Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 0; 1; 2$ .... Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Ha két közös síkon álló tetraéder alapterülete (T_a) és magassága (M) egyenlő, akkor az alaplappal párhuazmos T_1 és T_2 síkmetszeteik területe is megegyezik.

Bizonyítás:
A két tetraéder csúcsa legyen C_1, illetve C_2, a levágott kisebb kúpok magassága pedig m.

Ekkor az azonos (λ arányú) C_1, illetve C_2 középpontú, középpontos hasonlóságból adódik a bizonyítandó állítás:

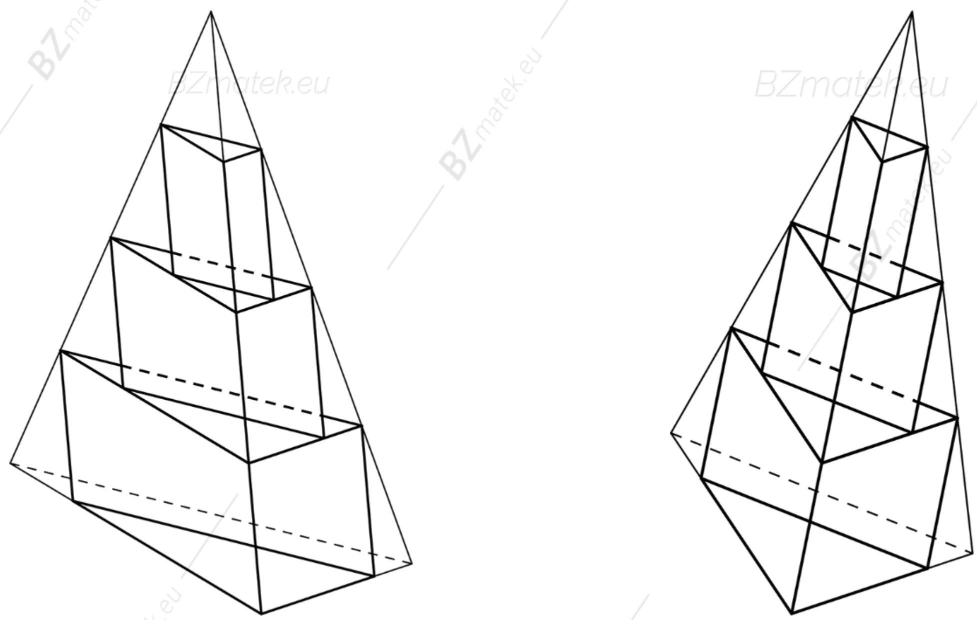
$$\lambda = \frac{m}{M} \qquad \rightarrow \qquad \lambda^2 = \frac{T_1}{T_a} = \frac{T_2}{T_a} \qquad \rightarrow \qquad T_1 = T_2$$

■

TÉTEL:
Az azonos alapterületű és magasságú tetraéderek térfogata megegyezik.

Bizonyítás:
Tekintsünk két azonos alapterületű (T_a) és magasságú (M) tetraédert.

Osszuk fel a tetraéderek magasságát n egyenlő részre ($n > 1; n \in \mathbb{Z}$).



Ha az osztópontokon át a tetraéderek alaplapjával párhuzamos síkokat fektetünk, akkor egy tetraéder belsejében $n - 1$ darab háromszög alapú hasábot kapunk úgy, hogy a hasábok oldaléle legyen párhuzamos a tetréder egyik oldalélével.

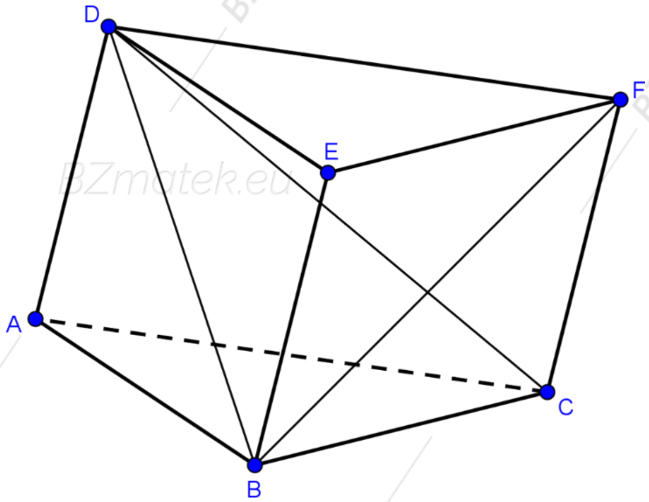
Ugyanazon a szinten levő hasábok térfogata egyenlő, mert alapterületük (az előző tétel miatt) megegyezik és magasságuk $\frac{M}{n}$. Így adott n szám esetén az egy tetraéderben lévő hasábok térfogatának összege megegyezik. Mivel az n szám növelésével az egy tetraéderben lévő hasábok térfogatának összege egyre jobban megközelíti a tetraéder térfogatát, így a két tetraéder térfogata egyenlő.

■

TÉTEL:
Bármely M magasságú gúla térfogata: $V = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

<u>Bizonyítás:</u>
Először tekintsük a tetraéderek térfogatát.

A tetraéder térfogatát visszavezetjük a háromoldalú hasáb térfogatára. Megmutatjuk, hogy egy háromszög alapú hasáb felbontható három egyenlő térfogatú tetraéderre.



Az $ACDB$ és a $CDFB$ tetraéderekben az $ACD\,\Delta$ és $CDF\,\Delta$ területe egyenlő, mert az $ACFD$ paralelogrammát a CD átlója két egybevágó háromszögre bontja. Negyedik csúcsuk, a B csúcs közös, ezért a testmagasságuk is egyenlő. Az előző tételekből adódik, hogy a két tetraéder térfogata egyenlő, mivel a két tetraéder alapja ugyanazon a síkon, az $ACFD$ paralelogramma síkján fekszik.

A $CDFB$ és a $BEFD$ tetraéder térfogata megegyezik, mert a $BCF\,\Delta$ és $BEF\,\Delta$ egybevágó, melyek a $BEFC$ paralelogrammának két egybevágó részei. Negyedik csúcsuk, a D csúcs közös, ezért a testmagasságuk is egyenlő.

Ebből következik, hogy a három tetraéder térfogata egyenlő, s együttes térfogatuk a hasáb térfogatát adják ki. Külön – külön a hasáb térfogatának harmada az egyes tetraéderek térfogata. Mivel a háromszög alapú hasáb térfogata $T_a \cdot M$, így egy tetraéder térfogata: $V = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

Most tekintsük a tetszőleges alapterületű alapterületű (T_a) és magasságú (M) gúla térfogatát.

Minden gúla alaplapja felbontható háromszögekre, azaz a gúla tetraéderekre. Az így kapott tetraéderek magassága megegyezik az eredeti gúla magasságával. Alapterületeik összege a gúla alaplapjának területét: $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-2}$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás:

$$V = \frac{T_1 \cdot M}{3} + \frac{T_2 \cdot M}{3} + \cdots + \frac{T_{n-2} \cdot M}{3} = \frac{(T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-2}) \cdot M}{3} = \frac{T_a \cdot M}{3}.$$

Második bizonyítás:

Helyezzük a gúlát az $x-y-z$ térbeli koordináta – rendszerbe (a csúcsa legyen az origóban). Osszuk fel $n\ (n \in \mathbb{N}^+)$ egyenlő részre a $[0; M]$ intervallumot (vagyis a gúla magasságát szeleteljük fel az alaplappal párhuzamos síkokkal), s így n darab $\frac{M}{n}$ hosszúságú intervallum keletkezik. Intervallumonként szerkesszünk a gúlába beírt, illetve köré írt hasábot.

Tekintsük a köré írt hasábokat. Ezek alapterülete attól függ, hogy mekkora távolságra van a hasáb alaplapja a gúla csúcsától, azaz az origótól. Az i – edik hasáb az origótól x_i távolságra van. Jelöljük az i – edik hasáb alapterületét $t\ (x_i)$ – vel. Az $t\ (x_i)$ és a T_a hasonló sokszögek területei, amelyeknek aránya a hasonlóság arányának (azaz csúcstól való távolságuk) négyzetével egyenlő.

Ebből felírhatjuk a következőt:

$$\lambda = \frac{x_i}{M} \qquad \to \qquad \lambda^2 = \frac{t\ (x_i)}{T_a} = \frac{{x_i}^2}{M^2} \qquad \to \qquad t\ (x_i) = \frac{T_a}{M^2} \cdot {x_i}^2$$

A köré írt hasábok térfogatának összege:

$$V_n = \frac{M}{n} \cdot [t\ (x_1) + t\ (x_2) + \cdots + t\ (x_n)] = \frac{M}{n} \cdot \left(\frac{T_a}{M^2} \cdot {x_1}^2 + \frac{T_a}{M^2} \cdot {x_2}^2 + \cdots + \frac{T_a}{M^2} \cdot {x_n}^2 \right)$$

Ez az összeg a $[0; M]$ intervallumon az $y = \frac{T_a}{M^2} \cdot x^2$ parabolaív és az x – tengely közé eső alakzat köré írt téglalapok területének összege.

Hasonlóan adódik a gúlába írható hasábok térfogatának összege:

$$v_n = \frac{M}{n} \cdot [t\ (x_1) + t\ (x_2) + \cdots + t\ (x_{n-1})] = \frac{M}{n} \cdot \left(\frac{T_a}{M^2} \cdot {x_1}^2 + \frac{T_a}{M^2} \cdot {x_2}^2 + \cdots + \frac{T_a}{M^2} \cdot {x_{n-1}}^2 \right)$$

Ez az összeg a $[0; M]$ intervallumon az $y = \frac{T_a}{M^2} \cdot x^2$ parabolaív és az x – tengely közé eső alakzatba írható téglalapok területének összege.

Mivel az f függvény a $[0; M]$ intervallumon folytonos és pozitív értékű, ezért az $y = \frac{T_a}{M^2} \cdot x^2$ függvény is folytonos és pozitív értékű lesz.

Ebből a következő adódik: $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \int_0^M \frac{T_a}{M^2} \cdot x^2\, dx$.

A gúla V térfogata minden n – re v_n és V_n közé esik, így V csak ez a közös határérték lehet:

$$V = \int_0^M \frac{T_a}{M^2} \cdot x^2\, dx = \frac{T_a}{M^2} \cdot \int_0^M x^2\, dx = \frac{T_a}{M^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^M = \frac{T_a}{M^2} \cdot \left(\frac{M^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{T_a \cdot M}{3}$$

Harmadik bizonyítás:

Osszuk fel a gúla magasságát n egyenlő részre, ahol n pozitív egész. Az osztópontokon át fektessünk az alappal párhuzamos síkokat. A síkok a gúlát egy gúlára és csonka gúlákra darabolják fel. Készítsük el minden csonka gúlához a beírt, illetve köré írt hasábokat. Az eredeti gúla tetején lévő kis gúlához csak kívülre írt hasáb tartozik.

A gúla csúcsától számított k – adik sík távolsága $y_k = k \cdot \frac{M}{n}$ $(k = 1,2, \dots, n)$.

Jelöljük t_k – val a k – adik síkmetszet területét és legyen $t_n = T_a$.

A gúla csúcsára vonatkozó középpontos hasonlóság miatt a következő adódik:

$$\frac{t_k}{T_a} = \left(\frac{y_k}{M}\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad t_k = \frac{k^2}{n^2} \cdot T_a$$

Írjuk fel a k – adik kívülre írt hasáb térfogatát: $V_k = \frac{M}{n} \cdot t_k = \frac{M}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2} \cdot T_a = \frac{T_a \cdot k^2 \cdot M}{n^3}$.

A kívülre írt hasábok térfogatának összege:

$$V_{kívül} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_a \cdot k^2 \cdot M}{n^3} = \frac{T_a \cdot M}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{T_a \cdot M}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) =$$

$$= \frac{T_a \cdot M}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{T_a \cdot M}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Határérték segítségével számítsuk ki ezek összegét: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{T_a \cdot M}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

A belülre írt hasábok térfogatának összege:

$$V_{belül} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{T_a \cdot k^2 \cdot M}{n^3} = \frac{T_a \cdot M}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{T_a \cdot M}{n^3} \cdot [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] =$$

$$= \frac{T_a \cdot M}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{6} = \frac{T_a \cdot M}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Határérték segítségével számítsuk ki ezek összegét: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{T_a \cdot M}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

Másképpen: $V_{belül} = V_{kívül} - \frac{T_a \cdot M}{n}$, vagyis $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{T_a \cdot M}{3} - \frac{T_a \cdot M}{n}\right) = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

Mivel minden n – re teljesül, hogy $V_{belül} < V < V_{kívül}$, ezért $V = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

■

TÉTEL:

Bármely M magasságú kúp térfogata: $V = \frac{T_a \cdot M}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3}$.

Bizonyítás:

Tekintsük az r sugarú M magasságú kúpba és a kúp köré írt egyre nagyobb oldalszámú szabályos sokszög alapú gúlákat, melyek csúcsai a forgáskúp csúcsával megegyezik. A beírt gúláknál a sokszögek csúcsai a körvonalra esnek, a köréírt gúláknál a szabályos sokszögek oldalai érintik a kúp alapkörét.

A kúp térfogata V, s ez tartalmazza bármely beírt gúlájának V_b térfogatát, illetve bármely köré írt gúlájának V_k térfogata tartalmazza a kúp térfogatát.

Ebből felírhatjuk a következőt:

$$V_b < V < V_k \quad \rightarrow \quad \frac{T_b \cdot M}{3} < V < \frac{T_k \cdot M}{3} \quad \rightarrow \quad T_b < \frac{3V}{M} < T_k$$

Mivel az r sugarú körre igaz, hogy a nagyobb sokszög belsejében van és tartalmazza a kisebb sokszöget, ezért területükre fennáll a következő: $T_b < r^2 \cdot \pi < T_k$.

Ebből felírhatjuk a következőt: $\left|\frac{3V}{M} - r^2 \cdot \pi\right| < T_k - T_b$.

Mivel az oldalszám növelésével a két sokszög területe egyre jobban megközelíti egymást, ezért a területük különbsége 0 – hoz taret. Így az előző egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet bármelyik sokszög esetén, ha $\left|\frac{3V}{M} - r^2 \cdot \pi\right| = 0$, vagyis $\frac{3V}{M} = r^2 \cdot \pi$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3} = \frac{T_a \cdot M}{3}$.

Második bizonyítás:

Forgassuk meg az $y = \frac{r}{M} \cdot x$ egyenletű egyenest az x – tengely körül a $[0; M]$ intervallumon:

$$V = \pi \cdot \int_0^M \left(\frac{r}{M} \cdot x\right)^2 dx = \frac{r^2}{M^2} \cdot \pi \cdot \int_0^M x^2\, dx = \frac{r^2}{M^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^M =$$

$$= \frac{r^2}{M^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{M^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot M}{3} = \frac{T_a \cdot M}{3}$$

■

TÉTEL:
Bármely M magasságú kúp felszíne: $A = r \cdot \pi \cdot (r + a)$.

Bizonyítás:
Az alaplap területe $T_a = r^2 \cdot \pi$.

A palást kiterítve egy körcikk, melynek sugara a kúp alkotója, köríve pedig az alapkör kerülete.

Ekkor felírhatjuk a következőt: $T_p = \frac{a \cdot i}{2} = \frac{a \cdot 2 \cdot r \cdot \pi}{2} = a \cdot r \cdot \pi$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $A = r^2 \cdot \pi + a \cdot r \cdot \pi = r \cdot \pi \cdot (r + a)$.

Második bizonyítás: (a palást felszínének meghatározásához)

Forgassuk meg az $y = \frac{r}{M} \cdot x$ egyenletű egyenest az x – tengely körül a $[0; M]$ intervallumon.

Írjuk fel az első derivált értékét: $f'(x) = \left(\frac{r}{M} \cdot x\right)' = \frac{r}{M}$.

Ebből a következő adódik:

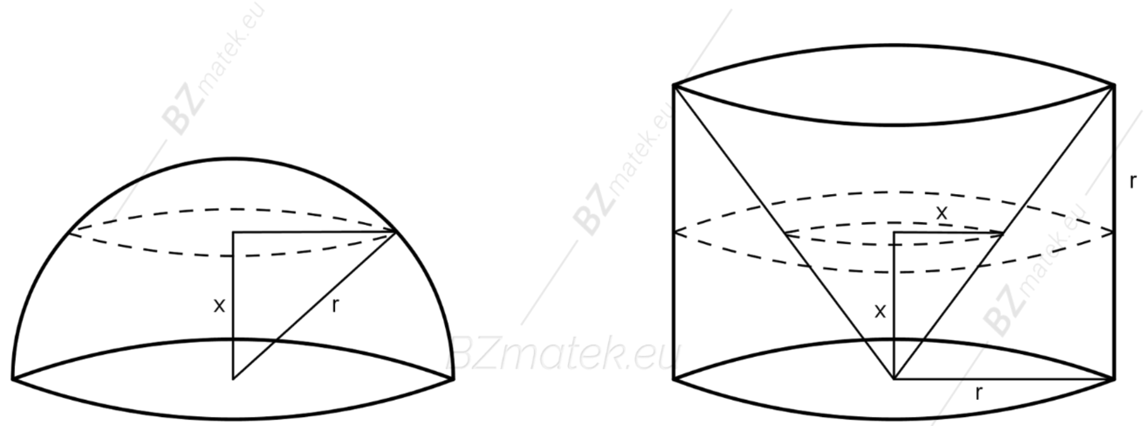
$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^M \frac{r}{M} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{M^2}}\, dx = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{M} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{M^2}} \cdot \int_0^M x\, dx =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{M} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{M^2}} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^M = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{M} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{M^2}} \cdot \frac{M^2}{2} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{M^2 + r^2} = r \cdot \pi \cdot a$$

■

TÉTEL:
Az r sugarú gömb térfogata: $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$.

Bizonyítás:
Tekintsünk a következő ábrát:



A bizonyításhoz felhasználjuk a Cavalieri – elvet: Ha két testnek létezik a térfogata, és valamelyik síkkal párhuzamos összes síkmetszeteik páronként egyenlő területűek, akkor a két test egyenlő térfogatú.

Az első test egy r sugarú félgömb, míg a második egy r alapsugarú és r magasságú henger, illetve egy r alapsugarú és r magasságú kúp különbségéből adódik.

Mindkét testet metsszük el az alapsíkkal párhuzamos, attól x távolságra lévő síkkal.

Ez a sík a félgömbből egy kört, a hengerből pedig egy körgyűrűt metsz ki, melyek területe egyaránt: $T = (r^2 - x^2) \cdot \pi$.

Mivel a síkmetszetek területe egyenlők, így a két test térfogata megegyezik (Cavalieri – elv).

Írjuk fel a második test térfogatát: $V' = V_h - V_k = r^2 \cdot \pi \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot r}{3} = \frac{2 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$.

Mivel ez egyben a félgömb térfogata is, így adódik a bizonyítandó állítás: $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$.

Második bizonyítás:

A kör origóba való eltolása egybevágósági transzformáció, így nem változik a végeredmény.

Az origó középpontú, r sugarú kör egyenletéből a következő adódik:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \rightarrow \quad f\,(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Forgassuk meg az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ egyenletű görbét (félkört) az x – tengely körül a $[-r; r]$ intervallumon.

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \cdot \left[r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right] = \pi \cdot \frac{4 \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$$

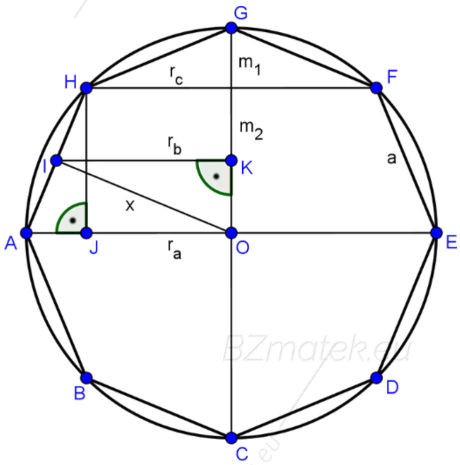
■

TÉTEL:
A gömb felszíne: $A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

Bizonyítás:
A gömb felszínét beírt és köréírt forgástestek felszínével közelítjük.

Tekintsük először a gömbbe írt forgástesteket.

Egy r sugarú körbe írt $2n$ oldalú szabályos sokszöget (melynek oldalai a kör húrjai) a körrel együtt forgassunk meg a sokszög két csúcsára illeszkedő átmérő egyenese, mint tengely körül.



Így a kör egy r sugarú gömbfelületet, a sokszög pedig 2 kúppalástot és $n-2$ darab csonkakúppalástot (melyből az egyik lehet henger is) ír le.

Az $AHJ\ \Delta$ és az $IKO\ \Delta$ hasonló (a merőleges szárú szögek miatt, a szögeik nagysága egyenlő).

Megfelelő aránypár segítségével felírhatjuk a következőt:

$$\frac{r_b}{x} = \frac{m_2}{a} \quad \rightarrow \quad r_b = \frac{m_2 \cdot x}{a}$$

Mivel r_b az $AOFC$ trapéz középvonalának fele, így felírhatjuk a következőt:

$$r_b = \frac{r_a + r_c}{2} \quad \rightarrow \quad r_a + r_c = \frac{2 \cdot m_2 \cdot x}{a}$$

Írjuk fel egy csonkakúp palástját: $T_p = (r_a + r_c) \cdot \pi \cdot a = \frac{2 \cdot m_2 \cdot x}{a} \cdot \pi \cdot a = 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \pi$.

Vegyük a 2 kúp és az $n-2$ darab csonkakúp palástjának összegét:

$$s_n = 2 \cdot m_1 \cdot x \cdot \pi + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \pi + \dots + 2 \cdot m_n \cdot x \cdot \pi = 2 \cdot x \cdot \pi \cdot (m_1 + m_2 + \dots + m_n) =$$

$$= 2 \cdot x \cdot \pi \cdot 2 \cdot r = 4 \cdot x \cdot r \cdot \pi.$$

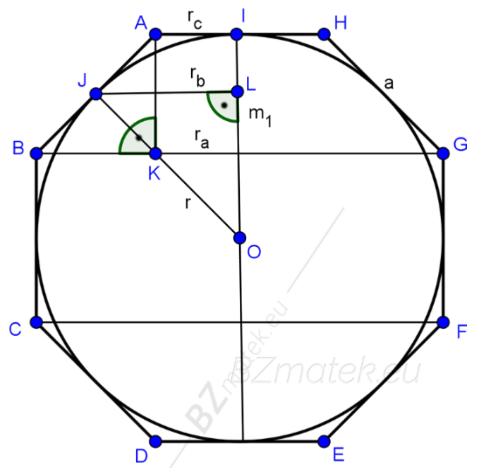
A sokszög oldalszámát növelve az x értéke is nő: $\lim_{n \to +\infty} x = r$.

Ekkor a palástok összege: $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} 4 \cdot x \cdot r \cdot \pi = 4 \cdot r \cdot r \cdot \pi = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

Ebből a következő adódik: $s_n < 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

Tekintsük most a gömb köré írt forgástesteket.

Egy r sugarú kör köré írt $2n$ oldalú szabályos sokszöget (melynek oldalai a kör érintői) a körrel együtt forgassunk meg a kör középpontján és az egyik oldala felezőpontján áthaladó egyenes, mint tengely körül.



Így a kör egy r sugarú gömbfelületet, a sokszög pedig 2 körlapot és $n-1$ darab csonkakúppalástot (melyből az egyik lehet henger is) ír le.

Az ABK Δ és az JLO Δ hasonló (a merőleges szárú szögek miatt, a szögeik nagysága egyenlő).

Megfelelő aránypár segítségével felírhatjuk a következőt:

$$\frac{r_b}{r} = \frac{m_1}{a} \qquad \rightarrow \qquad r_b = \frac{m_1 \cdot r}{a}$$

Mivel r_b az $ABGH$ trapéz középvonalának fele, így felírhatjuk a következőt:

$$r_b = \frac{r_a + r_c}{2} \qquad \rightarrow \qquad r_a + r_c = \frac{2 \cdot m_1 \cdot r}{a}$$

Írjuk fel egy csonkakúp palástját: $T_p = (r_a + r_c) \cdot \pi \cdot a = \frac{2 \cdot m_1 \cdot r}{a} \cdot \pi \cdot a = 2 \cdot m_1 \cdot r \cdot \pi$.

Vegyük a 2 körlap területének és az $n-1$ darab csonkakúp (vagy henger) palástjának összegét:

$$S_n = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi + 2 \cdot m_1 \cdot r \cdot \pi + \dots + 2 \cdot m_{n-1} \cdot r \cdot \pi =$$

$$= 2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}) = \frac{a^2}{2} \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot 2 \cdot r =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \pi + 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

A sokszög oldalszámát növelve az oldalak hossza csökken: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^2}{2} = 0$.

Ekkor a palástok összege: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \pi + 4 \cdot r^2 \cdot \pi\right) = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

Ebből a következő adódik: $4 \cdot r^2 \cdot \pi < S_n$.

A két esetből a következőt kapjuk: $s_n < 4 \cdot r^2 \cdot \pi < S_n$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

Megjegyzés: A kúp $(r = 0)$ és a henger $(r = R)$ speciális csonkakúpok.

■

Második bizonyítás:

A kör origóba való eltolása egybevágósági transzformáció, így nem változik a végeredmény.

Az origó középpontú, r sugarú kör egyenletéből a következő adódik:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Írjuk fel az első derivált értékét: $f'(x) = \left[(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Forgassuk meg az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ egyenletű görbét (félkört) az x – tengely körül a $[-r; r]$ intervallumon.

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2 + x^2}\, dx =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^{r} r\, dx = 2 \cdot \pi \cdot [r \cdot x]_{-r}^{r} = 2 \cdot \pi \cdot [r \cdot r - r \cdot (-r)] = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

■