Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Vektor műveletek, vektorok koordináta-rendszerben

DEFINÍCIÓ: (Vektor)
Az egyenlő hosszúságú és egyirányú irányított (kezdő és végponttal rendelkező) szakaszoknak a halmazát vektornak nevezzük. Jele: $\vec{v}$; $\underline{v}$; $\overrightarrow{AB}$ (ahol A a vektor kezdőpontja, B a végpontja).

Megjegyzés:

- *A vektor másképpen iránnyal rendelkező mennyiség.*
- *A vektort a reprezentánsával ábrázoljuk.*

DEFINÍCIÓ: (Vektor hossza)
A vektort meghatározó irányított szakasz hossza a vektor abszolútértéke. Jele: $|\vec{v}|$; $\|\vec{v}\|$.

DEFINÍCIÓ: (Egyállású vektorok)
Két vektort egyállásúnak (párhuzamosnak) nevezünk, ha a rájuk illeszkedő egyenesek párhuzamosak, vagy egybeesnek.

DEFINÍCIÓ: (Vektor iránya)
A vektort tartalmazó és a vektorral közös kezdőpontú félegyenes irányát a vektor irányának nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Egyirányú vektorok)
Két vektort egyirányúnak tekintünk, ha párhuzamosak és ugyanabba az irányba mutatnak.

Megjegyzés:
Ha a két vektor párhuzamos, de nem egyirányúak, akkor ellentétes irányúak.

DEFINÍCIÓ: (Ellentett vektor)
Ellentett vektornak nevezzük azt a vektort, amelynek nagysága megegyezik az eredeti vektor nagyságával, iránya pedig ellentétes. Jele: $-\vec{v}$.

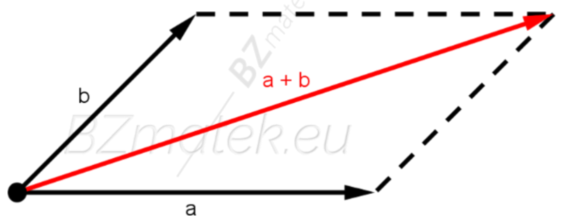
DEFINÍCIÓ: (Egyenlő vektorok)
Két vektort egyenlőnek tekintünk, ha van közös reprezentánsuk, vagyis egyirányúak és egyenlő nagyságúak.

DEFINÍCIÓ: (Zérusvektor)
Zérusvektornak (nullvektornak) nevezzük azt a vektort, amelynek kezdő és végpontja megegyezik. Jele: $\vec{0}$.

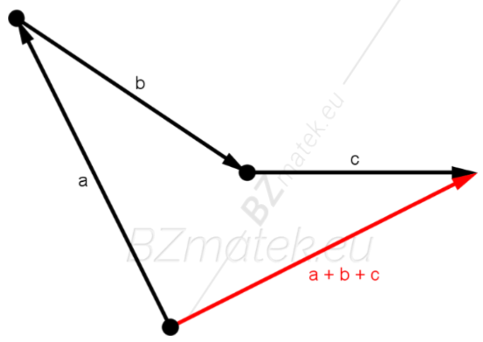
Megjegyzés:
A zérus vektor nagysága 0*, iránya pedig tetszőleges.*

Vektorok összegének meghatározása:

- Paralelogramma szabály:
  Ez a módszer két (egymással nem párhuzamos) vektor összeadása esetén használható. A két vektort közös kezdőpontba toljuk, majd megrajzoljuk az általuk kifeszített paralelogrammát. Az összegvektor a közös kezdőpontból induló átlóvektor.

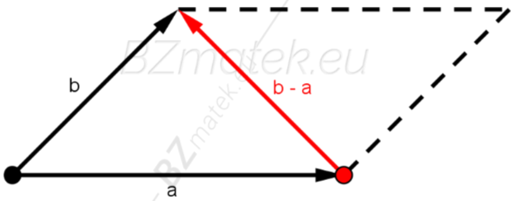


- Összefűzési (háromszög) szabály:
  Ez a módszer több (akár párhuzamos) vektor összeadása esetén alkalmazható. A vektorokat összefűzzük úgy, hogy az egyik vektor végpontja legyen a következő vektor kezdőpontja. Az összegvektor (eredővektor) a szabad kezdőpontból mutat a szabad végpontba.



Vektorok különbségének meghatározása:

A két vektort közös kezdőpontba toljuk. A különbségvektor a kivonandó vektor végpontjából mutat a kisebbítendő vektor végpontjába.



Megjegyzés:

A kivonást elvégezhetjük az ellentett vektor hozzáadásával is. Jelöléssel: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Vektor skalárral való szorzása:

Az $\vec{a}$ vektornak egy λ valós számmal, skalárral való szorzatán, azt a $\lambda \cdot \vec{a}$ vektort értjük, amelynek hossza az $\vec{a}$ hosszának λ – szorosa, iránya pedig:

- $\vec{a}$ irányával megegyezik, ha $\lambda > 0$
- $\vec{a}$ irányával ellentétes, ha $\lambda < 0$
- tetszőleges, ha $\lambda = 0$ (mert ekkor zérus vektor).

Megjegyzés:

Egy vektornak számmal történő szorzása nyújtást jelent, ha $|\lambda| > 1$ *és zsugorítást, ha* $|\lambda| < 1$.

Vektor műveletek tulajdonságai:

- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
- $\lambda \cdot \mu \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a})$

Megjegyzés:

- *A vektorok kivonása nem kommutatív művelet:* $(\vec{a}-\vec{b})$ *és* $(\vec{b}-\vec{a})$ *ellentettvektorok.*

- *Ha* $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, *akkor* $(\vec{a}+\vec{b})$ *merőleges az* $(\vec{a}-\vec{b})$ *– re (és fordítva), mert a két vektor által kifeszített paralelogramma rombusz, melynek átlói merőlegesen felezi kegymást.*

- *Ha* $\vec{a}$ *merőleges a* $\vec{b}$ *– re, akkor* $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ *(és fordítva), mert a vektorok által kifeszített paralelogramma téglalap, melynek átlói egyenlő hosszúak.*

Vektorok felbontása:

DEFINÍCIÓ: (Lineáris kombináció)
Ha $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ tetszőleges vektorok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ pedig valós számok, akkor az $\vec{c}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{v_1}+\dots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{v_k}$ vektort a $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

TÉTEL: (Vektor felbonthatóság tétele)
Legyen az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ két egymással nem párhuzamos és nem nullvektor a síkban. Ekkor a velük egysíkú tetszőleges $\vec{c}$ vektor (sorrendtől eltekintve) egyértelműen előállítható az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ lineáris kombinációjaként, vagyis felbontható az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Jelöléssel: $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbb{R})$.

DEFINÍCIÓ: (Bázis vektor)
Egysíkú vektorok halmazában megadva egy nem párhuzamos vektorok alkotta $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorpárt, azt mondjuk, hogy egy bázist adtunk meg. Ha $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}$, akkor a $(\lambda;\ \mu)$ rendezett valós számpár tagjait a $\vec{c}$ vektornak, az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ bázisvektorokra (alapvektorokra) vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Jelöléssel: $\vec{c}_{(a;b)}\ (\lambda;\mu)$.

Megjegyzés:

- *A továbbiakban speciális alapvektorokból álló (ortonormált) bázist használunk: bázisvektorok* $\vec{\imath}$ *és* $\vec{\jmath}$; $|\vec{\imath}|=|\vec{\jmath}|=1$ *(egységvektorok) és* $\vec{\jmath}$ *az* $\vec{\imath}$ *- nek* $(+\,90°)$ *- os elforgatottja.*

- *A sík egy adott pontjával (az origóval) együtt az* $\vec{\imath}$ *és* $\vec{\jmath}$ *vektorpár Descartes - féle (derékszögű) koordináta – rendszert alkot.*

- *Ha* $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{\imath}+\mu\cdot\vec{\jmath}$, *akkor a* λ *és* μ *együtthatókat a* $\vec{c}$ *derékszögű koordinátáinak nevezzük. Jele:* $\vec{c}\ (\lambda;\mu)$.

- *Ha egy vektort elosztjuk a hosszával, akkor a vele egyállású, azonos irányú egységvektort kapjuk. Jelöléssel:* $\overrightarrow{v_e}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

TÉTEL:
Adott bázis esetén az egysíkú vektorok és a λ, μ koordinátákból álló rendezett számpárok halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető úgy, hogy minden vektorhoz az adott bázisra vonatkozó koordinátái alkotta számpárt rendeljük hozzá.

DEFINÍCIÓ: (Helyvektor)
Amennyiben a sík pontját egy rögzített (vonatkoztatási) pontból kiinduló vektorral jelöljük ki, akkor ezt a ponthoz tartozó vektort, a pont helyvektorának nevezzük.

Megjegyzés:

- *A derékszögű koordináta - rendszerben egy pont helyvektora az origóból a pontba mutató vektor.*
- *A derékszögű koordináta - rendszerben megadott helyvektor jellemezhető egy rendezett számpárral, amely megegyezik a vektor végpontjának koordinátáival.*
- *A koordináta – rendszerben bármely vektorhoz egyértelműen létezik egy vele egyenlő nagyságú helyvektor.*
- *Ha a vektor kezdőpontja nem az origó, akkor szabad vektornak nevezzük.*
- *Az $\vec{i}$ vektor az $(1; 0)$ pontnak, a $\vec{j}$ vektor a $(0; 1)$ pontnak a helyvektora.*

Számolás koordinátákkal adott vektorokkal:

- Vektorok összegének és különbségének koordinátái:

TÉTEL:
Két vektor összegének, illetve különbségének koordinátáit megkaphatjuk, ha a megfelelő koordinátákat összeadjuk, illetve kivonjuk.

Jelöléssel:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\,(a_1; a_2)\\[2ex] \vec{b}\,(b_1; b_2)\end{array}\right\} \quad \rightarrow \qquad \vec{a}+\vec{b}\,(a_1+b_1; a_2+b_2) \qquad\qquad \vec{a}-\vec{b}\,(a_1-b_1; a_2-b_2)$$

- Kezdő és végponttal adott vektor koordinátái:

TÉTEL:
A kezdő és végponttal adott vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

Jelöléssel:

$$\left.\begin{matrix} A\ (a_1; a_2) \\ B\ (b_1; b_2) \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\ (b_1 - a_1; b_2 - a_2) \qquad \overrightarrow{BA}\ (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

- Vektor számszorosának koordinátái:

TÉTEL:
Egy vektor számszorosának koordinátáit megkaphatjuk, ha a vektor mindkét koordinátáját megszorozzuk az adott számmal.

Jelöléssel: $\vec{a}\ (a_1; a_2) \quad \rightarrow \quad \lambda \cdot \vec{a}\ (\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$

- Vektorok hossza:

TÉTEL:
Egy koordinátákkal adott vektor hossza egyenlő a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével.

Jelöléssel: $\vec{a}\ (a_1; a_2) \quad \rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$

<u>*Megjegyzés:*</u>
Ha $A\ (a_1; a_2)$ *és* $B\ (b_1; b_2)$, *akkor* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

- Vektor 90° - os elforgatottjának (merőleges vektorok) koordinátái:

TÉTEL:
Egy vektorra merőleges vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha az adott vektor két koordinátáját felcseréljük és az egyik előjelét megváltoztatjuk.

Jelöléssel: $\vec{a}\ (a_1; a_2) \ \rightarrow$ pozitív irányba: $\vec{a}'\ (-a_2; a_1) \ \rightarrow$ negatív irányba: $\vec{a}'\ (a_2; -a_1)$

<u>Vektorok térben:</u>

TÉTEL:
Legyen $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ olyan nullvektortól különböző, páronként nem párhuzamos vektorok, amelyekre teljesül, hogy egyik sem illeszkedik a másik kettő által meghatározott síkra. Ekkor a tér tetszőleges $\vec{v}$ vektora (sorrendtől eltekintve) egyértelműen előállítható az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ lineáris kombinációjaként, vagyis felbontható az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Jelöléssel: $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \tau \cdot \vec{c}$ $(\lambda,\ \mu,\ \tau \in \mathbb{R})$.

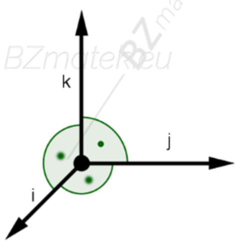
DEFINÍCIÓ:
A nem egysíkú vektorok halmazában megadva az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorhármast, azt mondjuk, hogy egy bázist adtunk meg. Ha $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \tau \cdot \vec{c}$, akkor a $(\lambda;\ \mu;\ \tau)$ rendezett valós számhármas tagjait a $\vec{v}$ vektornak az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ bázisvektorokra (alapvektorokra) vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Jelöléssel: $\vec{c}_{(a;b;c)}\ (\lambda; \mu; \tau)$.

<u>Megjegyzés:</u>

- *Az egysíkú vektorokkal kapcsolatos korábbi észrevételek a térben ugyanúgy alkalmazhatóak.*
- *A számításokban speciális $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ és $\vec{k}$ alapvektorokat használunk a következő feltételekkel:*

  1. $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}|$
  2. *Az egységvektorok egymásra páronként merőlegesek: $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}, \vec{\jmath} \perp \vec{k}, \vec{\imath} \perp \vec{k}$.*
  3. *Az $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ és $\vec{k}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak, vagyis a $\vec{k}$ végpontja irányából nézve az $\vec{\imath}$ $(+90°)$ - os elforgatottja a $\vec{\jmath}$.*

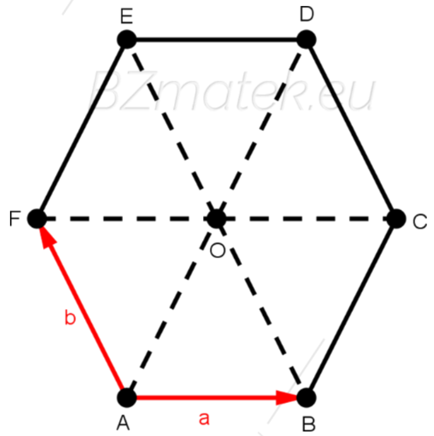
- *A jobbsodrású rendszer elnevezés onnan származik, hogy a jobb kezünk hüvelyk -, mutató - és középső ujja ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.*
- *Térben az egymásra páronként merőleges, jobbrendszert alkotó $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ és $\vec{k}$ egységvektorok segítségével, a tér bármely $\vec{v}$ vektora egyértelműen felbontható e vektorokkal párhuzamos összetevőkre. Jelöléssel: $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{\imath} + \mu \cdot \vec{\jmath} + \tau \cdot \vec{k}$ $(\lambda,\ \mu,\ \tau \in \mathbb{R})$.*



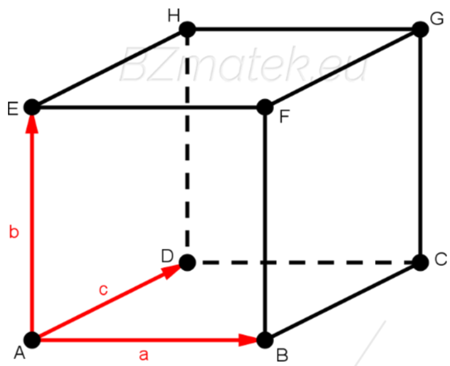
Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

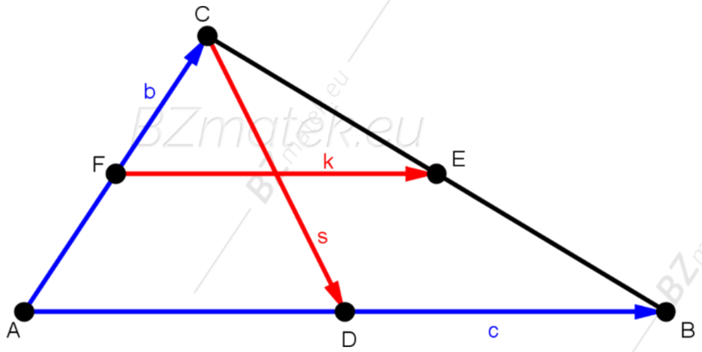
1. **(K) Tekintsük az alábbi szabályos hatszögben a következő vektorokat: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$. Add meg az $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF}$ vektorok koordinátáit az $(\vec{a}; \vec{b})$ koordinátarendszerben!**



2. **(K) Tekintsük az alábbi kockában a következő vektorokat: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AE}$ és $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$. Fejezd ki az $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{GD}$ vektorokat az $\vec{a}; \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével!**



3. (K) Tekintsük az alábbi háromszögben a következő vektorokat: $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ és $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Fejezd ki a C csúcsból induló súlyvonalra illeszkedő $\overrightarrow{CD} = \vec{s}$ vektort és a c oldalhoz tartozó középvonalra illeszkedő $\overrightarrow{FE} = \vec{k}$ vektort a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével!



4. (K) Írd fel az $A\,(-2;5)$ és $B\,(3;-4)$ pontokba mutató $\vec{a}$ és $\vec{b}$ helyvektorokat az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ bázisvektorok segítségével!

5. (K) Írd fel az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$ vektorokat az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ bázisvektorok segítségével, ha adott az $A\,(7;-1)$ és $B\,(-5;9)$ pont!

6. (K) Egy egyenesre esik – e az $A\,(-2;1)$, $B\,(3;4)$ és $C\,(2018;1213)$ pont?

7. (K) Adott az $\vec{a}\,(7;\ -1)$ és $\vec{b}\,(-13;9)$ helyvektor. Határozd meg a $2\vec{a}$; $-3\vec{b}$; $5\vec{a}+\vec{b}$ és $4\vec{b}-\vec{a}$ vektorok koordinátáit az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ bázisvektorok segítségével!

8. (K) Adott az $\vec{a}\,(-4;\ 11)$ és $\vec{b}\,(8;-7)$ helyvektor. Határozd meg a $3\vec{a}$; $-5\vec{b}$; $6\vec{a}+\vec{b}$ és $9\vec{b}-2\vec{a}$ vektorok koordinátáit!

9. (K) Ábrázold a $\vec{v}\,(-6;4)$ helyvektort, számítsd ki a hosszát és bontsd fel az alábbi vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

a) **$\vec{i}\,(1;0)$ és $\vec{j}\,(0;1)$**

b) **$\vec{a}\,(-4;2)$ és $\vec{b}\,(1;-8)$**

10. (E) Ábrázold a $\vec{v}\,(3; -4; 5)$ – t, számítsd ki a hosszát és bontsd fel az alábbi vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

a) $\vec{i}\,(1; 0; 0), \vec{j}\,(0; 1; 0)$ **és** $\vec{k}\,(0; 0; 1)$

b) $\vec{a}\,(1; -2; 2), \vec{b}\,(3; -4; 1)$ **és** $\vec{c}\,(1; -3; 2)$

11. (E) Adott az $\vec{a}\,(1; -3; 2)$ és a $\vec{b}\,(6; 4; -9)$ vektor. Határozd meg a $2\vec{a} + \vec{b}$ és az $\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$ vektorok koordinátáit!

12. (K) Határozd meg a B és C pont koordinátáját, ha adott az $A\,(2; 7)$ pont, illetve az $\overrightarrow{AB}\,(-1; 3)$ és a $\overrightarrow{CA}(5; -4)$ vektor!

13. (K) Számítsd ki az $\vec{a}\,(-3; 4)$ helyvektor hosszát!

14. (K) Számítsd ki annak az $\vec{a}$ vektornak a hosszát, amelynek kezdőpontja $A\,(5; 7)$ és végpontja $B\,(-1;\ -2)$!

15. (K) Számítsd ki az $ABC\,\Delta$ kerületét, melynek csúcspontjai: $A\,(1; 3), B\,(2; -5)$, $C\,(-4; 7)$!

16. (K) Adj meg három olyan vektort, amely merőleges az $\vec{a}\,(-7; 6)$ vektorra!

17. (K) Adott egy paralelogramma három csúcsa: $(-3; 4), (5; -2)$ és $(6; 8)$. Határozd meg a paralelogramma negyedik csúcsának koordinátáit!

18. (K) Adott egy négyzet két szomszédos csúcsa: $(-1; 3)$ és $(5; -4)$. Határozd meg a négyzet hiányzó csúcsainak koordinátáit!

19. (K) Egy négyzet egyik csúcsa $A\,(-1; 3)$, középpontja $K\,(1; 4)$. Határozd meg a többi csúcs koordinátáit!

20. (K) Egy rombusz két átellenes csúcsa $A\,(-10;4), C(6;-8)$. Határozd meg a hiányzó két csúcs koordinátáit, ha a BD átló hossza fele az AC átlóénak!

21. (K) Egy téglalap két csúcsa a $(-2;4)$ és $(7;16)$ pontok. Határozd meg a hiányzó csúcsok koordinátáit, ha tudjuk, hogy az adott pontok által meghatározott oldal hossza háromszorosa a másik oldal hosszának!

22. (K) Legyenek A, B, C, D, E a sík tetszőleges pontjai. Határozd meg az α valós szám értékét, ha $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\alpha\cdot\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}\right)$!

23. (E) Az ABC háromszög AB oldalának A – hoz közelebbi negyedelőpontja N, B – hez közelebbi negyedelőpontja M. Fejezd ki a $\overrightarrow{CM}$ – et és $\overrightarrow{CN}$ – et $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ segítségével (a két vektor lineáris kombinációjaként)!

24. (E) Az ABC háromszögben $AB=4, BC=5, CA=6$. Az A csúcsból induló belső szögfelező metsze a BC oldalt P – ben. Határozd meg az α és β értékét, ha $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}$!

25. (E) Az ABC háromszög BC oldalának C – n túli meghosszabbításán úgy vettük fel a P pontot, hogy $BP:CP=9:5$. Bontsd fel az $\overrightarrow{AP}$ – t $\overrightarrow{AB}$ – ral és $\overrightarrow{AC}$ – ral párhuzamos összetevőkre!

26. (E) Határozd meg a következő vektorokkal egyirányú egységvektorok koordinátáit!

a) $\vec{a}\,(4;-3)$

b) $\vec{b}\,(1;4;5)$

27. (K) Határozd meg az $\alpha=120°, \beta=225°$ és $\gamma=330°$ irányszögű egységvektorok koordinátáit!

28. (K) Számítsd ki az $\vec{a}\,(-5,-2)$ és $\vec{b}\,(1;4)$ vektorok által bezárt szöget!

29. (E) Legyen O az $ABC\,\Delta$ köré írt kör középpontja, M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$!

30. (E) Bizonyítsd be, hogy az $ABC\,\Delta$, S súlypontjából a csúcsokba vezető vektorok összege 0!

31. (E) Legyen az $ABC\,\Delta$ súlypontja S, az $XYZ\,\Delta$ súlypontja pedig Q. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = 3 \cdot \overrightarrow{SQ}$!

32. (E) Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges O pontból az $ABC\,\Delta$ csúcsaiba vezető vektorok összege egyenlő az O pontból az oldalfelező pontokba vezető vektorok összegével!

33. (E) Bizonyítsd be, hogy ha $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ egy hatszög egymás utáni oldalfelező pontjai, akkor $\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_3F_4} + \overrightarrow{F_5F_6} = 0$.

34. (E) Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3 \cdot \overrightarrow{AD}$, ha A, B, C, D, E, F egy szabályos hatszög csúcsai!

35. (E) Az O középpontú kör AB és CD húrja merőlegesek egymásra, egyeneseik metszéspontja M. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$!

36. (E) Legyen az $ABCD$ paralelogramma síkjában egy tetszőleges pont O. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!

37. (E) Bizonyítsd be, hogy egy tetszőleges $ABCD$ négyszög középvonalainak M metszéspontjából a négyszög csúcsaiba mutató vektorok összege 0!

38. (E) Az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F. Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye II.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(10) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(12) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(13) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(17) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(18) Saját anyagok