Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

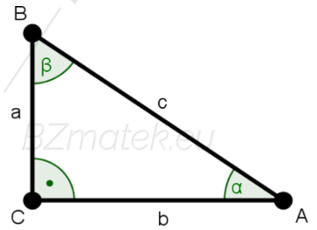
- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL: (Pótszögek szögfüggvényei)
Hegyesszög szinusza megegyezi pótszögének koszinuszával (és fordítva).

Hegyesszög tangense megegyezik pótszögének kotangensével (és fordítva).

Bizonyítás:
Tekintsük a következő ábrát:



A szögfüggvények definíciójából felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$

$\frac{a}{b} = tg\ \alpha = ctg\ \beta$

Mivel $\alpha + \beta = 90°$, így ebből a következőt kapjuk: $\beta = 90° - \alpha$.

Ezek alapján adódnak az állítások:

$\sin\alpha = \cos\ (90° - \alpha)$

$\cos\alpha = \sin\ (90° - \alpha)$

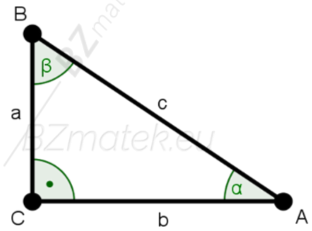
$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\ (90° - \alpha)$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\ (90° - \alpha)$

■

TÉTEL: (Trigonometrikus Pitagorasz – tétel)
Adott α hegyesszög szinuszának és koszinuszának négyzetösszege 1 – gyel egyenlő.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük a következő ábrát:



Írjuk fel a derékszögű $ABC\ \Delta$ - re a Pitagorasz – tételt és rendezzük a következőképpen:

$a^2 + b^2 = c^2$

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

A szögfüggvények definíciójából felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ és $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Ezek alapján adódik az állítás:

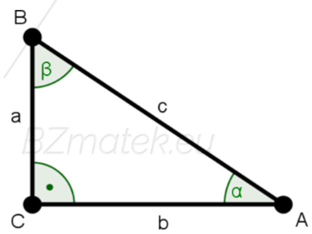
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

■

TÉTEL: (Összefüggés a szögfüggvények között)
Bármely α hegyesszög esetén: $tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ és $ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Bármely hegyesszög tangense és kotangense egymás reciproka.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük a következő ábrát:



A szögfüggvények definíciójából felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$tg\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Ezek alapján adódnak a további állítások is:

$$tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha}$$

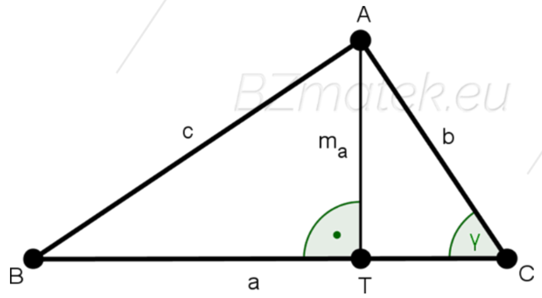
$$ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

■

TÉTEL:
Ha egy háromszög két oldalának hossza a és b, az általuk közrefogott szög pedig a γ, akkor a háromszög területe: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Bizonyítás:
Először tegyük fel, hogy $\gamma < 90°$.

Tekintsük a következő ábrát:

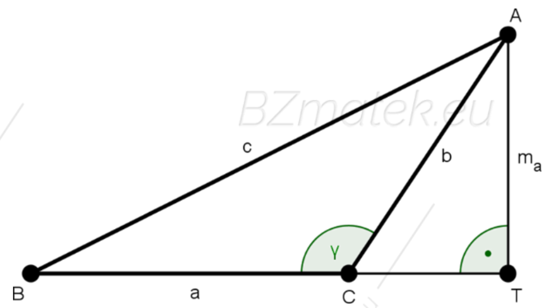


Mivel $\sin\gamma = \frac{m_a}{b}$, így ebből a következőt kapjuk: $m_a = b \cdot \sin\gamma$.

Ezek alapján adódik az állítás: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Most tegyük fel, hogy $\gamma > 90°$.

Tekintsük a következő ábrát:

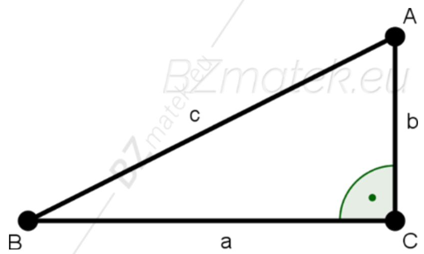


Mivel $\sin\ (180° - \gamma) = \frac{m_a}{b}$, így ebből a következőt kapjuk: $m_a = b \cdot \sin\ (180° - \gamma)$.

Ezek alapján adódik az állítás: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(180° - \gamma)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Végül tegyük fel, hogy $\gamma = 90°$.

Tekintsük a következő ábrát:



Ekkor a következő adódik: $m_a = b$ és $\sin 90° = 1$.

Ezek alapján adódik az állítás:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot 1}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

A többi területképlet az előzőhöz hasonlóan látható be.

■