Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL: (Szinusz - tétel)
Bármely háromszögben az oldalak és a velük szemközti szögek szinuszainak aránya egyenlő.
Jelöléssel: $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Bizonyítás:
Írjuk fel a háromszög területképletét a következő alakban:

$$T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}.$$

Tekintsük először az első két képletet: $\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$.

Átrendezéssel az egyenlet a következő alakra hozható: $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Tekintsük most a második és harmadik képletet: $\frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$.

Átrendezéssel az egyenlet a következő alakra hozható: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Végül tekintsük az első és harmadik képletet: $\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$.

Átrendezéssel az egyenlet a következő alakra hozható: $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

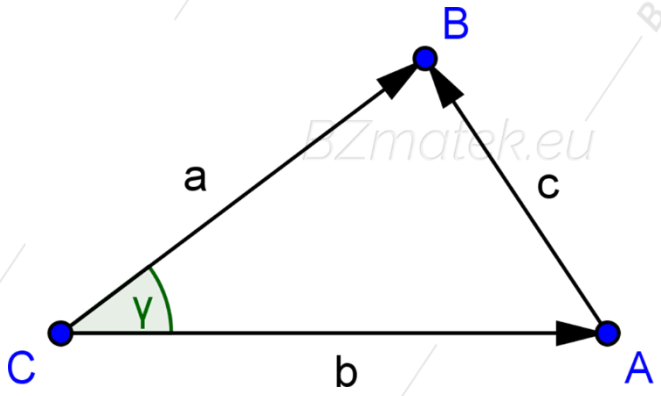
Ezek alapján adódik a bizonyítandó állítás: $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

■

TÉTEL: (Koszinusz - tétel)
Bármely háromszögben egy oldal hosszának a négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldalhossz négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal hosszának és a közbezárt szög koszinuszának a kétszeres szorzatát. Jelöléssel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük a háromszög oldalait a következő vektorokkal:



Ekkor felírhatjuk a következőt: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Első lépésként tekintsük mindkét oldal skaláris szorzatát önmagával:

$$(\vec{c})^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = (\vec{a})^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\vec{b}\right)^2 =$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma + \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma$$

Az $a = |\vec{a}|$, $b = \left|\vec{b}\right|$, $c = |\vec{c}|$ jelölést használva megkapjuk a bizonyítandó állítást:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

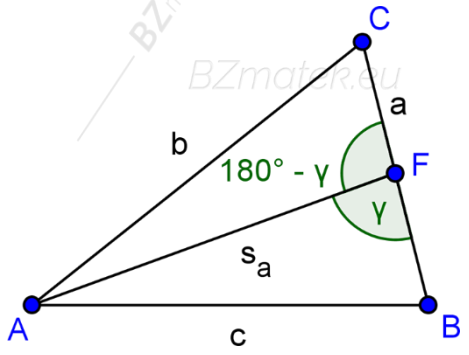
Az előzőekhez hasonlóan (átjelölésekkel) a tétel további alakjait is megkaphatjuk.

■

TÉTEL:
Bármely háromszögben a súlyvonal hossza megkapható a három oldal ismeretében:

$$s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} \qquad s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \qquad s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük a következő ábrát:



Írjuk fel a két kisebb háromszögben a koszinusz - tételeket:

$$c^2 = {s_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot s_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\gamma$$

$$b^2 = {s_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot s_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(180 - \gamma)$$

Mivel $\cos\ (180 - \varphi) = -\cos\varphi$, így ezt helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$c^2 = {s_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot s_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\gamma$$

$$b^2 = {s_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot s_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\gamma$$

Az egyenleteket egyenletrendszerként tekintve adjuk össze a két egyenletet:

$$b^2 + c^2 = 2 \cdot {s_a}^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Az egyenletet átrendezve adódik a bizonyítandó állítás:

$${s_a}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad \rightarrow \quad s_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

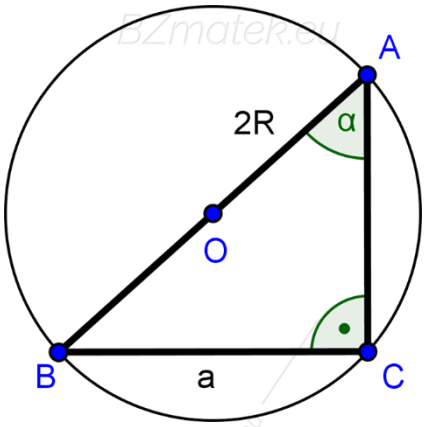
Az előzőekhez hasonlóan a tétel további alakjait is megkaphatjuk.

■

TÉTEL: (Szinusz - tétel geometriai alakja)
Bármely háromszögben az egyik oldal és a hozzátartozó szög szinuszának hányadosa egyenlő a háromszög köré írt körének átmérőjével. Jelöléssel: $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Bizonyítás:
A bizonyítást három részre bontjuk az α szög nagysága szerint.

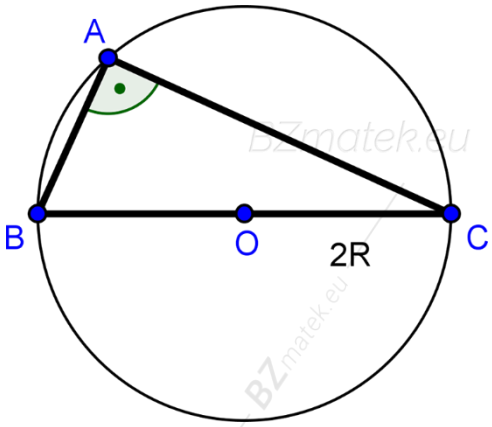
Tekintsük először azt az esetet, amikor az α hegyesszög, vagyis $0° < \alpha < 90°$.



A derékszögű $BCA\,\Delta$ - ben felírhatjuk a következőt: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Az egyenlet átrendezésével adódik a bizonyítandó állítás: $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$.

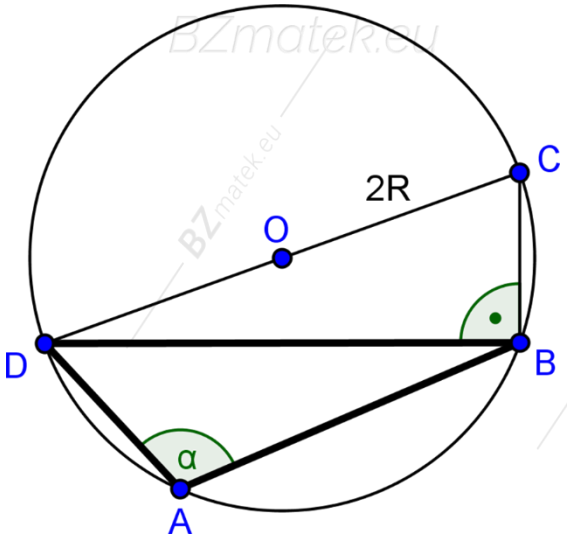
Tekintsük most azt az esetet, amikor az α derékszög, vagyis $\alpha = 90°$.



A derékszögű $CAB\,\Delta$ - ben felírhatjuk a következőket: $a = 2R$ és $\sin\alpha = \sin 90° = 1$.

Ezek alapján adódik a bizonyítandó állítás: $2R = a = \frac{a}{1} = \frac{a}{\sin 90°} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Tekintsük végül azt az esetet, amikor az α tompaszög, vagyis $90° < \alpha < 180°$.



Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, így a C csúcsnál lévő szög nagysága: $\gamma = 180° - \alpha$.

A derékszögű DBC Δ - ben felírhatjuk a következőket: $\sin\ (180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$.

Mivel $\sin\ (180° - \alpha) = \sin\alpha$, így adódik a bizonyítandó állítás:

$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \quad \rightarrow \quad 2R = \frac{a}{\sin\alpha}$.

A háromszög további oldalaira és szemben fekvő szögeire hasonlóan látható be az állítás.

■