Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Két vektor összegének, illetve különbségének koordinátáit megkaphatjuk, ha a megfelelő koordinátákat összeadjuk, illetve kivonjuk.

Bizonyítás:
Tekintsük az $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1; b_2)$ vektorokat.

A két vektor összegét felírhatjuk a következőképpen:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j})+(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j})=(a_1+b_1)\cdot\vec{i}+(a_2+b_2)\cdot\vec{j}.$$

A két vektor különbségét felírhatjuk a következőképpen:

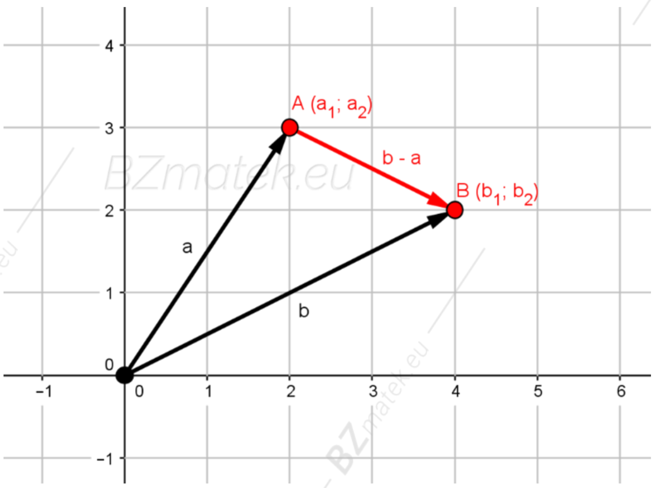
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j})-(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j})=(a_1-b_1)\cdot\vec{i}+(a_2-b_2)\cdot\vec{j}.$$

Ezek alapján adódnak az állítások: $\vec{a}+\vec{b}\ (a_1+b_1; a_2+b_2)$ és $\vec{a}-\vec{b}\ (a_1-b_1; a_2-b_2)$.

■

TÉTEL:
A kezdő és végponttal adott vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont megfelelő koordinátáit.

Bizonyítás:
Tekintsük az $A\ (a_1; a_2)$ és $B\ (b_1; b_2)$ pontokat és legyenek a pontokba mutató helyvektorok: $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ és $\vec{b}\ (b_1; b_2)$.



Ekkor a következőt kapjuk: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$.

Ezek alapján adódik az állítás: $\overrightarrow{AB}\ (b_1-a_1; b_2-a_2)$.

■

TÉTEL:
Egy vektor számszorosának koordinátáit megkaphatjuk, ha a vektor mindkét koordinátáját megszorozzuk az adott számmal.

Bizonyítás:
Tekintsük az $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ vektort.

A vektor számszorosát felírhatjuk a következőképpen:

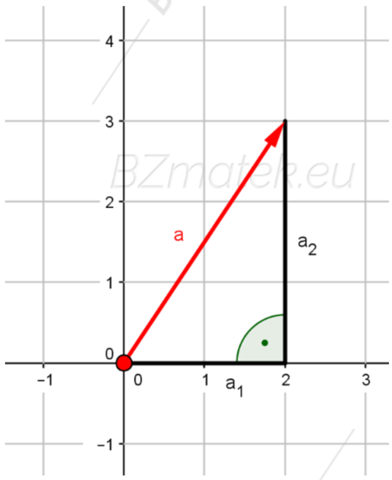
$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}) = (\lambda \cdot a_1) \cdot \vec{i} + (\lambda \cdot a_2) \cdot \vec{j}$.

Ezek alapján adódik az állítás: $\lambda \cdot \vec{a}\ (\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$.

■

TÉTEL:
Egy koordinátákkal adott vektor hossza egyenlő a koordináták négyzetösszegének négyzetgyökével.

Bizonyítás:
Tekintsük az $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ vektort és helyezzük el ezt koordináta – rendszerben, mint helyvektor.



A derékszögű háromszögben Pitagorasz – tétel segítségével írjuk fel a következőt:

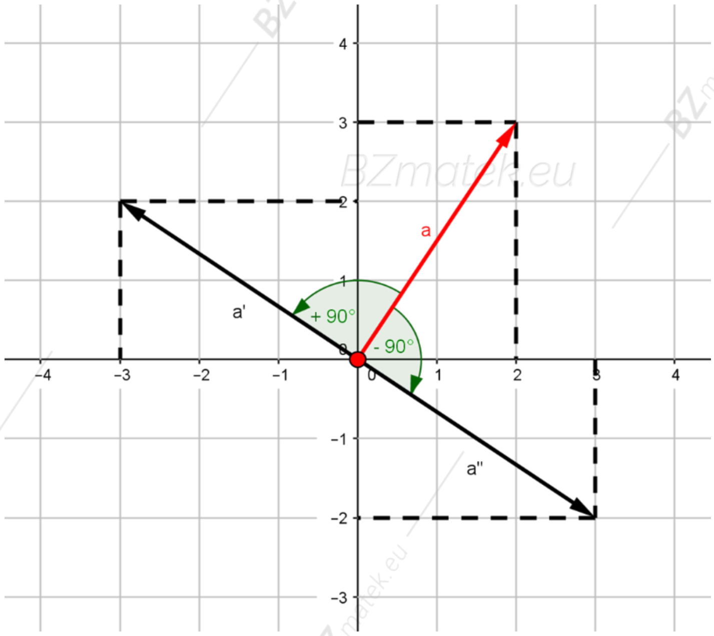
$|\vec{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$.

Ezek alapján adódik az állítás: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$.

■

TÉTEL:
Egy vektorra merőleges vektor koordinátáit megkaphatjuk, ha az adott vektor két koordinátáját felcseréljük és az egyik előjelét megváltoztatjuk.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük az $\vec{a}\ (a_1; a_2)$ vektort és helyezzük el ezt koordináta – rendszerben, mint helyvektor.



Az $\vec{a}$ vektor $+\,90°$ - os elforgatottjának koordinátái: $\vec{a}'\ (-a_2; a_1)$.

Az $\vec{a}$ vektor $-\,90°$ - os elforgatottjának koordinátái: $\vec{a}''\ (a_2; -a_1)$.

■