Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Tetszőleges α és β szögekre teljesül a következő: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Bizonyítás:
Tekintsük a koordináta – rendszerben a következő vektorokat: az $\vec{a}$ egységvektort, melynek irányszöge α; a $\vec{b}$ egységvektort, melynek irányszöge β $(\alpha > \beta)$.

Ekkor a két egységvektor koordinátái: $\vec{a}\,(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$ és $\vec{b}\,(\cos\beta\,;\sin\beta)$.

Írjuk fel a két egységvektor skaláris szorzatát a következőképpen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

■

TÉTEL:
Tetszőleges α és β szögekre teljesül a következő: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Bizonyítás:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

■

TÉTEL:
Tetszőleges α és β szögekre teljesül a következő: $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

Bizonyítás:

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos[90° - (\alpha - \beta)] = \cos[(90° - \alpha) + \beta] =$$

$$= \cos(90° - \alpha) \cdot \cos\beta - \sin(90° - \alpha) \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

■

TÉTEL:
Tetszőleges α és β szögekre teljesül a következő: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

Bizonyítás:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin(-\beta) \cdot \cos\alpha =$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

■

TÉTEL:
Tetszőleges α szögre teljesülnek a következők:

- $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a két szög összegére vonatkozó addíciós tételeket.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha.$$

■

TÉTEL:
Tetszőleges α és β szögekre teljesül a következő: $tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$.

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a szögfüggvényekre vonatkozó összefüggéseket, illetve a két szög összegére vonatkozó addíciós tételeket.

$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

■

TÉTEL:
Tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ szögekre teljesülnek a következők:

- $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$
- $\sin\gamma - \sin\delta = 2 \cdot \cos\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma-\delta}{2}$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a szögfüggvényekre vonatkozó összefüggéseket, illetve a két szög összegére vonatkozó addíciós tételeket.

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha - (\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha) =$$

$$= 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Legyen: $\gamma = \alpha + \beta$ és $\delta = \alpha - \beta$.

Ezeket összeadva, rendezés után a következő adódik: $\alpha = \frac{\gamma+\delta}{2}$.

Az elsőből kivonva a másodikat, rendezés után a következő adódik: $\beta = \frac{\gamma-\delta}{2}$.

Végül helyettesítsük a kapott kifejezéseket az előző összefüggésbe:

$$\sin\gamma - \sin\delta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

■