Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Egymásba írt testek, forgatással nyert testek

Forgatással nyert testek: (néhány eset a teljesség igénye nélkül)

1) Háromszög:

- Derékszögű háromszög az átfogója körül → 2 kúp összege
- Derékszögű háromszög egy befogója körül → 2 kúp
- Hegyesszögű háromszög egy oldala körül → 2 kúp összege
- Tompaszögű háromszög leghosszabb oldala körül → 2 kúp összege
- Tompaszögű háromszög két kisebb oldala körül → 2 kúp különbsége
- Egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye körül → 1 kúp

2) Négyzet:

- egy oldala körül → 1 henger
- egy oldalfelező merőlegese körül → 1 henger
- egy átlója körül → 2 kúp összege

3) Téglalap:

- egy oldala körül → 1 henger
- egy oldalfelező merőlegese körül → 1 henger

4) Rombusz:

- egy átlója körül → 2 kúp összege
- egy oldala körül → 1 henger (átdarabolással)

5) Paralelogramma:

- egy oldala körül → 1 henger (átdarabolással)

6) Trapéz:

- szimmetriatengelye körül → 1 csonka kúp
- hosszabb alap körül → 1 henger és 2 kúp összege
- rövidebb alap körül → 1 henger és 2 kúp különbsége

7) Derékszögű trapéz:

- hosszabb alap körül → 1 henger és 1 kúp összege
- rövidebb alap körül → 1 henger és 1 kúp különbsége
- rövidebb szára körül → 1 csonka kúp

8) Deltoid:

- szimmetriatengelye körül (konvex eset) → 2 kúp összege
- szimmetriatengelye körül (konkáv eset) → 2 kúp különbsége

9) Kör:

- átmérője körül → 1 gömb

<u>Megjegyzés:</u>
A forgatás után „összeragasztott” testek esetén felszín számításánál ügyelni kell arra, hogy a fedett részeket (körlapok területeit) ne számítsuk bele.

DEFINÍCIÓ: (Be írt gömb)
Az olyan gömböt, amely egy test minden lapját érinti, a test beírt gömbjének nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Köré írt gömb)
Az olyan gömböt, amely átmegy egy test minden csúcsán, a test köré írt gömbjének nevezzük.

<u>Megjegyzés:</u>

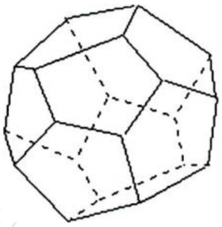
- *Minden szabályos testnek van köré írt és beírt gömbje.*
- *Minden téglatestnek van köré írt gömbje.*
- *Ha létezik a testnek beírt gömbje, akkor a sugarára teljesül a következő:* $r = \frac{3 \cdot V_{test}}{A_{test}}$.

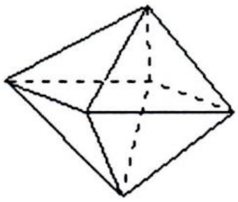
DEFINÍCIÓ: (Szabályos testek)
Az olyan poliédereket, amelyek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, továbbá lapszögeik, illetve élszögeik egyenlő nagyságúak, szabályos poliédereknek nevezzük.

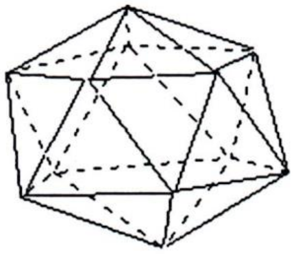
Megjegyzés:
Összesen 5 *szabályos poliéder létezik, s ezek a következők:*

Tetraéder: 

Hexaéder: 

Dodekaéder: 

Oktaéder: 

Ikozaéder: 

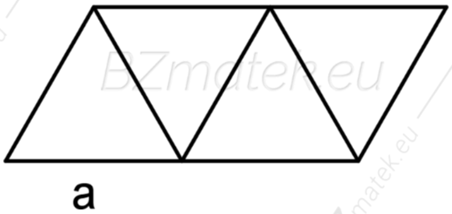
Szabályos testek duálisa:
A szabályos test szomszédos lapjai középpontjait kössük össze, így egy olyan szabályos testet kapunk, amelyet annyi szabályos sokszög határol, ahány csúcsa van az eredeti szabályos testnek, vagyis a lapok és csúcsok felcserélődnek. Az így kapott testet a szabályos test duálisának nevezzük.

Megjegyzés:

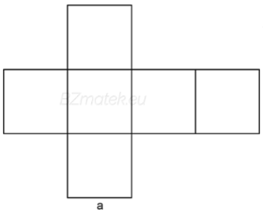
- *A tetraéder lapközéppontjai egy tetraédert határoznak meg.*
- *A kocka lapközéppontjai egy szabályos oktaédert határoznak meg.*
- *A dodekaéder lapközéppontjai egy ikozaédert határoznak meg.*
- *Az oktaéder lapközéppontjai egy kockát határoznak meg.*
- *Az ikozaéder lapközéppontjai egy dodekaédert határoznak meg.*

Szabályos testek testhálói:

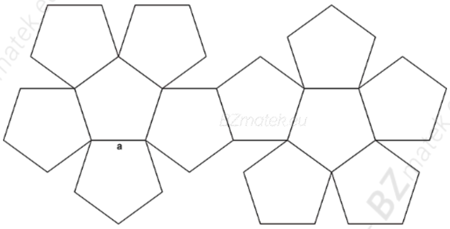
Tetraéder:



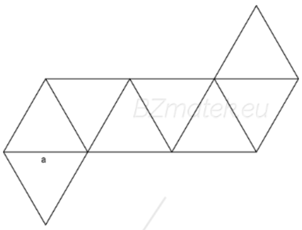
Hexaéder:



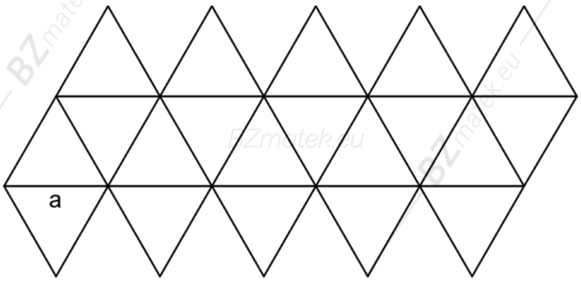
Dodekaéder:



Oktaéder:



Ikozaéder:

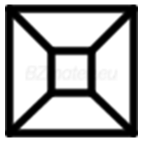


<u>Schlegel – diagram:</u>

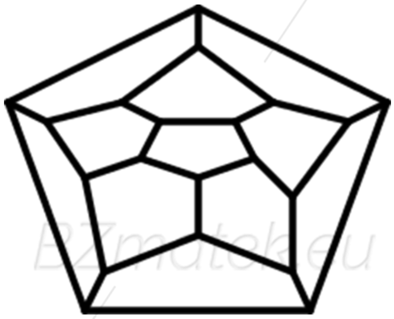
Egy poliéderből eljuthatunk egy síkbeli ábrához (gráfhoz), ha a testet (a csúcsokat és az éleket megtartva) az egyik lapjára állítva „belenyomjuk” a síkba. Ezeket az ábrákat a testek Schlegel – diagramjának nevezzük.

Tetraéder:

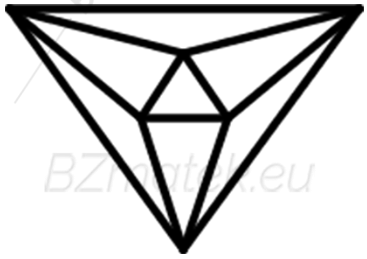
Hexaéder:



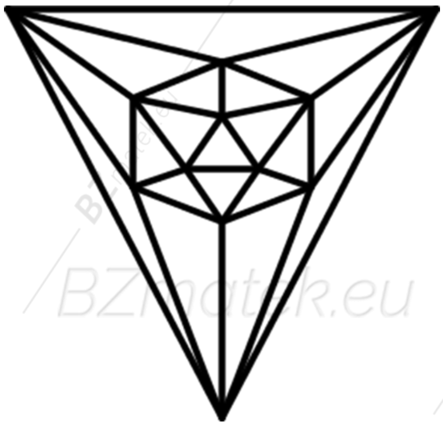
Dodekaéder:



Oktaéder:



Ikozaéder:



A poliéder élei és csúcsai olyan szabályos síkgráfot alkotnak, amelyben minden csúcs fokszáma egyenlő és minden tartományt ugyanannyi él határol.

<u>Szabályos poliéderek tulajdonságai:</u>

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{l}$	**Típus**
3	3	4	6	4	Tetraéder
3	4	8	12	6	Kocka
3	5	20	30	12	Dodekaéder
4	3	6	12	8	Oktaéder
5	3	12	30	20	Ikozaéder

A jelölések a következők: $k \rightarrow$ egy csúcsba ennyi él fut be; $n \rightarrow$ tartományokat határoló élek; $c \rightarrow$ a test csúcsainak száma; $l \rightarrow$ a test lapjainak száma; $e \rightarrow$ a test éleinek száma.

TÉTEL: (Euler – féle poliéder tétel)
Ha egy poliéder csúcsainak száma c, lapjainak száma l, és éleinek száma e, akkor teljesül, hogy $c + l = e + 2$.

Szabályos testek felsízne, térfogata:

- Tetraéder: $A = \sqrt{3} \cdot a^2$ és $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$
- Hexaéder: $A = 6 \cdot a^2$ és $V = a^3$
- Dodekaéder: $A = 3 \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} \cdot a^2$ és $V = \frac{15 + 7 \cdot \sqrt{5}}{4} \cdot a^3$
- Oktaéder: $A = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$ és $V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a^3$
- Ikozaéder: $A = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$ és $V = \frac{15 + 5 \cdot \sqrt{5}}{12} \cdot a^3$

Szabályos testek lapszögei:

- Tetraéder: $\varphi \approx 70{,}52°$
- Hexaéder: $\varphi = 90°$
- Dodekaéder: $\varphi \approx 116{,}55°$
- Oktaéder: $\varphi \approx 109{,}47°$
- Ikozaéder: $\varphi \approx 138{,}18°$

Szabályos testek beírt és köré írt gömb sugara:

- Tetraéder: $r = \frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$ és $R = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$
- Hexaéder: $r = \frac{1}{2} \cdot a$ és $R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$
- Dodekaéder: $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{25 + 11 \cdot \sqrt{5}}{10}} \cdot a$ és $R = \sqrt{3} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot a$
- Oktaéder: $r = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot a$ és $R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$
- Ikozaéder: $r = \sqrt{\frac{42 + 18 \cdot \sqrt{5}}{12}} \cdot a$ és $R = \frac{\sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}}{4} \cdot a$

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Egy $4,6\ dm$ átmérőjű, $5\ dm$ magasságú, $7,2\ \frac{kg}{dm^3}$ sűrűségű hengerből a lehető legnagyobb szabályos nyolcoldalú oszlopot kell készíteni. Mekkora lesz a tömege?**

2. **(K) Egy $0,3\ m$ átmérőjű, $3,5\ m$ hosszú henger alakú rönkfából a lehető legnagyobb négyzetes gerendát kell kivágni. Mekkora lesz a gerenda, illetve a hulladék térfogata?**

3. **(K) Egy háromoldalú egyenes hasábba egyenes hengert írunk. Mekkora a henger térfogata, ha a hasáb térfogata $19\,850\ cm^3$, és a hasáb alaplapjának oldalai $44\ cm, 39\ cm, 17\ cm$?**

4. **(K) Mekkora az egyenes csonkakúpba írt szabályos nyolcszög alapú egyenes csonkagúla térfogata, ha a csonkakúp alap és fedőlapjának sugara $6\ dm$ és $3,5\ dm$, magassága pedig $12\ dm$?**

5. **(K) Egyenes körkúp alaplapjának átmérője $3\ dm$, magassága $8\ dm$. Mekkora a kúp és a kúpba írt szabályos nyolcszög alapú gúla térfogatának a különbsége?**

6. **(K) Szabályos tizenkétszög alapú gúla alapélei $12\ cm$ hosszúak, magassága $22\ cm$. Mekkora a beírható és a köré írható kúp térfogata?**

7. **(K) Egy kúp alapkörének sugara $3\ cm$, tengelymetszete szabályos háromszög. Mekkora a beírható négyzet alapú gúla felszíne és térfogata?**

8. **(K) Egy $7\ cm$ sugarú kör alapú, $6\ cm$ magasságú egyenes kúp köré szabályos háromszög alapú gúlát írunk. Mekkora az oldallapok területe?**

9. **(K) Egy gömb térfogata $122,6\ cm^3$. A gömbbe egyenes körkúpot írunk, melynek tengelymetszetében a kúp csúcsánál levő szög $56,7°$. Mekkora a kúp térfogata?**

10. (K) Számítsuk ki a $3,69\ dm$ alapsugarú és $8\ dm$ magasságú egyenes körkúpba írt gömb felszínét!

11. (K) Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írható egy $12\ cm$ alapsugarú, $32\ cm$ alkotójú egyenes körkúp?

12. (K) Egyenes körkúp alaplapjának sugara $2\ m$, alkotója az alaplappal $54°$ - os szöget zár be. Számítsuk ki a körülírt és a beírt gömb sugarát!

13. (K) Egy $12\ cm$ sugarú gömb köré írjunk egyenes körkúpot, amelynek magassága $72\ cm$. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

14. (E) Írjunk egy $10\ cm$ sugarú gömb köré egyenes körkúpot, amelynek alapköre $20\ cm$ sugarú. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

15. (E) Egy csúcsával lefelé fordított egyenlő oldalú üres kúpba beleteszünk egy $2\ cm$ sugarú gömböt. Mennyi vizet kell a kúpba öntenünk, hogy a gömböt a víz befedje? (A víz a gömb alá is befolyik.)

16. (K) Egy henger alapkörének sugara $5\ cm$, magassága $24\ cm$. Mekkora sugarú gömb írható a henger köré?

17. (K) Egy csonkakúp alapkörének sugara $4\ cm$, fedőkörének sugara $3\ cm$, magassága $7\ cm$. Mekkora sugarú gömb írható a csonkakúp köré?

18. (K) Két gömb belülről érinti egymást. A nagyobbik gömbnek a kisebbiken kívüli része $108,909\ cm^3$ térfogatú, a gömbök középpontjainak a távolsága $2\ cm$. Mekkora a két gömb sugara?

19. (K) Egy szabályos négyzet alapú gúla magassága $30\ cm$, alapéle $12\ cm$. Mekkora a gúlába írható és a gúla köré írt gömb sugara?

20. (E) Egy négyoldalú szabályos gúla alapéle $30\ cm$, a gúlába $13\ cm$ sugarú gömb írható. Mekkora a gúla térfogata?

21. (K) Mekkora a kocka beírt gömbjének térfogata, ha a kocka térfogata $1728\ cm^3$?

22. (K) Mekkora a téglatest köré írt gömb felszíne, ha az egy csúcsba futó élek hossza $2\ cm, 8\ cm$ és $16\ cm$?

23. (E) Két egymást kívülről érintő gömb sugara $5\ cm$ és $8\ cm$, s egy kúp érinti a gömböket. Mekkora a kúp palástjának az a része, amely a két érintési kör síkja között van?

24. (E) Hogyan aránylik egymáshoz annak a három gömbnek a sugara, amelyek közül az első egy kocka köré van írva, a második átmegy e kocka éleinek felezőpontjain, és a harmadik ebbe a kockába van beírva?

25. (E) Hogyan aránylanak egymáshoz a gömb, a gömb köré írt henger és a köré írt hengerbe írt kúp térfogata?

26. (K) Egy $21,7\ cm$ és $36,8\ cm$ oldalú téglalapot forgatunk egyszer az egyik, majd a másik oldala, végül az egyik és a másik szimmetriatengelye körül. Határozzuk meg a keletkezett testek felszínét és térfogatát!

27. (K) Egy $10\ cm$ oldalú négyzetet forgatunk az egyik középvonala körül. Számítsd ki a keletkezett forgástest felszínét és térfogatát!

28. (K) Egy $8\ cm$ oldalú négyzetet az átlója körül megforgatjuk. Mekkora a keletkezett test felszíne és térfogata?

29. (K) Egy 6,9 cm oldalú négyzetet megforgatunk egyik oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgáshenger felszíne és térfogat?

30. (K) Forgassunk meg a szimmetriatengelye körül egy egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja $88\ cm$, szárai $125\ cm$ hosszúak. Mekkora lesz a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

31. (K) Egy háromszög két oldala $62\ cm$ és $74\ cm$, a közbezárt szögük $46,7°$. Forgassuk a háromszöget a $62\ cm$ – es oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

32. (K) Egy háromszög oldalai $34\ cm, 42\ cm, 61\ cm$. Forgassuk a háromszöget a leghosszabb oldala körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

33. (K) Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza $12\ cm$ és $5\ cm$. Forgassuk meg a derékszögű háromszöget a hosszabb befogója körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

34. (K) Forgassuk meg átfogója körül azt a derékszögű háromszöget, melynek befogói $6\ cm$ és $8\ cm$ hosszúságúak. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

35. (K) Egy $16\ cm$ oldalú szabályos háromszöget megforgatunk az egyik csúcsán átmenő és a szemközti oldallal párhuzamos egyenes körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

36. (K) Egy rombusz oldalai $25\ cm$ – esek, egyik átlója $40\ cm$. Forgassuk a rombuszt az egyik oldala körül. Mekkora lesz az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

37. (K) Egy egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalai $20\ cm$ és $40\ cm$, a szárak $26\ cm$ hosszúak. Forgassuk meg a $40\ cm$ – es oldal körül. Mekkora a keletkezett forgastest felszíne és térfogata?

38. (K) Egy derékszögű trapéz párhuzamos oldalai $30\ cm$ és $45\ cm$, a két derékszög melletti oldal $36\ cm$. Forgassuk meg a trapézt a $45\ cm$ – es oldal körül. Mekkora a keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

39. (K) Húrtrapéz forog a szimmetriatengelye körül. A trapéz párhuzamos oldalai $22\ cm$, illetve $8\ cm$, a nem párhuzamos oldalak $13\ cm$ hosszúak. Mekkora a forgás közben keletkezett csonkakúp térfogata?

40. (K) Egy húrtrapéz alapjainak hossza $30\ cm$ és $60\ cm$, magassága $15\ cm$. Megforgatjuk a rövidebbik alapja körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

41. (K) Egy $a = 10\ cm$ oldalú szabályos hatszöget forgassunk meg két szemközti csúcsát összekötő egyenes körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

42. (K) Adott egy $15\ cm$ sugarú kör köré írt szabályos hatszög. Forgassuk meg a hatszöget a két szemközti oldalfelezőpontokat összekötő szimmetriatengelye körül. Mekkora az így keletkezett forgástest felszíne és térfogata?

43. (E) Tekintsünk egy $20\ cm$ sugarú körbe írt szabályos ötszöget. Forgassuk meg az ötszöget az egyik szimmetriatengelye körül. Mekkora az így keletkező forgástest felszíne és térfogata?

44. (K) Adott egy $10\ cm$ átmérőjű körlap. Forgassuk meg egy szimmetriatengelye körül. Mekkora az így keletkező test felszíne és térfogata?

45. (K) Adott egy $18\ cm$ átmérőjű félkörlap. Forgassuk meg a szimmetriatengelye körül. Mekkora az így keletkező test felszíne és térfogata?

46. (E) Egy konvex testet 8 háromszög és 6 nyolcszög határol. Mennyi éle és csúcsa van ennek a testnek?

47. (E) Bizonyítsd be, hogy egy szabályos tetraéder éleinek felezőpontjai egy szabályos oktaéder csúcspontjai!

48. (E) Bizonyítsd be, hogy a szabályos tetraéder valamely belső pontjának az oldalaktól mért távolságait összegezve a test magasságával egyenlő értéket kapunk!

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(12) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(13) Saját anyagok