

Színusz – tétel, koszínusz - tétel

TÉTEL: (Szinusz - tétel)

Bármely háromszögben az oldalak és a velük szemközti szögek színuszainak aránya egyenlő. Jelöléssel: $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

Megjegyzés:

- A színusz - tétel további alakjai: $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$; $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$.
- A háromszög további területképlete: $T_{\Delta} = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \gamma}$.

TÉTEL: (Szinusz - tétel geometriai alakja)

Bármely háromszögben az egyik oldal és a hozzá tartozó szög színuszának hányadosa egyenlő a háromszög köré írt körének átmérőjével. Jelöléssel: $2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

TÉTEL: (Koszínusz - tétel)

Bármely háromszögben egy oldal hosszának a négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldalhossz négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal hosszának és a közbezárt szög koszínuszának a kétszeres szorzatát. Jelöléssel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

Megjegyzés:

- A koszínusz – tételből $\gamma = 90^\circ$ esetén a Pitagorasz – tétel adódik: $c^2 = a^2 + b^2$.
- A színusz – tétel és a koszínusz – tétel nem független egymástól. Megfelelő átalakításokkal eljuthatunk egyikből a másikba.

TÉTEL: (Tangens – tétel)

Bármely háromszögben, ahol $a \neq b$, teljesül a következő: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$.

TÉTEL:

Bármely háromszögben a súlyvonal hossza megkapható a három oldal ismeretében:

$$s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} \quad s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \quad s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

Színusz – tétel alkalmazása:

- 1) Ha adott a háromszög két szöge (ekkor a harmadik is kiszámítható) és egy oldala, akkor a színusz – tétellel kiszámolható bármelyik hiányzó oldal.
- 2) Ha adott a háromszög két oldala és az egyikkel szemközti szöge, akkor színusz – tétellel kiszámolható a másik ismert oldallal szemközti szög. Mivel ekkor a keresett szög színusza adódik, ezért $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ miatt két szög is kapható (a szög és kiegészítő szöge):
 - Ha a két ismert oldal közül a nagyobbikkal szemközti szög van adva, akkor a másikkal szemközti szög csak hegyesszög lehet (kisebb oldallal szemben kisebb szög található), így egyértelműen egy megoldás adódik.
 - Ha a két ismert oldal közül a kisebbikkal szemközti szög van adva, akkor lehet 0; 1 (derékszög) és 2 megoldás is.

Koszínusz – tétel alkalmazása:

- 1) Ha adott a háromszög két oldala és az általuk bezárt szög, akkor a koszínusz – tétellel kiszámolható a harmadik oldal.
- 2) Ha adott a háromszög mindhárom oldala, akkor a koszínusz – tétellel kiszámolható a háromszög bármelyik szöge.

Megjegyzés:

- A színusz - tétel felírásánál célszerű mindig az ismeretlen adatot a számlálóba írunk, mert az egyenlet így könnyebben átrendezhető.
- Színusz – tételt a kisebb oldallal szemben fekvő szög keresésénél célszerű alkalmazni.
- Koszínusz - tétel esetén egyértelműen egy megoldás adódik, mert $\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$, vagyis a másik szög nem lehet a háromszög szöge.

Színusz -; Koszínusz – tételt rendszerező táblázat:

Alapadatok	Tétel	Hiányzó adat
1 oldal és 2 szög	Színusz - tétel	oldalak
2 oldal és a nagyobbbal szemben levő szög	Színusz - tétel	kisebb szög (hegyesszög)
2 oldal és közbezárt szög	Koszínusz - tétel	harmadik oldal
3 oldal	Koszínusz - tétel	szögek

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat

E: emelt szintű feladat

1. (K) Egy háromszög egyik oldala 10 cm hosszú, s a rajta fekvő két szög 50° és 70° . Számítsd ki a hiányzó szöget és oldalakat!
2. (K) Egy háromszög egyik oldala 31 cm . Az adott oldalon lévő szögek 28° és 56° nagyságúak. Mekkora a háromszög legkisebb oldala?
3. (K) Egy háromszög két oldala 5 cm és 7 cm hosszú. A 7 cm - rel szemben levő szöge 50° . Számítsd ki a hiányzó oldalt és szögeket, illetve a háromszög területét!
4. (K) Egy háromszög két oldala 3 cm és 5 cm hosszú. A 3 cm - rel szemben levő szöge 35° . Számítsd ki a hiányzó oldalt és szögeket!
5. (K) Egy háromszög két oldala 10 cm és 20 cm hosszú. A 10 cm - rel szemben levő szöge 30° . Számítsd ki a hiányzó oldalt és szögeket!
6. (K) Egy háromszög két oldala 10 cm és 25 cm hosszú. A 10 cm - rel szemben levő szöge 40° . Számítsd ki a hiányzó oldalt és szögeket!
7. (K) Egy háromszög kerülete 23 cm , két szögének nagysága 44° és 78° . Milyen hosszúak a háromszög oldalai?
8. (K) Egy háromszög szögeinek aránya $2:3:4$, míg a kerülete 18 cm . Mekkora a háromszög oldalai?
9. (K) Egy háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint $2:7:9$. Mekkora az oldalai, ha $a = 50\text{ cm}$?

10. (K) Egy háromszög külső szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint 4: 6: 8. A legkisebb oldala 15 cm. Mekkora a kerülete és területe?
11. (K) Egy háromszög oldalai 2 cm, 6 cm és 7 cm hosszúak. Számítsd ki a szögeit!
12. (K) Egy háromszög oldalai 15 cm, 18 cm és 22 cm. Határozd meg a háromszög legkisebb szögét és a legkisebb oldallal párhuzamos középvonal hosszát!
13. (K) Egy háromszög oldalainak a hosszúságai 7 cm, 8 cm és 9 cm. Határozd meg a háromszög legnagyobb szögét és a legnagyobb oldalhoz tartozó magasság hosszát!
14. (K) A PQR háromszög középvonalai 5 cm, 6 cm és 7 cm hosszúak. Számítsd ki a PQR háromszög szögeit és területét!
15. (K) Egy háromszög oldalainak hossza 16 cm, 26 cm és 27 cm. Szögeit tekintve milyen az adott háromszög?
16. (K) Szögeit tekintve milyen az a háromszög, amelyikben a szokásos jelöléssel $a = 22$ cm, $b = 15$ cm és $\gamma = 13^\circ$?
17. (K) Számítsd ki az ABC háromszög hiányzó oldalainak hosszát, ha $AB = 10$ cm, és az AB oldallal szemben lévő szög 54° , valamint $BC = 3AC$!
18. (K) Szögei szerint milyen az a háromszög, amelyben az oldalhosszúságok aránya 13: 14: 15?
19. (K) Határozd meg annak a hegyesszögű háromszögnek a kerületét, amelyiknek a területe 150 cm², két oldalának hossza 17 cm és 20 cm!
20. (K) Egy háromszög két oldalának aránya 3: 2, az általuk bezárt szög 60° , a harmadik oldala 30 cm. Mekkora az ismeretlen oldalak és szögek?

21. (K) Egy háromszög két oldala 10 cm és 12 cm . Az általuk bezárt szög 67° . Számítsd ki a hiányzó oldalt és szögeket!
22. (E) Egy háromszögben $b = 7\text{ cm}$, $c = 9\text{ cm}$ és $\alpha = 100^\circ$. Számítsd ki a hiányzó szögeket, a harmadik oldal meghatározása nélkül!
23. (K) Egy toronyóra nagymutatójának hossza 7 m , míg kis mutatójának hossza 4 m . Milyen távol lesznek a mutatók végpontjai egymástól délután 5 órakor?
24. (K) Egy háromszög egyik szöge $58^\circ 36'$. Ennek a szögnek a szögfelezője $8,4\text{ cm}$ és a szög csúcsából induló magasság $7,6\text{ cm}$. Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?
25. (K) Egy háromszög területe 84 cm^2 , két szögének nagysága $67,38^\circ$, illetve $53,13^\circ$. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát!
26. (K) Egy háromszög legkisebb oldala 4 cm hosszú, s az egyik szöge 70° . A másik két szögének aránya $5 : 17$. Számítsd ki a háromszög területét!
27. (K) Egy háromszög két oldalának összege 12 cm , az általuk bezárt szög 30° . A háromszög területe 8 cm^2 . Számítsd ki a háromszög oldalait!
28. (E) Egy háromszög egyik szöge 63° - os és a szög szögfelezője a szemközti oldalt 54 cm és 38 cm – es részekre osztja. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
29. (K) Egy háromszög területe 42 cm^2 . Két oldala $7,3\text{ cm}$ és $12,8\text{ cm}$. Mekkora a háromszög harmadik oldala és a szögei?
30. (K) Egy tompaszögű háromszög területe 150 cm^2 , két oldala pedig 16 cm , illetve 24 cm . Mekkora a szögei?

31. (K) Egy háromszög területe 715 m^2 , egyik oldala $53,4 \text{ m}$ hosszú és egy másik oldalával szemközti szöge $38,79^\circ$. Határozd meg a háromszög többi oldalának a hosszát és a háromszög szögeit!
32. (K) Egy háromszögben két oldal hosszúságának különbsége $7,5 \text{ cm}$ és ezen oldalakkal szemben $34,7^\circ$ - os, illetve $76,2^\circ$ - os szög található. Mekkora a háromszög oldalai?
33. (K) Egy háromszögben ismerjük két oldal hosszúságának összegét, ez 12 cm és az összegben szereplő oldalakkal szemközti $45,7^\circ$ - os, illetve $79,3^\circ$ - os szögeket. Mekkora a háromszög oldalai és területe?
34. (E) Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjuk 9 órakor 15 cm , 4 órakor 18 cm távolságra van egymástól?
35. (K) Egy 15 N - os és egy 24 N – os erő hat egy pontszerű testre, az erők által bezárt szög $34,7^\circ$. Mennyi az eredő erő nagysága?
36. (K) Egy 250 N nagyságú erőt bontunk fel két olyan összetevőre, amelyek 54° - os és 18° - os szöget alkotnak vele. Mekkora az összetevők?
37. (K) Egy háromszög két oldala $8,5 \text{ cm}$, illetve $14,6 \text{ cm}$. A hosszabbik megadott oldalt felező súlyvonal $10,4 \text{ cm}$ hosszúságú. Mekkora a háromszög ismeretlen oldala?
38. (K) Egy háromszög három oldala 5 cm , 7 cm és 10 cm hosszú. Számítsd ki a háromszög beírható és köré írható körének területét, illetve a legkisebb oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát!
39. (K) Egy háromszög oldalai 12 cm , 13 cm és 17 cm hosszúak. Add meg a háromszög súlyvonalainak hosszát!
40. (K) Egy háromszög két oldalának hossza 43 cm és 52 cm , az általuk bezárt szög 38° . Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza?

41. (K) Számítsd ki az ABC háromszög s_a súlyvonalának hosszát, ha adott a szokásos jelöléseket alkalmazva $b = 15 \text{ dm}$, $c = 18 \text{ dm}$ és $\alpha = 123^\circ$! Számítsd ki a leghosszabb oldalhoz tartozó magasság hosszát!
42. (E) Egy háromszög két oldalának hossza 16 cm és 8 cm . A harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal pedig 9 cm hosszú. Mekkora a háromszög harmadik oldalának hossza? Mekkora az adott súlyvonal és a háromszög harmadik oldalának hajlásszöge?
43. (E) Egy háromszög két oldal 32 cm és 46 cm hosszú, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza 38 cm . Határozd meg a háromszög legkisebb szögének nagyságát!
44. (E) Egy háromszög egyik oldala 35 cm hosszú, az oldal két végpontjából induló súlyvonalak hossza 33 cm és 27 cm . Határozd meg a háromszög két hiányzó oldalának hosszát!
45. (K) Egy trapéz két párhuzamos oldala $5,4 \text{ cm}$, illetve $18,2 \text{ cm}$. Egyik szára $12,5 \text{ cm}$, a másik szára a hosszabbik alappal $71^\circ 36'$ - es szöget zár be. Számítsd ki a trapéz másik szarát és a területét!
46. (K) Egy szimmetrikus trapéz átlójának hossza 34 cm . Az átló $28,2^\circ$ - os és $33,6^\circ$ - os szögekre osztja a trapéz hegyesszögét. Az utóbbi szög másik szára a trapéz hosszabbik alapja. Számítsd ki a szimmetrikus trapéz oldalainak a hosszát!
47. (K) Egy szimmetrikus trapéz átlója $6,8 \text{ dm}$, rövidebb alapja $2,6 \text{ dm}$, egyik szöge $68^\circ 36'$. Számítsd ki a trapéz kerületét és területét!
48. (K) Egy trapéz hosszabbik alapja 38 cm , egyik szára $17,5 \text{ cm}$. E két oldal által bezárt szög $59^\circ 45'$, az alapon fekvő másik szög $31^\circ 18'$. Mekkora a trapéz ismeretlen oldalai?
49. (K) Egy szimmetrikus trapéz egyik hegyesszöge 57° - os, átlója $33,55 \text{ cm}$, a hosszabbik alapja 37 cm . Mekkora szöget zár be az átló a szimmetrikus trapéz alapjaival? Határozd meg a szárak hosszát!

50. (K) Egy trapéz párhuzamos oldalai 23 cm és 44 cm hosszúak. A 44 cm – es oldalon levő szögei 41° és 57° . Mekkora a trapéz két szára és területe?
51. (K) Egy trapéz alapjai 120 m , illetve 75 m hosszúak, míg szarai 52 m , illetve 86 m hosszúak. Mekkora a trapéz szögei?
52. (K) Egy trapéz egyik átlója 40 cm hosszú. Ez az átló az alapokkal 50° - os, a szárakkal pedig 30° - os és 100° - os szöget zár be. Add meg a trapéz oldalainak hosszát! Milyen hosszú a trapéz másik átlója?
53. (K) Egy paralelogramma területe $457,6\text{ cm}^2$, egyik oldala $14,2\text{ cm}$, egyik szöge $32^\circ 18'$. Számítsd ki a másik oldalt és a hosszabb átlót!
54. (K) Egy paralelogramma egyik szöge 112° . Az adott szöggel szemközi átló hossza 18 cm . Ez az átló a paralelogramma hegyesszögét $2:3$ arányban osztja. Számítsd ki a paralelogramma oldalainak a hosszát!
55. (K) Egy paralelogramma egyik átlójának hossza 12 cm . Az adott átló a paralelogramma egyik szögét $26^\circ 42'$ és $35^\circ 24'$ szögekre osztja. Számítsd ki a paralelogramma oldalainak hosszát és területét!
56. (K) Egy paralelogramma egyik szöge 64° . Ezzel a szöggel szemközi $22,4\text{ cm}$ hosszú átló a paralelogramma másik szögét két olyan részre osztja, amelyek különbsége 42° . Számítsd ki a paralelogramma oldalainak hosszát és a rövidebb oldalhoz tartozó magasság hosszát!
57. (K) Egy paralelogramma hosszabbik oldala 30 cm hosszúságú. A hosszabbik átló a paralelogramma hegyesszögét 20° - os és 42° - os részekre osztja. Milyen hosszú az átló és a hosszabb oldalhoz tartozó magasság?
58. (K) Egy paralelogramma két oldala és az általuk közbezárt szöge: 36 cm , 22 cm , illetve $48^\circ 15'$. Számítsd ki a paralelogramma területét és az adott szögével szemközi átlójának a hosszát!

59. (K) Egy paralelogramma két oldala 49 cm és 63 cm hosszú. Az általuk közbezárt szög 72° . Mekkora a paralelogramma átlói és a hosszabb oldalhoz tartozó magasság?
60. (K) Egy paralelogramma átlói 26 cm , illetve 14 cm hosszúak, az általuk bezárt szög $42^\circ 16'$. Mekkora a paralelogramma oldalai és a szögei?
61. (K) Egy paralelogramma egyik oldala 8 cm hosszú, területe 94 cm^2 , egyik szöge 36° . Mekkora a paralelogramma másik oldala és az átlóinak hossza?
62. (K) Egy paralelogramma területe $169,71\text{ cm}^2$, az átlók hossza 16 cm és 30 cm . Mekkora a paralelogramma oldalai?
63. (K) Egy rombusz oldala 15 cm és a rövidebb átlója 20 cm . Mekkora a rombusz szögei, magassága és területe? Milyen hosszú a másik átló?
64. (K) Egy rombusz egyik szöge 100° , s a hosszabb átlója 12 cm . Mekkora a rombusz kerülete és területe? Milyen hosszú a másik átló?
65. (K) Egy rombusz területe $98,5\text{ cm}^2$, az oldala 10 cm . Mekkora a rombusz magassága és az átlóinak hossza?
66. (K) Egy szabályos 18 szög beírt körének sugara 13 cm . Mekkora a sokszög kerülete, területe, köré írt kör sugara és legrövidebb átlójának hossza? Mennyi különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból?
67. (K) Egy szabályos 20 szög köréírt körének sugara 16 cm . Mekkora a sokszög kerülete, területe, beírt kör sugara és legrövidebb átlójának hossza? Mennyi átlója és szimmetriatengelye van a sokszögnek?
68. (K) Egy szabályos 9 szög oldala 11 cm . Mekkora a sokszög egy belső, illetve egy külső szögének nagysága? Milyen hosszú a legrövidebb átlójának hossza?

69. (K) Egy 25 cm oldalú szabályos sokszög belső szögének nagysága 150° . Mekkora a legrövidebb és leghosszabb átlójának hossza?
70. (K) Egy 10 cm oldalú szabályos sokszögnek 90 darab átlója van. Mekkora a legkisebb és legnagyobb átlójának hossza?
71. (K) Egy szabályos 15 szög legrövidebb átlójának hossza 28 cm . Mekkora a sokszög kerülete, területe, köré írt kör sugara és beírt kör sugara? Mekkora egy belső, illetve egy külső szögének nagysága? Mennyi átlója és szimmetriatengelye van a sokszögnek? Mennyi különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsából?
72. (K) Egy 1500 m hosszúságú hegyi út végén levő torony talpóját az út elején levő pontból $3,9^\circ$ - os, tetőpontját $4,5^\circ$ - os emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a torony?
73. (K) Milyen magas az a fa, melyet egy adott helyen a föld felszínéről 25° - os szögben látunk, majd 10 méterrel közelebből 65° - os szögben?
74. (K) Egy patak két különböző partján levő A és B ponttal jelölt két épület távolságát szeretnénk meghatározni. Ez a távolság közvetlenül nem mérhető le, de tudjuk a patak egyik partján levő A és C pontok távolságát, valamint teodolittal megmérhető a CAB , illetve az ACB szög. Mekkora a két épület távolsága, ha $AC = 172\text{ m}$, $\sphericalangle CAB = 65^\circ 42'$ és $\sphericalangle ACB = 47^\circ 24'$?
75. (K) A folyó egyik partján levő A pontnak a túlsó parton található C ponttól való távolságát keressük. Ismert az A – val azonos oldalon található B ponttól mért távolság: $AB = 300\text{ m}$. Meghatároztuk a következő szögek nagyságát: $\alpha = 50^\circ$ és $\beta = 60^\circ$. Mekkora az A és C pontok távolsága?
76. (K) Két barát egy folyó egyik oldalán egymástól 1 km távolságra lakik. Megfigyelték, hogy a barát és a másik oldalon lakó harmadik társ házának távolsága az egyiküktől 75° , a másikuk házától 45° - os szög alatt látszik. Mekkora távolságra vannak egymástól a házak?

77. (K) Egy libegő emelkedési szöge 36° . 500 m megtétele után műszaki okok miatt megállt. Milyen széles a völgyben látható tó, ha a fülkét a tó két szélével összekötő szakaszok a haladási iránnyal 110° - os, illetve 85° - os szögeket zárnak be? (A libegő a völgyből, de nem a tó partjától indul a hegyen levő turistaházhoz.)
78. (K) Egy iskola két egymás feletti ablaka 6 m – re van egymástól. Az egyikből kinézve az iskolaudvar végét $13^\circ 20'$, míg a másikkól $17^\circ 10'$ depressziószög alatt látjuk. Milyen széles az udvar?
79. (K) Egy egyenes országútból 32° - os szög alatt egy egyenes gyalogút ágazik el. E gyalogút mentén két gazdasági épület egymástól ismeretlen távolságra fekszik. Az elágazásról 400 méterrel tovább haladva az országúton, az épületek felé mutató irányok 105° , illetve 75° - os szöget zárnak be a haladás irányával. Milyen messze van egymástól a két épület?
80. (K) Egy szigeten levő A tereptárgy távolságát szeretnénk meghatározni a folyó túlsó partján levő B tereptárgytól. Ezért a folyó innenső partján az AB egyenesen felvesszünk egy C pontot, majd C – ből kiindulva oldalra felmérünk egy 350 méteres CD szakaszt. Megmérve, kapjuk a következő szögeket: $\sphericalangle ACD = 75^\circ 48'$; $\sphericalangle CDA = 41^\circ 12'$; $\sphericalangle ADB = 28^\circ 53'$. Mekkora az AB távolság?
81. (K) Egy útkereszteződéstől észak felé az A község van 2400 m – re, míg nyugat felé a B község van 3200 m – re. Milyen távol van az A – tól és a B – től az a C község, amelybe A – ből egy olyan egyenes út vezet, amely az északi irányú úttól balra tér el $82^\circ 16'$ - es irányba, míg B – ből C – be olyan egyenes út vezet, amely a nyugati irányú úttól jobbra tér el $75^\circ 42'$ - es szöggel?
82. (K) Egy egyenes főúton haladva, $34^\circ 18'$ - es szög alatt balra, egyenes mellékút ágazik el, majd 8 km - rel tovább az egyenes főúton, jobbra egy egyenes mellékút ágazik le $41^\circ 24'$ - es szöget bezárva a főúton való haladási irányunkkal. Az első mellékúton 12 km - rel az elágazás után van a B község, míg a második mellékúton a leágazástól 10 km - re van a C község. Milyen messze van egymástól légvonalban a két község?
83. (K) Kalózkodás után kincsét keresve, az A helyről észak felé haladunk 65 m - t, majd keletnek fordulunk és 82 m - t teszünk meg. Ezután jobbra eltérünk a keleti iránytól $35^\circ 24'$ - es szöggel és egyenesen haladunk 43 m - t, míg eljutunk a D pontban elásott kincshez. Mekkora az AD távolság?

84. (K) Egy hegy magasságának a meghatározásához felvesszük a lábánál található vízszintes síkban az egymástól 500 m – nyire lévő A és B pontot. Jelöljük a hegy legmagasabb pontját C – vel, a hegy magasságát meghatározó szakasz másik végpontját D – vel. Határozd meg a hegy magasságát a $CAB\alpha = 75^\circ$, $CBA\alpha = 68^\circ$ és $CAD\alpha = 15^\circ$ ismeretében!
85. (K) Egy folyó kis szigetén található egy fa az A pontban. A folyótól kissé távolabb egy mocsár található a síkságon. A mocsárban egy fa tenyészik a B pontban. Valamilyen rejtélyes oknál fogva kíváncsiak vagyunk a két fa egymásól való távolságára. Ezért az AB szakaszon valamely száraz C pontból kiindulva oldalra, a síkságon száraz területen lépkedve, felmérünk egy 300 méteres szakaszt és kapjuk a D pontot. Megmérve, a következő szögeket kapjuk: $ACD\alpha = 115^\circ 42'$; $ADC\alpha = 19^\circ 28'$; $CDB\alpha = 63^\circ 16'$. Mekkora a két fa távolsága?
86. (K) Egy tavon két különböző csónakban Aladár és Bence horgászik. A parton lévő Csilla éppen egy vonalban látja őket. Csillától 500 m – re Dia van. Dia az Aladár és Csilla közötti szöveget 80° - osnak, Csilla a Bence és Dia által bezárt szöveget 50° - osnak, míg Dia a két csónak által bezárt szöveget iránytűjével 20° - osnak méri. Milyen távolságra van a két csónak egymástól?
87. (K) Egy villámot 45° - os szög alatt látunk. A villámlás és a dörgés kezdete között 10 s idő telik el, és a dörgés 2 s ideig hallható. Milyen hosszú a villám útja, ha a hang sebessége $330\frac{\text{m}}{\text{s}}$?
88. (K) A tűzijáték rakétáit a Dunán két hajóról indítják. A kilövés hangja 5 , illetve $3,2$ másodperc alatt érkezik a Gellért - hegy egy bizonyos pontjához. Hány méter távolságra van a két hajó egymástól, ha a köztük levő szakasz 68° alatt látszik a Gellért - hegy adott pontjából? (A hang terjedési sebessége $331,5\frac{\text{m}}{\text{s}}$.)
89. (K) Egy kikötőből egymástól 110° - ban eltérő irányban indul el két hajó. Az egyik sebessége $18\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a másiké $48\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Milyen messze lesz a két hajó egymástól 3 óra 40 perc múlva?

90. (K) Két hajó egyszerre indul el a tengeren egy szigetről fél 10 – kor. Az egyik északnak tart $36 \frac{km}{h}$ sebességgel, a másik dél – délkeleti irányban halad $28 \frac{km}{h}$ sebességgel. Amikor az indulás után 2,5 órával a gyorsabb hajó zátonyra fut, a másik hajó rögtön a segítségére indul a lehető legrövidebb úton, sebességét 25 % - kal növelve. Mikorra ér a baleset színhelyére a másik hajó?
91. (K) Két egyenes autót indul egy közös kezdőpontból, egymással 50° - os szöget zárnak be. Zoli és Laci egy – egy autóval elindulnak a két út találkozási pontjából, Zoli az aszfaltos úton $90 \frac{km}{h}$, Laci a földúton $40 \frac{km}{h}$ sebességgel halad. Milyen messze lesznek egymástól 5 perc múlva? Mindkét fiúnál van egy adó vevő készülék, melynek hatótávolsága 10 km. Mennyi ideig tudják ezekkel a készülékekkel tartani a kapcsolatot?
92. (K) Háromszög alakú kertünket be szeretnénk keríteni dróthálóval. Két oldalának hossza 15 m és 20 m, valamint az általuk bezárt szög $76,41^\circ$. Hány négyzetméter dróthálóra lesz szükségünk, ha azt akarjuk, hogy a kerítés 185 cm magas legyen?
93. (K) Két egyenes vasúti pálya $42^\circ 35'$ - es szög alatt keresztezi egymást. A kereszteződéstől a legközelebbi órházig 125 m a távolság az egyik pálya mentén, míg egy másik órház a másik pálya mentén 221 m – re van a kereszteződéstől. Milyen távol van egymástól a két órház?
94. (K) Mekkora szög alatt látjuk két távvezetékoszlop távolságát egy olyan pontból, amely az egyik oszloptól 320 m – re, a másiktól 245 m – re van, míg a két oszlop távolsága egymástól 150 m?
95. (K) Három alföldi település egy WIFI átjátszótoronyt épít, mégpedig úgy, hogy mindegyik településtől egyenlő távolságra legyen. A települések egymástól mért távolságai 15 km, 21 km és 27 km. Milyen hatósugarúnak kell lenni az átjátszó berendezésnek, hogy ellássa a feladatát? Mekkora szögben látszik majd a toronyból a két egymáshoz legközelebbi községet összekötő egyenes útszakasz?
96. (K) Három település között nyílegyenes, azonos rendű utak vezetnek. A községek által meghatározott háromszög alakú területre vadászfészek építését tervezik. A leszt olyan helyre tervezik, ami a települések közt vezető utaktól azonos távolságra van. Mekkora lesz ez a távolság, ha az egyik községnek a másik kettőtől mért távolsága 4 km és 6 km, és az odavezető utak 53° - os szögben találkoznak? Mekkora a másik két település távolsága és milyen szögben látszik majd a leszből az ezeket összekötő út?

97. (K) Egy A városba szeretnék a város melletti hegy túloldalán lévő B forrás vizét bevezetni. Emiatt a hegyet át kell fúrni. Az alagút helyzetének meghatározása miatt megmérjük egy olyan C pontból, ahonnan A és B is látható, az $AC = 2 \text{ km}$, $BC = 3 \text{ km}$ távolságokat és az $ACB \sphericalangle = 50^\circ$ - os szöget. Számítsd ki, hogy A – ből és B – ből milyen irányban kell elkezdni egymással szemben a munkát és határozd meg a vízvezeték AB hosszát!
98. (K) Az A, B és C településeket egyenesnek tekinthető utak kötik össze, amelyeknek hossza $AB = 30 \text{ km}$, $AC = 25 \text{ km}$ és $BC = 35 \text{ km}$. Az A és B településeket összekötő úton a két településtől egyenlő távolságra élményfürdő kialakítását tervezik, amelyet szintén egyenes úttal kívánnak összekötni a C településsel. Hány kilométer hosszú a tervezett útszakasz?
99. (K) Egy háromszög alakú kert két oldalának hossza 20 m és 12 m , a közbezárt szöge 118° . Hány méter kerítéssel lehet a kertet körbekeríteni? A két adott oldal közös végpontjából kiindulva egy egyenes utat szeretnék építeni, amelyik felezi a kert területét. Milyen hosszú lesz ez az út?
100. (K) Egy országútról balra 35° - os szög alatt egy mellékút ágazik el, amelyen 20 km – t haladva A városba jutunk. Az országúton 30 km – t tovább haladva egy másik mellékúthoz jutunk, amely jobbra 45° - kal tér el. Ezen 10 km – nyire B város található. Milyen messze van a két város egymástól?
101. (K) Egy hegy emelkedik egy síkság fölé. A hegy csúcsa a P pont, ennek merőleges vetülete a síkra a P' pont. A síkon felvesszünk egy $AB = 800 \text{ m}$ hosszú alapvonalat. Majd megmérve kapjuk a következő szögeket: $PAB \sphericalangle = 72^\circ 35'$; $PBA \sphericalangle = 64^\circ 26'$; $PAP' \sphericalangle = 23^\circ 48'$. Milyen magasra emelkedik a hegy a síkság fölé?
102. (K) Egy 650 m magas hegy csúcsáról két hajót figyelünk meg a tengeren. A hajók távolságát $74^\circ 24'$ - es szög alatt látjuk. Az egyik hajót $8^\circ 52'$ - es, míg a másik hajót $7^\circ 16'$ - es lehajlási szög alatt látjuk. Mekkora a két hajó távolsága egymástól?
103. (K) Egy 200 m magas torony tetejéről a torony talppontján kívüli A , illetve B pont $38^\circ 17'$, illetve $46^\circ 24'$ - es lehajlási szög alatt látszik. Az A , illetve a B ponthoz tartozó lehajlási szög mérése közben a távcsövet vízszintes síkban $78^\circ 36'$ - es szöggel kellett elforgatni. Milyen hosszú az AB távolság?

104. (E) Vízszintes terep T pontja felett lebeg egy L léggömb, s ezt az A – ban álló megfigyelő 37° - os, a B – beli megfigyelő 45° - os emelkedési szögben látja. Milyen magasan lebeg a léggömb, ha a megfigyelők 500 m – re vannak egymástól és az $ATB \sphericalangle = 80^\circ$?
105. (E) Egy tőlünk keletre fekvő hegy csúcsát 22° emelkedési szögben látjuk. Ha a vízszintes talajon $1,5\text{ km}$ – t délre megyünk, akkor a hegy csúcsáról $18,5^\circ$ depressziószögben (lehajlási szögben) látszunk. Milyen magas a hegy, milyen távol vagyunk mindkét helyen a hegy csúcsától és mekkora a hegy csúcsáról az útszakasz látószöge?
106. (K) Két, egymással 60° - os szöget bezáró út kereszteződésében egy háromszög alakú kert van. Kerítésének az utakkal párhuzamos oldalai 45 m , illetve 60 m – esek. Milyen hosszú a kerítés harmadik oldala? Mekkora a kert területe? Mekkora szöget zár be a harmadik oldal a 45 m – es, illetve a 60 m – es oldalakkal?
107. (K) A vízszintes terepen levő A és B pontok távolsága közvetlenül nem mérhető le, ezért az A pontból kiinduló félegyenesre felvették a P és Q pontokat úgy, hogy $AP = 200\text{ m}$, $AQ = 600\text{ m}$ legyen. Ekkor méréssel megállapították, hogy $APB \sphericalangle = 130^\circ$, $AQB \sphericalangle = 100^\circ$. Mekkora az A és B pontok távolsága?
108. (K) Két madárles egymástól való távolságát kell meghatározni, de ez közvetlenül nem mérhető. Kerülő úton 400 m – t haladva a keresett távolság látószöge 100° , majd további 500 m – t haladva az egyenes úton 85° - os a látószögük. Mekkora a két madárles távolsága?
109. (K) Az M és az N tereppontok távolsága közvetlenül nem mérhető meg. Ezért kitéjtük az $AM = 54\text{ m}$, $BM = 60\text{ m}$ távolságokat, amelyek egy egyenesbe esnek, továbbá megmértük az $MAN \sphericalangle = 130^\circ$ és $NBM \sphericalangle = 109^\circ$ szögeket. Mekkora az M és N tereppontok távolsága?
110. (K) Meghatározandó egy AB távolság a következő adatokból: egy C pontból ezt a távolságot 30° - os szög alatt látjuk. A szög felezőjén 100 m – t közelítve a megméréndő távolsághoz, egy olyan D pontba jutunk, ahonnan az A pontba mutató irány 120° - os, a B pontba mutató pedig 90° - os szöget zár be az általunk megtett úttal. Mekkora az AB távolság?

111. (K) Az A és a B vitorlás hajók távolságának meghatározása végett kitűzünk a parton egymástól 1 km távolságban egy C és D pontot, majd kimérjük az alábbi szögeket: $\sphericalangle ACD = 100^\circ$, $\sphericalangle BCD = 40^\circ$, $\sphericalangle CDA = 50^\circ$, $\sphericalangle CDB = 110^\circ$. Határozd meg a hajók távolságát!
112. (K) A folyó túlsó partján P és Q pontokban álló két fa között szeretnénk kifeszíteni egy kötelet. Mielőtt átkelnénk a folyón, lemérjük a következőket: $AB = 50\text{ m}$; $\sphericalangle PAB = 100^\circ$; $\sphericalangle QAB = 65^\circ$; $\sphericalangle QBA = 60^\circ$ és $\sphericalangle PBA = 21^\circ$. Legalább milyen hosszú kötelet kell átvinnünk magunkkal? (Minden tereptárgy ugyanazon a tengerszint feletti magasságon áll.)
113. (K) A P és Q helyeket egy folyó választja el egymástól, így távolságukat közvetlenül nem lehet megmérni. Ezért úgy vesszük fel az A , majd mögötte a B pontokat, hogy P , A és B egy egyenesbe essenek, továbbá a szakaszok hosszára $PA = 100\text{ m}$ és $AB = 50\text{ m}$ teljesüljön. Az A és a B pontokból a PQ szakasz rendre 130° és 110° alatt látszik. Mekkora a PQ távolság?
114. (K) Egy hegy tetején álló épület, az épület lábától egyenesen lejtő úton mért 24 m távolságból 35° , a lejtőn 28 m – rel lejjebb haladva 19° szög alatt látszik. Milyen magas a hegy tetején álló épület? Mekkora a lejtő hajlásszöge?
115. (K) Egy $ABCD$ négyszögben ismerjük az $AB = 32$ szakasz hosszát és a következő szögeket: $\sphericalangle DAC = 67^\circ$; $\sphericalangle BAC = 41^\circ$; $\sphericalangle ABD = 38^\circ$ és $\sphericalangle CBD = 80^\circ$. Határozd meg a CD oldal nagyságát!
116. (K) Egy konvex négyszög alakú telek oldalainak hosszúságai rendre: 50 m , 70 m , 60 m , 90 m . Az 50 és 70 m - es oldalak találkozási pontjából a telek szemközti csúcsába 95 m hosszú, egyenes út vezet. Mekkora a telek másik két sarokpontjának távolsága?
117. (K) Egy konvex négyszög három egymás utáni oldala 15 cm , 13 cm és 8 cm . Az első két oldal közötti szög $85^\circ 45'$, a második és a harmadik oldala közötti szög $74^\circ 20'$. Mekkora a négyszög ismeretlen szögei és oldala?
118. (K) Egy $ABCD$ négyszög oldalai $AB = 9\text{ cm}$, $BC = 11\text{ cm}$ és $CD = 4\text{ cm}$ hosszúságúak. A BD átló 10 cm hosszú, és a 9 cm és 11 cm hosszú oldalak hajlásszöge 27° . Határozd meg a negyedik oldal hosszát!

119. (K) Határozd meg azon négyszög oldalainak a hosszát, amelynek a $26,5\text{ cm}$ – es átlója az egyik csúcsnál levő szöget $48,2^\circ$ - os és $19,7^\circ$ - os szögekre osztja, míg a szembenfekvő másik csúcsnál levő szöget pedig $47,3^\circ$ - os és $27,8^\circ$ - os szögekre osztja úgy, hogy a nagyobbik részszögek azonos háromszögben vannak!
120. (K) Egy konvex négyszög oldalai rendre 8 cm , 5 cm , 6 cm és 7 cm . A 7 cm – es és 8 cm – es oldalak által bezár szög $75^\circ 48'$. Mekkora a négyszög ismeretlen szögei?
121. (K) Egy konvex négyszög oldalainak hossza rendre 14 cm , 6 cm , 10 cm és 12 cm . A 12 cm – es és 14 cm – es oldalak által bezár szög $41,9^\circ$. Mekkora a négyszög ismeretlen szögei és a területe?
122. (K) Egy négyszög három egymást követő oldala 10 m , 12 m és 20 m . Az első és a második oldal által bezárt szög 110° - os, míg a második és a harmadik oldal szöge 95° - os. Határozd meg a negyedik oldal hosszát és a területet!
123. (K) Egy körben a kör egy pontjából kiinduló 12 cm , illetve 15 cm hosszú húrok $42^\circ 18'$ - es szöget zárnak be. Mekkora a kör sugara?
124. (K) Egy körvonal egy pontjából kiinduló két húr 42° - os szöget zár be. Mekkora a húrok végpontjainak távolsága és a kör sugara, ha a húrok hossza 12 cm és 45 cm ? Mekkora szögben látszik a kapott húr a kör középpontjából?
125. (E) Három egymást páronként kívülről érintő kör sugara 2 cm , 3 cm és 5 cm . Határozd meg a három kör közötti síkidom területét!
126. (E) Egy 10 cm sugarú körben a kör egy pontjából kiinduló két húr hossza 12 cm és 14 cm . Határozd meg a húrok végpontjainak távolságát!
127. (E) Egy háromszög egyik oldala 10 cm , s az ezzel szemben fekvő szöge 28° . Mekkora a köré írt kör sugara?

128. (E) Egy háromszög köré írt körének átmérője 12 cm , s az egyik oldala 2 cm . Mekkora az adott oldallal szemben fekvő szöge?
129. (E) Egy 4 cm sugarú körben két húr hajlásszöge 50° , s az egyik húr hossza 7 cm . Mekkora a másik húr hossza és a két húr végpontjának távolsága?
130. (E) Egy háromszög köré írt körének sugara 14 cm , s az egyik szöge 17° . Mekkora az adott szöggel szemben fekvő oldala?

Felhasznált irodalom

- (1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (2) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest
- (3) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (4) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (5) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (6) Ábrahám Gábor; 2011.; Matematika 11. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged
- (7) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged
- (8) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged
- (9) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (10) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest
- (11) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (12) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba
- (13) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (14) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

- (15) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged
- (16) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged
- (17) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (18) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged
- (19) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged
- (20) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html
- (21) Saját anyagok