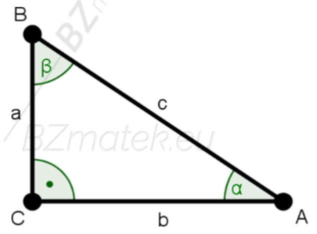
Hegyesszögek szögfüggvényei

Az α hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszögek egymáshoz hasonlóak, mert szögeik megegyeznek. Így oldalhosszaik aránya mindig állandó. Az α szögtől függő arányokra vezetjük be a szögfüggvényeket: értelmezési tartománya a hegyesszögek, érték készlete a pozitív valós számok, vagyis minden hegyesszöghöz hozzárendelünk egy pozitív valós számot.



DEFINÍCIÓ: (Hegyesszög szinusza)
Derékszögű háromszögben a hegyesszöggel szemközti befogó és az átfogó hosszának arányát a hegyesszög szinuszának nevezzük.

Jelölés: $\sin\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{átfogó}$. Ábrán: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

DEFINÍCIÓ: (Hegyesszög koszinusza)
Derékszögű háromszögben a hegyesszög melletti befogó és az átfogó hosszának arányát a hegyesszög koszinuszának nevezzük.

Jelölés: $\cos\alpha = \frac{szöggel\ melletti\ befogó}{átfogó}$. Ábrán: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

DEFINÍCIÓ: (Hegyesszög tangense)
Derékszögű háromszögben a hegyesszöggel szemközti befogó és a hegyesszög melletti befogó hosszának arányát a hegyesszög tangensének nevezzük.

Jelölés: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{szöggel\ szemközti\ befogó}{szög\ melletti\ befogó}$. Ábrán: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

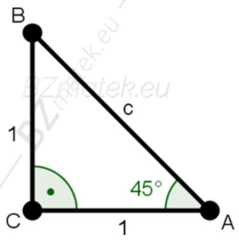
DEFINÍCIÓ: (Hegyesszög kotangense)
Derékszögű háromszögben a hegyesszög melletti befogó és a hegyesszöggel szemközti befogó hosszának arányát a hegyesszög kotangensének nevezzük.

Jelölés: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{szöggel\ melletti\ befogó}{szöggel\ szemközti\ befogó}$. Ábrán: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Megjegyzés:
Az átfogó és az α hegyesszög melletti befogó hosszának arányát szekánsnak ($sec\ \alpha$), az átfogó és az α hegyesszöggel szemközti befogó hosszának arányát koszekánsnak ($cosec\ \alpha$) nevezzük. Ezeket azonban a gyakorlatban nem alkalmazzuk.

Nevezetes szögek szögfüggvényei:

- 45°:

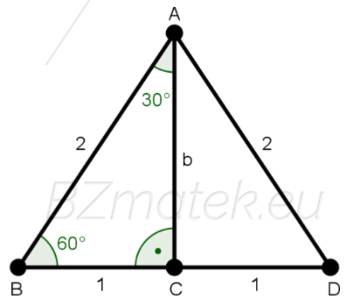


Írjuk fel a Pitagorasz – tételt: $1^2 + 1^2 = c^2$. Ebből azt kapjuk, hogy $c = \sqrt{2}$.

Ezek alapján a szögfüggvények értékei a következők:

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $tg\ 45° = ctg\ 45° = \frac{1}{1} = 1$

- 30° és 60°:



Írjuk fel a Pitagorasz – tételt: $1^2 + b^2 = 2^2$. Ebből azt kapjuk, hogy $b = \sqrt{3}$.

Ezek alapján a szögfüggvények értékei a következők:

$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 30° = ctg\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad$ $tg\ 60° = ctg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Megjegyzés:
Táblázatba foglalva a kapott értékek:

	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Összefüggések szögfüggvények között:

(1) Pótszögek szögfüggvényei:

TÉTEL:
Hegyesszög szinusza megegyezi pótszögének koszinuszával (és fordítva).
Jelöléssel: $\sin\alpha = \cos\ (90° - \alpha)$ és $\cos\alpha = \sin\ (90° - \alpha)$.

TÉTEL:
Hegyesszög tangense megegyezik pótszögének kotangensével (és fordítva).
Jelöléssel: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\ (90° - \alpha)$ és $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\ (90° - \alpha)$.

(2) Trigonometrikus Pitagorasz – tétel:

TÉTEL:
Adott α hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1 – gyel egyenlő.
Jelöléssel: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Megjegyzés:

- *Mivel a négyzetszámok mindig pozitívak, ezért a tételből adódik, hogy* $0 \leq sin^2\alpha \leq 1$ *és* $0 \leq cos^2\alpha \leq 1$. *Ezek alapján pedig* $-1 \leq sin\,\alpha \leq 1$ *és* $-1 \leq cos\,\alpha \leq 1$.
- *A* $tg\ \alpha$ *és* $ctg\ \alpha$ *bármilyen értéket felvehet, mert két* -1 *és* 1 *közé eső szám hányadosa.*

(3) Összefüggés a négy szögfüggvény között:

TÉTEL:
Bármely α hegyesszög esetén: $tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ és $ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

TÉTEL:
Bármely hegyesszög tangense és kotangense egymás reciproka.
Jelöléssel: $tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha}$ és $ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$.

<u>Az összefüggések alkalmazásai:</u>

- Adott szögfüggvényekből az összes többi meghatározása (táblázat nélkül).
- Trigonometrikus egyenlőségek igazolása, kifejezések egyszerűbb alakra hozása.
- Trigonometrikus egyenletek megoldása.

<u>Trigonometrikus egyenlőségek igazolásának módszerei:</u>

- Az egyik oldalt addig alakítjuk, míg a másikkal egyenlő lesz.
- Külön – külön alakítjuk a két oldalt, amíg ugyanazzal lesznek egyenlők.
- Megmutatjuk, hogy a két oldalon szereplő kifejezések különbsége 0, vagy hányadosuk 1.

<u>Megjegyzés:</u>

- *A feladatmegoldás során, ha kiírjuk a szögfüggvény értékeit, akkor legalább* 4 *tizedesjegyre kerekítsünk. Pl.:* $tg\ 25° \approx 0{,}4663$.
- *A számológéppel* $ctg\ \alpha$ *– t úgy számolhatunk, hogy helyette az* $\frac{1}{tg\ \alpha}$ *értékét keressük meg.*
- *Trigonometrikus kifejezés hatványát a következőképpen jelöljük:* $(\sin\alpha)^2$ *vagy* $sin^2\alpha$.
- *A vízszintestől felfelé történő elhajlást emelkedési szögnek, a vízszintestől lefelé történő elhajlást pedig depressziószögnek nevezzük.*

TÉTEL:
Ha egy háromszög két oldalának hossza a és b, az általuk közrefogott szög pedig a γ, akkor a háromszög területe: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Szerkeszd meg az α hegyesszöget, ha ismert a következő: $\sin\alpha = \frac{2}{7}$!

2. (K) Szerkeszd meg az α hegyesszöget, ha ismert a következő: $ctg\ \alpha = 1$!

3. (K) Töltsd ki számológép segítségével a következő táblázatot!

α hegyesszög	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$
$46°$				
$32°\ 18'$				
	$0,2458$			
		$0,7531$		
			$2,6692$	
				$1,2345$

4. (K) Határozd meg az α hegyesszög többi szögfüggvényét, az α kiszámítása nélkül!

a) $\sin\alpha = \frac{1}{7}$

b) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

c) $tg\ \alpha = \frac{5}{4}$

d) $ctg\ \alpha = \frac{2}{7}$

5. (K) Számítsd ki az α hegyesszög nagyságát!

a) $\sin\ (\alpha - 11°) = \cos\ (\alpha - 7°)$

b) $tg\ (\alpha - 36°) = ctg\ (\alpha + 28°)$!

6. (K) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\sin 30° + \cos 60°$

b) $2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} \cdot tg\ \frac{\pi}{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sin 45° - 7 \cdot ctg\ \frac{\pi}{4}$

d) $\frac{tg\ 45° \cdot sin\ 60°}{ctg\ 30°}$

e) $cos^2\frac{\pi}{4} - tg^2\frac{\pi}{6} + ctg^2\frac{\pi}{3}$

7. (K) Számítsd ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét!

a) $sin\ 40° \cdot tg\ 50° \cdot sin\ 50° + cos^2\ 50°$

b) $(1 - \cos 15°) \cdot (1 + \sin 75°) + \cos 75° \cdot \cos 15° \cdot ctg\ 15°$

c) $sin^2 17° + sin^2 73° + sin^2 53° + sin^2 37°$

d) $cos^2\ 20° \cdot tg^2\ 20° + ctg\ 50° \cdot tg\ 50° + sin^2\ 70°$

e) $(1 - \cos 10°) \cdot (1 + \sin 80°) + \frac{1}{1 + tg^2\ 10°}$

8. (K) Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot ctg\ \alpha$ $\quad$ $(1 - \cos\alpha) \cdot (1 + \cos\alpha)$ $\quad$ $\frac{tg\ \alpha}{\sin\alpha}$

$\frac{1}{1 + tg^2\alpha}$ $\quad$ $ctg^2\alpha \cdot (cos^2\alpha - 1)$ $\quad$ $\frac{sin^2\alpha - 1}{1 - cos^2\alpha}$

$\frac{sin^2\alpha - cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ $\quad$ $\frac{cos^3\alpha - sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$ $\quad$ $\frac{sin^4\alpha - cos^4\alpha}{sin^2\alpha - cos^2\alpha}$

9. (E) Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

$$\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha} \qquad \frac{cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot\frac{tg^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha} \qquad \frac{cos^2\alpha-ctg^2\alpha}{tg^2\alpha-sin^2\alpha}$$

$$\frac{1+tg\,\alpha+tg^2\alpha}{1+ctg\,\alpha+\ ctg^2\alpha} \qquad \frac{1}{sin^2\alpha}-1 \qquad \frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}$$

$$\frac{tg^2\alpha-1}{tg^2\alpha+1}+cos^2x \qquad (1+tg\,\alpha)^2+(1-tg\,\alpha)^2 \qquad \frac{sin^2\alpha-1}{cos^2\alpha-1}+tg\,\alpha\cdot ctg\alpha$$

10. (E) Írd egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket, ha α hegyesszög!

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-sin^2\alpha}} \qquad \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \cos\alpha\cdot\sqrt{1+tg^2\alpha}$$

11. (E) Igazold különböző módszerekkel a következő egyenlőségeket!

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha} \qquad \frac{\sin\alpha+tg\,\alpha}{tg\,\alpha}=1+\sin\alpha\cdot ctg\,\alpha \qquad \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

12. (E) Bizonyítsd be, hogy a következő kifejezések értéke 1!

$$2-sin^2\alpha-cos^2\alpha \qquad \frac{cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{tg^2\alpha}{1-\cos\alpha} \qquad \frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}$$

$$cos^4\alpha-sin^4\alpha+2\cdot sin^2\alpha \qquad (\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\frac{2}{tg\,\alpha+ctg\,\alpha} \qquad \frac{sin^2\alpha-cos^2\alpha+1}{sin^2\alpha}$$

$$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \frac{sin^3\alpha+cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cdot\cos\alpha \qquad \frac{sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\cos\alpha$$

$$\frac{tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\frac{ctg^2\alpha-1}{ctg\,\alpha} \qquad sin^4\alpha+cos^4\alpha+2\cdot sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha$$

13. (E) Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket!

$(tg\,\alpha + ctg\,\alpha)^2 - (tg\,\alpha - ctg\,\alpha)^2 = 4$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$

$sin^6\alpha + cos^6\alpha + 3 \cdot sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha = 1$

$1 - \frac{1}{cos^2\alpha} = -tg^2\alpha$

$2 \cdot (sin^6\alpha + cos^6\alpha) - 3 \cdot (sin^4\alpha + cos^4\alpha) = -1$

$\frac{sin^2\alpha - cos^2\alpha + 1}{sin^2\alpha} = 2$

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2 \cdot (1 + \sin\alpha) \cdot (1 + \cos\alpha)$

$\frac{tg\,\alpha}{1 - 3 \cdot tg^2\alpha} \cdot \frac{ctg^2\alpha - 3}{ctg\,\alpha} = 1$

$\left(tg\,\alpha + \sqrt{3} \cdot ctg\,\alpha\right)^2 - \left(tg\,\alpha - \sqrt{3} \cdot ctg\,\alpha\right)^2 = 4\sqrt{3}$

$\frac{1}{cos^2\alpha} - tg^2\alpha - sin^2\alpha = cos^2\alpha$

$\sqrt{cos^4\alpha + 4 \cdot sin^2\alpha} + \sqrt{sin^4\alpha + 4 \cdot cos^2\alpha} = 3$

14. (E) Milyen α hegyesszögre teljesül a következő egyenlet?

a) $tg\,\alpha + ctg\,\alpha = 2$

b) $sin^2\,\alpha + cos^2\alpha + tg^2\alpha + ctg^2\alpha + \frac{1}{sin^2\alpha} + \frac{1}{cos^2\alpha} = 5$

15. (K) Jelölje a és b egy derékszögű háromszög befogóit, c pedig az átfogót. Az a oldallal szemben α, a b oldalla szemben β szög van. Add meg a táblázat hiányzó adatait! Az oldalak hosszát a megadott adatokkal számold ki!

a	b	c	α	β
$23\ cm$	$47\ cm$			
	$15\ cm$	$38\ cm$		
$8\ m$			$29°$	
	$33\ dm$		$73°\ 54'$	
		$16\ mm$		$\frac{\pi}{15}$ $(radián)$

16. (K) Egy derékszögű háromszögben $b = 4,1\ cm$ és $\alpha = 41°\ 14'$. Határozd meg a következőket: β; K; T; r; R!

17. (K) Egy háromszög két oldala $a = 8,4\ cm$ és $b = 9,7\ cm$ hossszú. Az általuk bezárt szög nagysága $\gamma = 106°\ 42'$. Mekkora a háromszög területe?

18. (K) Egy háromszög területe $17,2\ cm^2$, két oldalának hossza pedig $6\ cm$ és $8\ cm$. Számítsd ki a két adott oldal által közbezárt szög nagyságát! Hány megoldása van a feladatnak?

19. (K) Egy háromszögben $a = 4,8\ cm, b = 6,4\ cm$ és a közrezárt szög $\gamma = 48°$. Mekkora az a oldalhoz tartozó m_a magasság?

20. (K) Egy háromszög egyik oldala $12\ cm$ hosszúságú, a rajta lévő szögek nagysága $54°$ és $61°$. Mekkora a háromszög területe?

21. (K) Egy derékszögű $ABC\ \Delta$ egyik hegyesszöge $\alpha = 50°$, a szöggel szemközti befogója $a = 8\ cm$. Az A csúcsból kiinduló súlyvonal a P pontban, a szögfelező a Q pontban metszi az a befogót. Hány fokos szöget zár be az f_α szögfelező és az s_a súlyvonal?

22. (K) Egy rombusz átlói $8,6\ cm$, illetve $12,4\ cm$ hosszúak. Mekkorák a szögei és az oldala?

23. (K) Egy paralelogramma két oldala $8\ cm$ és $10\ cm$ hosszúságú, az általuk bezárt szög $47°$. Mekkora a paralelogramma területe?

24. (K) Egy trapéz egyik alapja $a = 8\ cm$, az alapon fekvő két szöge $\alpha = 72°$, $\beta = 48°$, magassága $m = 3\ cm$. Mekkora a trapéz kerülete, illetve területe?

25. (K) Egy trapéz párhuzamos oldalai $5\ cm$ és $11\ cm$ hosszúságúak. A $11\ cm$ – es oldalon lévő szögek $43°$ és $57°$ nagyságúak. Mekkora a trapéz területe?

26. (K) Egy deltoid szimmetriaátlója $6,3\ cm$ hosszú, amelyet a $4\ cm$ hosszúságú másik átló $16 : 5$ arányban oszt két részre. Mekkora a deltoid kerülete és területe? Mekkorák a deltoid szögei?

27. (K) Egy $10\ cm$ sugarú körhöz egy pontból $24\ cm$ hosszúságú érintők húzhatók. Mekkora az érintési pontokat összekötő húr hossza? Mekkora az érintők hajlásszöge?

28. (K) Mekkora középponti szög tartozik az $5\ cm$ sugarú körben a $4\ cm$ hosszú húrhoz?

29. (K) Egy körben a középponttól $6\ cm$ távolságra fekvő húrhoz $112°$ középponti szög tartozik. Mekkora a kör sugara, a húr hossza és a húr által a körből kimetszett kisebbik körszelet területe?

30. (K) Egy $8\ m$ sugarú kör $7\ m$ hosszúságú ívéhez mekkora húr tartozik?

31. (K) Egy $15\ cm$ sugarú kört mekkora területű részekre osztja a $10\ cm$ hosszú húrja?

32. (K) Mekkora a kör két párhuzamos húrja által határolt terület, ha a kör sugara $48\ m$, a húrok pedig $12\ m$, illetve $25\ m$ távolságra vannak a kör középpontjától?

33. (K) Egy $10\ cm$ sugarú körbe szabályos tízszöget rajzolunk. Mekkora a tízszög kerülete?

34. (K) Mennyi a szabályos nyolcszög területe, ha az oldala $a = 12\ cm$?

35. (K) Egy szabályos ötszög területe $540\ cm^2$. Mekkora a beírt és a köré írt kör területe?

36. (K) Egy $3,5\ m$ hosszú létrát $2,8\ m$ magas falhoz támasztunk. Hány fokos szöget zár be a létra a (vízszintes) talajjal? Milyen távolságra van a létra alja a faltól?

37. (K) Egy víztározóban egy bóját sodronnyal rögzítettek a fenékhez úgy, hogy a sodrony függőlegesen feszült ki. Néhány nap múlva $1\ m$ – rel csökkent a vízmagasság a tározóban, ezért a sodrony $20°$ - os szöggel elhajlott a függőleges iránytól. Milyen hosszú volt a sodrony?

38. (K) Két, egymástól $7,2\ m$ távolságra lévő oszlopra $7,8\ m$ hosszú sodronyt kötnek fel, a földtől $10\ m$ magasságban. A sodrony közepére nehéz tárgyat akasztanak. Mekkora távolságra van a földtől a tárgy akasztója? Mekkora szöget zár be a tárgy felett a sodrony két fele?

39. (K) Egy épülettől $32\ m$ távolságra az épület egyik ablakának felső széle $16°\ 32'$, míg az alsó széle $14°\ 2'$ emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas az ablak?

40. (K) Egy $8\ m$ széles út egyik oldalán egy ablakból a szemben levő házfal alját $39°$ lehajlási (depresszió) szöggel, tetejét $22°$ emelkedési szöggel látjuk. Milyen magas az a házfal?

41. (K) Egy lejtős út végén lévő templomtorony magasságát kell meghatározni. Az úton a torony aljától felfelé mérünk egy $60\ m$ hosszúságú szakaszt. A szakasz végpontjából a torony csúcsa $4°\ 28'$ emelkedési szögbne látszik, míg az alja $22°\ 15'$ lehajlási szög alatt látszik. Milyen magas a templomtorony?

42. (K) Egy $100\ m$ hosszú, $15°\ 30'$ hajlásszögben emelkedő út kezdetéről a végén lévő kilátó $12°\ 45'$ nagyságú szög alatt látszik. Milyen magas a kilátó?

43. (K) Milyen magas az a torony, amely a torony aljától $50\ m$ távolságra $1,5\ m$ magasan elhelyezett műszer segítségével $23,5°$ - os szöggel látható?

44. (K) Egy $3,77\ m$ magas szobor számára olyan alapzatot kell készíteni, hogy a $14\ m$ távolságban levő szemlélő, kinek szeme $1,57\ m$ magasságban van a föld fölött, a szobor legmagasabb pontját $38°$ - os szög alatt lássa. Milyen magasnak kell az alapzatnak lennie?

45. (K) Egy út egyik oldalán egy ablakból, az út szintjétől $7,6\ m$ magasságból egy szemben lévő házfal alját $30°$ lehajlási szöggel, tetejét $25°$ emelkedési szöggel látjuk. Milyen magas a házfal?

46. (K) Egy folyam partjától $45\ m$ távolságban van egy $20\ m$ magas torony. Milyen széles a folyam, ha azt (a szélességet), a toronyba fölmenve, $18\ m$ magasból $12°$ alatt látjuk?

47. (E) Valaki a folyó partján állva, a túlsó parton levő fát $60°$ alatt ltája, ha pedig 40 lábbal tovább megy, a fát $30°$ alatt látja. Milyen széles a folyó és milyen magas a fa?

48. (E) Egy hegy csúcsáról egy folyó két átellenes pontját $25°\ 1'$, illetve $37°\ 22'$ lehajlási szög alatt látjuk. A folyó szélessége $350\ m$. Milyen magasan van a hegycsúcs a folyó felett, ha a két átellenes pontot összekötő egyenes átmegy a hegycsúcs síkra való merőleges vetületi talppontján?

49. (E) Közvetlenül egy folyó partján áll egy épület, amelynek két, egymás felett levő ablaka $9\ m$ – re van egymástól. Milyen széles a folyó, ha az egyik ablakból $14°\ 25'$ lehajlási szög, míg a másik ablakból $8°\ 12'$ lehajlási szög alatt látjuk a folyó túlsó partját?

50. (E) Egy $670\ m$ magas hegyről egy felhő $60°$ - os emelkedési szög alatt látszik. A hegy tövében lévő tóban a felhő tükörképe $70°$ - os lehajlási szög alatt ltászik. Milyen magasan van a felhő a hegycsúcs felett?

51. (E) Egy hegy C csúcsát a hegy lábánál levő A pontból a vízszinteshez képest $60°$ - os szög alatt látjuk. Ha az A pontból a vízszintessel $30°$ - os szöget bezáró egyenes úton $1\ km$ – t megyünk, akkor olyan B pontba jutunk, amelyre $CBA\sphericalangle = 135°$. Milyen magas a hegy?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2003.; Matematika 10.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2009.; Sokszínű matematika 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 10; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2014.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 10; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye II.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Dr. Gyapjas Ferencné; 2002.; Matematika feladatgyűjtemény I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(10) Fuksz Éva; 2011.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából $9-10.$ évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Fröhlich Lajos; 2005.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(12) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(13) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Dobcsányi János; 2013.; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(17) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(18) Saját anyagok