdot \pi = [R^2 + r^2 + (R + r) \cdot a] \cdot \pi.$$

Második bizonyítás:

Legyen d a gyűrű vastagsága, q pedig a középkör sugara.

Ekkor felírhatjuk a következőt:

$$q = r + \frac{d}{2} = r + \frac{R-r}{2} = \frac{2r+R-r}{2} = \frac{R+r}{2} \qquad \rightarrow \qquad R + r = 2 \cdot q$$

A körgyűrű területe:

$$T_{gy} = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi = (R-r) \cdot (R+r) \cdot \pi = d \cdot 2 \cdot q \cdot \pi = K_{középkör} \cdot d$$

A körgyűrű cikk területe:

$$T_{gyc} = T_{gy} \cdot \frac{\alpha}{360°} = d \cdot 2 \cdot q \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = d \cdot (R+r) \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} =$$

$$= d \cdot \left(R \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} + r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} \right) = d \cdot \left(\frac{i_R}{2} + \frac{i_r}{2} \right) = \frac{(2 \cdot R \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi) \cdot d}{2}$$

A csonkakúp palástja olyan körgyűrűcikk, melynek vastagsága a test alkotója:

$$T_p = \frac{(2 \cdot R \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi) \cdot a}{2} = \frac{(R+r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot a}{2} = (R+r) \cdot \pi \cdot a$$

■