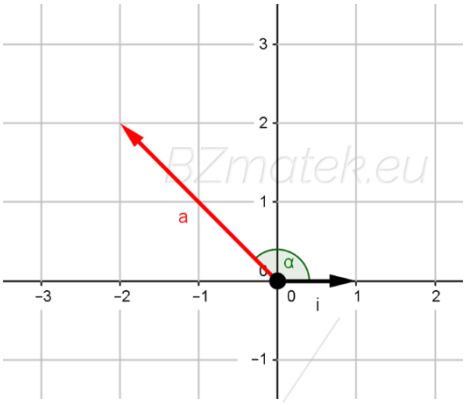
Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

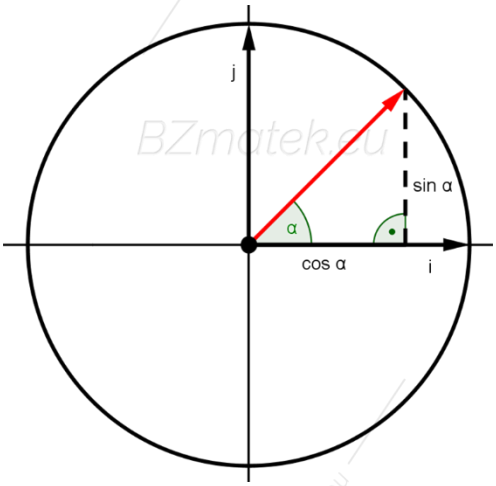
Szögfüggvények kiterjesztése

A tetszőleges nagyságú szögek szögfüggvényeit koordináta – rendszerben egységhosszúságú forgásvektor segítségével definiáljuk.

DEFINÍCIÓ: (Vektor irányszöge)
Egy vektor irányszögén értjük azt a 0° és 360° közé eső szöget, amellyel az $\vec{\imath}$ egységvektort el kell forgatnunk az origó körül pozitív irányba ahhoz, hogy az adott vektorral egyirányú legyen.



- Ha az $\vec{e}$ egység hosszúságú helyvektor irányszöge $0° < \alpha < 90°$, akkor az első koordinátája az irányszögének koszinuszával, a második az irányszögének szinuszával egyenlő.



Mivel az egységvektor hossza 1, ezért felírhatjuk a következőket:

$\sin\alpha = \frac{e_2}{1} = e_2$ és $\cos\alpha = \frac{e_1}{1} = e_1$.

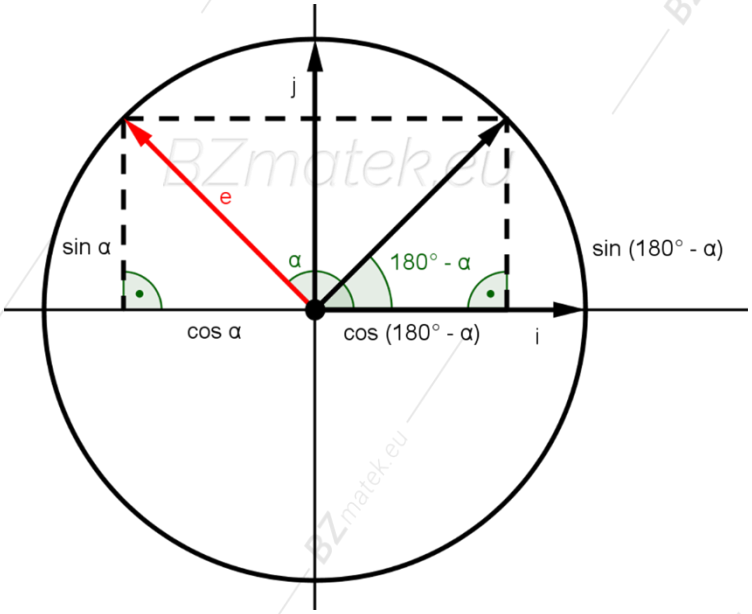
Ezek alapján felírhatjuk a következőket:

$\vec{e} = e_1 \cdot \vec{\imath} + e_2 \cdot \vec{\jmath} = (\cos\alpha) \cdot \vec{\imath} + (\sin\alpha) \cdot \vec{\jmath}$, vagyis $\vec{e}\,(\cos\alpha\,;\sin\alpha)$.

Ezt alkalmazva terjesszük ki a 90° - nál nagyobb szögekre is a szögfüggvényeket: Tetszőleges 0° és 360° közé eső szög koszinusza, illetve szinusza legyen egyenlő annak az egységvektornak az első, illetve második koordinátájával, amelynek irányszöge az adott szög.

- Ha az egységvektor a második síknegyedbe esik, vagyis irányszöge $90° < \alpha < 180°$:

  Az egységvektort tükrözzük az y – tengelyre.



Ezek alapján felírhatjuk a következőket:

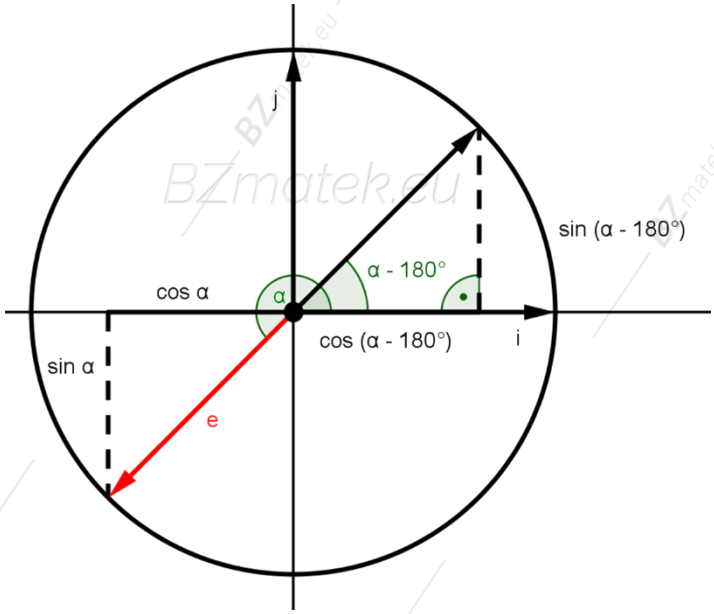
$\cos\alpha = -\cos\ (180° - \alpha)$ $\sin\alpha = \sin\ (180° - \alpha)$

Előjelet tekintve:

$\cos\alpha < 0$ $\sin\alpha > 0$

- Ha az egységvektor a harmadik síknegyedbe esik, vagyis irányszöge $180° < \alpha < 270°$:

Az egységvektort tükrözzük az origóra.



Ezek alapján felírhatjuk a következőket:

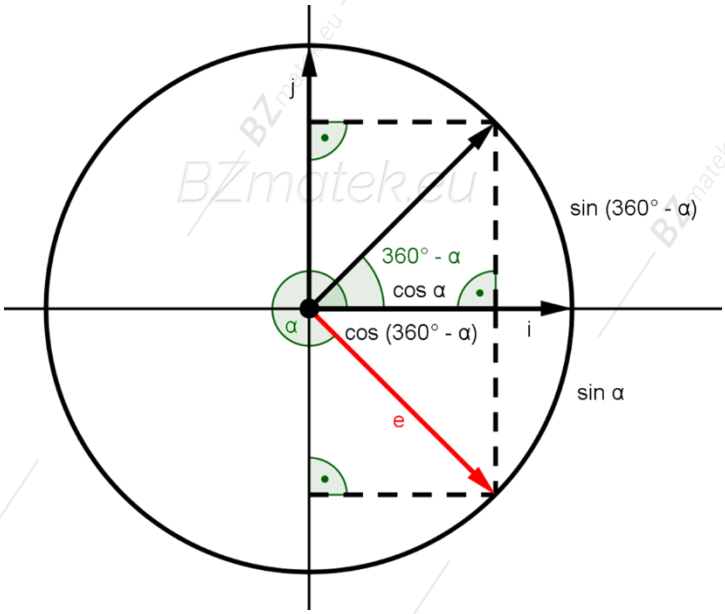
$\cos\alpha = -\cos\ (\alpha - 180°)$ $\sin\alpha = -\sin\,(\alpha - 180°)$

Előjelet tekintve:

$\cos\alpha < 0$ $\sin\alpha < 0$

- Ha az egységvektor a negyedik síknegyedbe esik, vagyis irányszöge $270° < \alpha < 360°$:

  Az egységvektort tükrözzük az x – tengelyre.



  Ezek alapján felírhatjuk a következőket:

  $\cos\alpha = \cos\ (360° - \alpha)$ $\qquad$ $\sin\alpha = -\sin\ (360° - \alpha)$

  Előjelet tekintve:

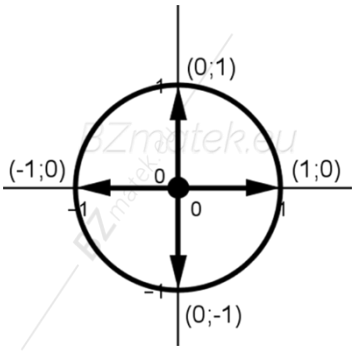
  $\cos\alpha > 0$ $\qquad$ $\sin\alpha < 0$

<u>*Megjegyzés:*</u>

- *Az α szög tangense a koordinátasíkon, annak a pontnak a második koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör* $(1; 0)$ *pontjához húzott érintőből kimetsz.*

- *Az α szög kotangense a koordinátasíkon, annak a pontnak az első koordinátája, amelyet az α szöggel elforgatott egységvektor egyenese az origó körüli egységsugarú kör* $(0; 1)$ *pontjához húzott érintőből kimetsz.*

Határszögek szögfüggvényei:



$\alpha = 0°$ $\rightarrow$ $\vec{e}\,(1;0)$ $\rightarrow$ $\cos 0° = 1$ $\sin 0° = 0$

$tg\ 0° = \frac{0}{1} = 0$ $ctg\ 0° = \frac{1}{0} = \emptyset$

$\alpha = 90°$ $\rightarrow$ $\vec{e}\,(0;1)$ $\rightarrow$ $\cos 90° = 0$ $\sin 90° = 1$

$tg\ 90° = \frac{1}{0} = \emptyset$ $ctg\ 0° = \frac{0}{1} = 0$

$\alpha = 180°$ $\rightarrow$ $\vec{e}\,(-1;0)$ $\rightarrow$ $\cos 180° = -1$ $\sin 180° = 0$

$tg\ 180° = \frac{0}{-1} = 0$ $ctg\ 180° = \frac{-1}{0} = \emptyset$

$\alpha = 270°$ $\rightarrow$ $\vec{e}\,(0;-1)$ $\rightarrow$ $\cos 270° = 0$ $\sin 270° = -1$

$tg\ 270° = \frac{-1}{0} = \emptyset$ $ctg\ 270° = \frac{0}{-1} = 0$

$\alpha = 360°$ $\rightarrow$ $\vec{e}\,(1;0)$ $\rightarrow$ $\cos 360° = 1$ $\sin 360° = 0$

$tg\ 0° = \frac{0}{1} = 0$ $ctg\ 0° = \frac{0}{1} = \emptyset$

Forgás szögek szögfüggvényei:

A 360° - nál nagyobb szögek szögfüggvényeit úgy kaphatjuk meg, hogy elosztjuk a szöget 360° - kal és a maradék szögnek határozzuk meg a szögfüggvény értékét.

Ha $\alpha > 360°$, akkor létezik olyan k pozitív egész szám, hogy $\alpha = k \cdot 360° + \beta$, ahol $0° \leq \beta < 360°$.

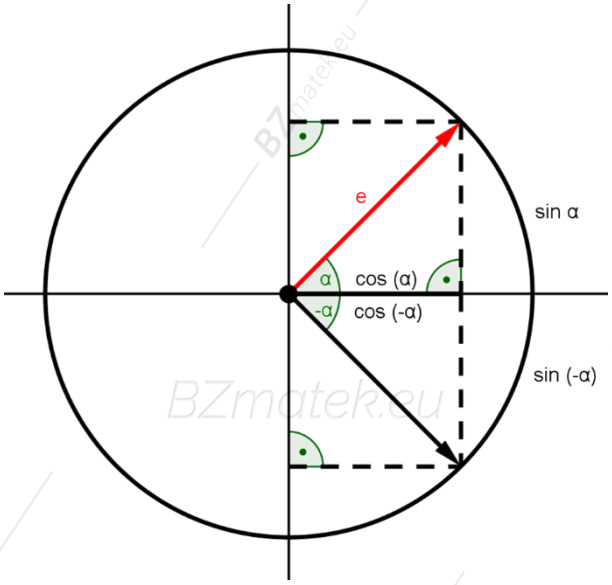
A szinusz és koszinusz függvény 360° szerint periodikus (ismétlődő):

$\sin\alpha = \sin\ (k \cdot 360° + \beta) = \sin\beta$ $\qquad$ $\cos\alpha = \cos\ (k \cdot 360° + \beta) = \cos\beta$

A tangens és kotangens függvény 180° szerint periodikus (ismétlődő):

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\ (k \cdot 180° + \beta) = \mathrm{tg}\,\beta$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\ (k \cdot 180° + \beta) = \mathrm{ctg}\,\beta$

Negatív szögek szögfüggvényei:



Ezek alapján felírhatjuk a következőket:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg\ (-\alpha) = \frac{\sin\ (-\alpha)}{\cos\ (-\alpha)} = -tg\ \alpha$ $\qquad$ $ctg\ (-\alpha) = \frac{\cos\ (-\alpha)}{\sin\ (-\alpha)} = -ctg\ \alpha$

Szögfüggvény érték keresése:
Ez azt jelenti, hogy megadunk egy szöget és ehhez meghatározzuk a szögfüggvény értékeket, vagyis adott α és meghatározzuk $\sin\alpha$ – t, $\cos\alpha$ – t, $tg\ \alpha$ – t, vagy $ctg\ \alpha$ – t. Ez a hozzárendelés egyértelmű, mivel egy szöghöz pontosan egy szám tartozik.

A meghatározás lépései a következők:

- Amennyiben negatív szögről van szó, akkor áttérünk pozitív szögre.
- Amennyiben forgásszögről van szó, akkor áttérünk $0°$ és $360°$ közé.
- Az így kapott szögről eldöntjük, hogy melyik negyedbe esik, s így milyen előjelű lesz a keresett érték.
- Végül megkeressük a szög első negyedbeli párját, s annak meghatározzuk (táblázat segítségével) a szögfüggvény értékét.

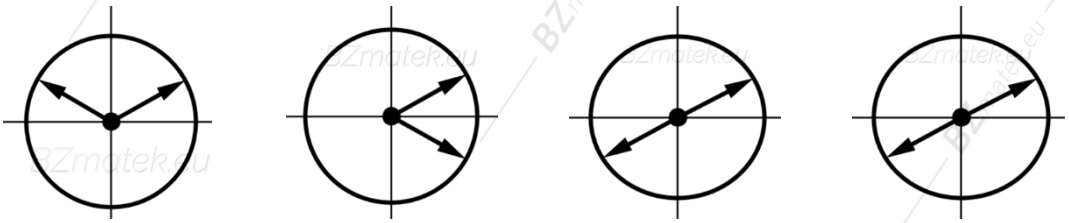
Szögérték visszakeresése:
Ez azt jelenti, hogy megadunk egy szögfüggvény értéket és ehhez meghatározzuk a szögértéket. Minden szögfüggvény értékhez végtelen sok szögérték tartozik, s ezek közül a $0°$ és $360°$ közé eső két értékét nevezzük főértéknek.

A meghatározás lépései a következők:

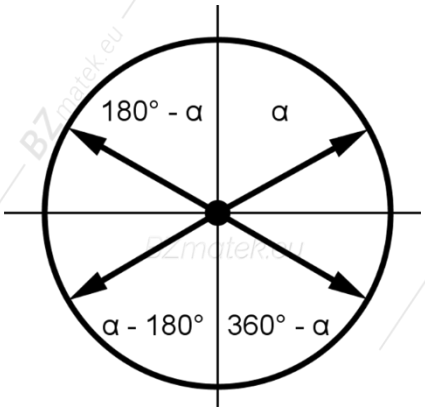
- Az előjel alapján eldöntjük, hogy melyik síknegyedben van a szög főértéke.
- Meghatározzuk a táblázati értéket (hegyesszög, határszög).
- Felírjuk az összes szögértéket.

Megjegyzés:
A megoldások során fel kell tüntetnünk a periódust, illetve ügyelnünk kell arra is, hogy mindent fokban, vagy radiánban adjunk meg, vagyis vegyesen nem használhatjuk azokat.

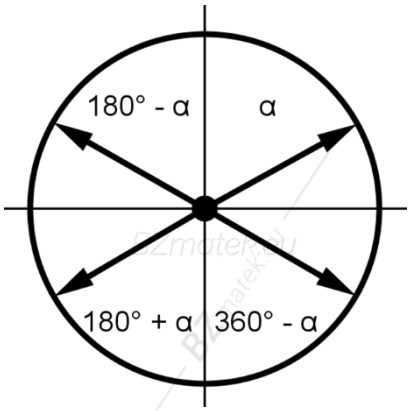
Szinusz Koszinusz Tangens Kotangens



Szögfüggvény érték keresése

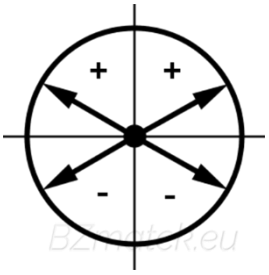


Szögérték visszakeresése

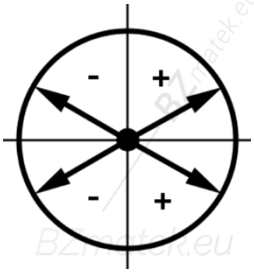


Előjelek a síknegyedekben

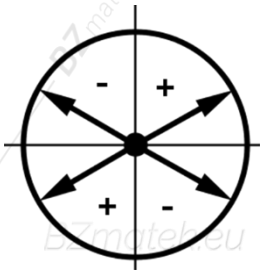
Szinusz



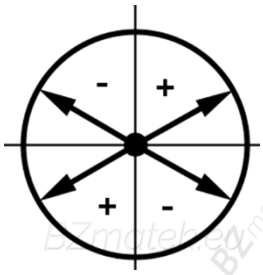
Koszinusz



Tangens



Kotangens



Nevezetes szögek (és határszögek) szögfüggvényei:

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0
$ctg\,\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	0	$-$

Összefüggések szögfüggvények között:

$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(90° + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(90° + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$tg\,(180° - \alpha) = -tg\,\alpha$ $\qquad$ $ctg\,(180° - \alpha) = -ctg\,\alpha$

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(180° + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}(360° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}(360° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

$\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ $\qquad$ $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + k \cdot 180°)$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha + k \cdot 180°)$

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ $\qquad$ $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

$tg\,\alpha = ctg\,(90° - \alpha)$ $\qquad$ $ctg\,\alpha = tg\,(90° - \alpha)$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\qquad$ $tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}$ $\qquad$ $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(-\alpha) = -tg\,\alpha$ $\qquad$ $ctg\,(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

$\sin 135°$	$\cos 210°$	$tg\ 330°$	$ctg\ 150°$	$\sin(-90°)$
$\cos(-240°)$	$tg\ (-270°)$	$ctg\ (-180°)$	$sin\ 3195°$	$sin\ (-1440°)$
$cos\ 4905°$	$cos\ (-2820°)$	$tg\ 3540°$	$tg\ (-1980°)$	$ctg\ 4530°$
$sin\ (-317\pi)$	$sin\ \left(\frac{100\pi}{3}\right)$	$cos\ \left(\frac{-1111\pi}{4}\right)$	$tg\ \left(-\frac{218\pi}{6}\right)$	$ctg\ (-2,3°)$

2. (K) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\cos 0° + 3 \cdot \sin 90° - 4 \cdot \cos 180°$

b) $2 \cdot \sin 270° - 3 \cdot \cos 90° + 5 \cdot \sin 0°$

c) $\sin 360° \cdot \cos 270° + \sin 180° \cdot \cos 360°$

d) $\sin 135° \cdot \cos 225° \cdot \sin 300° \cdot \cos 120°$

e) $\sin 150° - \cos(-120°) + ctg\ 315° + tg\ (-135°)$

f) $cos\ 165° + sin\ 75°$

g) $ctg\ 144° + tg\ 54°$

3. (E) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\frac{\sin 135°}{\cos 135°} - cos^2\, 30° \cdot tg^2\, 30°$

b) $(1 + ctg\, 135°) \cdot (1 + ctg\, 134°)$

c) $\left(2 \cdot tg\, \frac{2003\pi}{4}\right)^3$

d) $\left(\frac{\cos\left(\frac{12k+1}{6} \cdot \pi\right)}{tg\, \frac{8\pi}{3}}\right)^2 \qquad k \in \mathbb{Z}$

e) $tg^7\, 3° + ctg^7\, 23° + tg^7\, 177° + ctg^7\, 157°$

f) $\frac{sin^2\, \frac{\pi}{14} + sin^2\, \frac{3\pi}{7}}{cos^2\, \frac{\pi}{14} + cos^2\, \frac{3\pi}{7}}$

4. (E) Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

a) $\sin(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(2\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

b) $\sin(\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi - \alpha)$

c) $cos^2(\pi + \alpha) + cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

d) $\frac{\cos(-\alpha) \cdot \cos(180° + \alpha)}{\sin(-\alpha) \cdot \sin(90° + \alpha)}$

e) $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}(\pi - \alpha) \cdot \cos(\alpha - \pi)}$

f) $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin(\alpha + 2\pi)}{\mathrm{tg}(\pi + \alpha) \cdot \cos(1{,}5\pi + \alpha)}$

5. (E) Határozd meg az α többi szögfüggvényét, ha ismert a következő: $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye II.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(10) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 9 – 10. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(12) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(13) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(17) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(18) Saját anyagok

BZmatek.eu