Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

# Hasáb, henger

**DEFINÍCIÓ: (Poliéder)**
A poliéder véges sok sokszög által határolt véges test.

**Testek osztályozása:**

- Felszín alapján:

  1. Olyan test, melyet csak sokszögek határolnak (poliéder).

  2. Olyan test, melyet síkidomok és görbült felületek, vagy csak görbült felületek határolnak:

     a) a görbült felület kiteríthető síkba (pl.: henger)

     b) a görbült felület nem teríthető ki síkba (pl.: gömb)

- Származtatás alapján:

  1. Hengerszerű testek:
     Egy síkidom kerületén önmagával párhuzamosan körülvezetünk egy olyan egyenest (vezéregyenest), amelynek a síkidom síkjával egyetlen közös pontja van. Az így kapott palástfelületet (végtelen hengerfelületet) az eredeti síkidom síkjával és egy ezzel párhuzamos síkkal elmetsszük. A körülhatárolt térrészt hengerszerű testnek nevezzük: ha a test alaplapja sokszög, akkor hasábról, ha kör, akkor hengerről beszélünk.

  2. Kúpszerű testek:
     Egy síkidom kerületén körülvezetünk egy egyenest (vezéregyenest), amely állandóan illeszkedik egy a síkidom síkján kívüli pontra. Az így kapott, az egyenes külső pont és sík közötti szakaszai által meghatározott palástfelületet (végtelen kúpfelületet) az eredeti síkidom síkjával elmetsszük. A körülhatárolt térrészt kúpszerű testnek nevezzük: ha a test alaplapja sokszög, akkor gúláról, ha kör, akkor kúpról beszélünk.

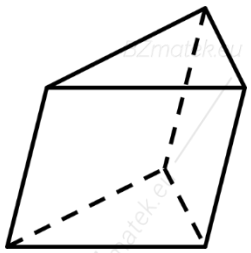
  3. Gömb: Egy adott ponttól adott távolságra levő pontok halmaza a térben.

**Poliéderek felszíne:**
A felszín a poliédert határoló sokszöglapok területeinek összege.

**Poliéderek térfogata:**
A térfogat a poliéderre jellemző szám, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Minden poliéder térfogata pozitív szám.
- Az egymással egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.
- Ha egy poliédert rész poliéderekre vágunk szét, úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk, akkor a részpoliéderek térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.
- Az 1 oldalú kocka térfogata 1.

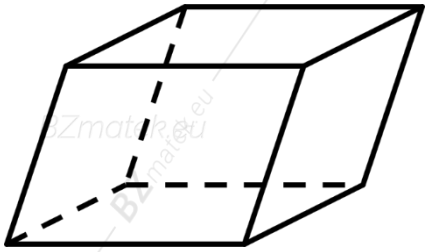
**DEFINÍCIÓ: (Hasáb)**
Ha egy sokszögvonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy, a sokszög síkjával nem párhuzamos egyenessel, akkor egy végtelen hasábfelületet kapunk. Ha ezt a sokszög síkjával és egy ezzel párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor hasábhoz jutunk.



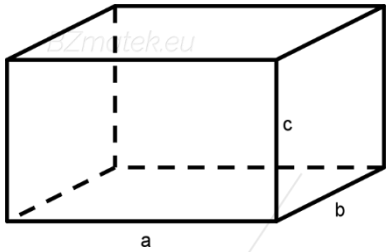
*Megjegyzés:*

- *A definícióban szereplő sokszögek a hasáb alaplapjai: alaplap, illetve fedőlap.*
- *Az alaplapok egybevágóak és eltolással egymásba vihetőek.*
- *A hasáb többi lapja a hasáb oldallapja, melyek paralelogrammák.*
- *Az oldallapok együtt a hasáb palástját alkotják.*
- *Az alaplapok síkjainak távolsága a hasáb magassága.*
- *Az alaplapok oldalai az alapélek, a többi él a hasáb oldaléle.*
- *A származtatáskor húzott párhuzamosoknak az alaplapok közé eső darabjai (az oldalélek is) a hasáb alkotói.*
- *Ha az alkotók az alaplapokra merőlegesek, akkor egyenes hasábnak nevezzük. Egyébként ferde hasábról beszélünk.*
- *A szabályos sokszög alapú egyenes hasábot szabályos hasábnak, az alaplapok középpontjait összekötő egyenest pedig tengelynek nevezzük.*

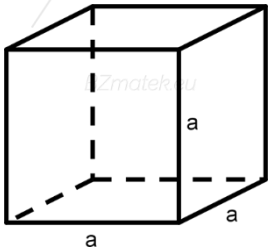
**DEFINÍCIÓ: (Paralelepipedon)**
Ha a hasáb minden oldala paralelogramma, akkor paralelepipedonnak nevezzük.



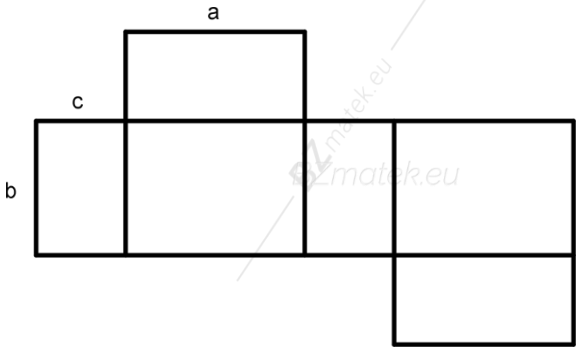
**DEFINÍCIÓ: (Téglatest)**
Ha az egyenes hasáb alaplapjai téglalapok, akkor téglatestnek evezzük.




**DEFINÍCIÓ: (Kocka)**
Ha a téglatest minden éle egyenlő hosszúságú, akkor kockának nevezzük.




**<u>Téglatest testhálója:</u>**

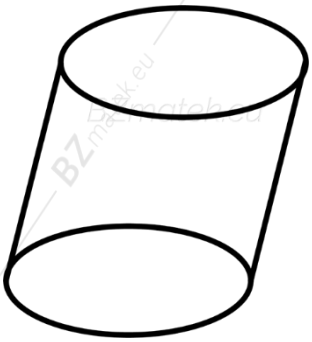


**Hasábok felszíne, térfogata:**

- Hasáb felszíne: $A = 2 \cdot T_a + T_p$ (ahol $T_a$ az alaplap területe, $T_p$ a palást területe)
- Hasáb térfogata: $V = T_a \cdot M$ (ahol $T_a$ az alaplap területe, $M$ a hasáb magassága)
- Téglatest felszíne: $A = 2 \cdot (ab + bc + ac)$
- Téglatest térfogata: $V = a \cdot b \cdot c$
- Kocka felszíne: $A = 6 \cdot a^2$
- Kocka térfogata: $V = a^3$

BZmatek.eu

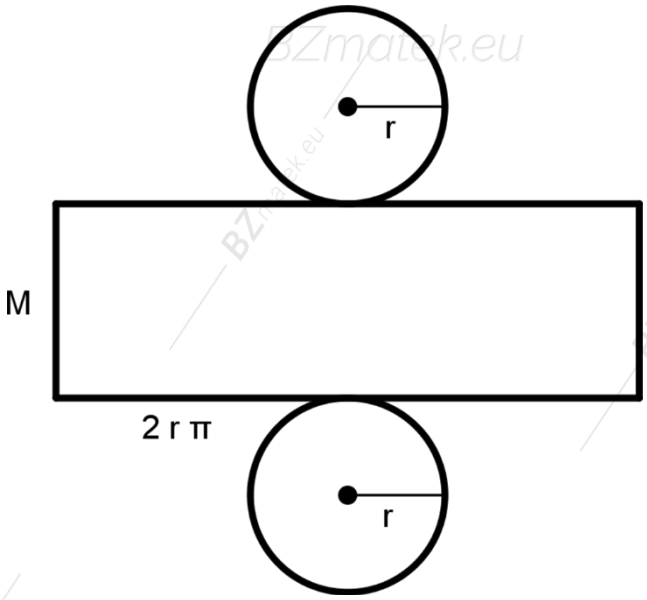
**DEFINÍCIÓ: (Henger)**
Ha egy körvonal pontjain át párhuzamosokat húzunk egy, a vonal síkjával nem párhuzamos egyenessel, akkor egy végtelen hengerfelületet kapunk. Ha ezt a körvonal síkjával és egy ezzel párhuzamos síkkal elmetsszük, akkor hengerhez (körhengerhez) jutunk.



*Megjegyzés:*

- *A definícióban szereplő körvonalak a henger alaplapjai: alaplap, illetve fedőlap.*
- *Az alaplapok egybevágóak és eltolással egymásba vihetőek.*
- *A hengert az alaplapokon kívül a palást határolja.*
- *Az alaplapok síkjainak távolsága a hengerszerű test magassága.*
- *A származtatáskor húzott párhuzamosoknak az alaplapok közé eső darabjai a test alkotói.*
- *Ha az alkotók az alaplapokra merőlegesek, akkor egyenes hengernek nevezzük. Egyébként ferde hengerről beszélünk.*
- *Az egyenes körhengert forgáshengernek is nevezzük.*
- *A körlapok középpontjait összekötő egyenes a henger tengelye.*
- *Ha egy téglalapot az egyik oldala, vagy az egyik középvonala körül megforgatunk, akkor forgáshengert kapunk.*
- *Az egyenes körhenger palástját a síkban kiterítve egy olyan téglalapot kapunk, amelynek egyik oldala az alapkör kerülete, a másik oldala a henger magassága. A palást területe ezek alapján:* $T_p = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot M$.

**Henger testhálója:**




**Hengerszerű testek felszíne, térfogata:**

- Hengerszerű test felszíne: $A = 2 \cdot T_a + T_p$ (ahol $T_a$ az alaplap területe, $T_p$ a palást területe)
- Hengerszerű test térfogata: $V = T_a \cdot M$ (ahol $T_a$ az alaplap területe, $M$ a test magassága)
- Henger felszíne: $A = 2 \cdot T_a + T_p = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot M$
- Henger térfogata: $V = T_a \cdot M = r^2 \cdot \pi \cdot M$

**TÉTEL:**
Legyen az $S_1$ és $S_2$ síkok hajlásszöge $\alpha$. Az $S_1$ síkban fekvő $T_1$ területű háromszög $S_2$ síkra eső merőleges vetületének területét jelölje $T_2$. A háromszög és merőleges vetületének területe között mindig fennáll a következő összefüggés: $T_2 = T_1 \cdot \cos\alpha$.

*Megjegyzés:*
*A tétel általános esetben, bármely sokszög és vetületének területe között is fennáll.*

# Gyakorló feladatok

**K: középszintű feladat** **E: emelt szintű feladat**

1. **(K) Hány részre osztja a teret a kocka lapjainak 6 síkja?**

2. **(K) Hány átlóssíkja van egy kockának? (Átlóssíknak nevezünk minden olyan síkot, amely tartalmazza a kocka négy csúcsát, de lapját nem.)**

3. **(K) Egy kocka élei $15\ cm$ hosszúak. Kiválasztunk a kocka élegyenesei közül minden lehetséges módon kettőt.**

   ***a)*** **Hány különböző egyenespár választható?**
   **(Két egyenespár akkor különböző, ha legalább az egyik egyenesükben különböznek.)**

   ***b)*** **Ezek között mennyi metsző, párhuzamos és kitérő egyenespár van?**

   ***c)*** **Az $AB$ élegyenestől milyen távolságra vannak a kocka további élegyenesei?**

   ***d)*** **Két kitérő élének felezőpontja milyen távolságra van egymástól?**

4. **(K) Mekkora szöget zárnak be egy $5\ cm, 6\ cm$ és $8\ cm$ hosszú oldalakkal rendelkező téglatest testátlói egymással?**

5. **(K) Mekkora szöget zár be a kocka: két testátlója egymással; testátlója egy éllel; illetve testátlója egy lappal?**

6. **(K) Mekkora az $a = 12,6\ cm$ élű kocka testátlója és felszíne?**

7. **(K) Mekkora a térfogata a $32\ kg$ – os ólom kockának, ha az ólom sűrűsége $11,35\ \frac{kg}{dm^3}$?**

8. **(K) Mekkora a térfogata annak a kockának, amelynek felszíne $73,5\ cm^2$?**

**9. (K) Mekkora a kocka átlós síkmetszetének területe, ha éle $24,6\ cm$?**

**10. (K) Határozd meg a kocka élét, lapátlóját, testátlóját, felszínét és térfogatát, ha átlós síkmetszetének területe $250\ cm^2$!**

**11. (K) Egy kocka éle $2\ m$ – rel hosszabb, mint egy másiké. Térfogatuk különbsége $26\ m^3$. Mekkorák az élek?**

**12. (K) Ha egy kocka éleit $4\ cm$ – rel növeljük, akkor a felszíne $480\ cm^2$ – rel növekszik. Mekkora a kocka térfogata?**

**13. (K) Egy kocka testátlójának hossza $3,84\ dm$. Mekkora az éle?**

**14. (K) Egy kocka két szomszédos lapközéppontjának távolsága $8\ cm$. Mekkora az éle?**

**15. (K) Mekkora távolságra van egy $a$ élű kocka egyik élének felezőpontja a csúcsoktól?**

**16. (K) Egy $10\ cm$ élhosszúságú kocka minden csúcsánál kivágunk a kockából egy $4\ cm$ élhosszúságú kisebb kockát. Mennyi a keletkezett test felszíne és térfogata?**

**17. (E) Egy kocka legnagyobb szabályos háromszögmetszetének területe $140\ cm^2$. Mekkora a kocka éle?**

**18. (E) Az $a$ élhosszúságú kocka egyik csúcsából a felületen haladva el kell jutnunk a legrövidebb úton az egyik szemközti lap középpontjába. Mekkora utat kell megtenni?**

**19. (E) Egy zárt, kocka alakú láda falvastagsága mindenütt $2\ cm$, külső élhossza $1\ m$, anyagának sűrűsége $0,8\ \frac{kg}{dm^3}$. Mekkora a tömege? Legfeljebb mennyi lehet a rakománya, hogy vízben el ne süllyedjen?**

**20. (E) Határozd meg az $a$ élű kocka csúcsainak távolságát a kocka egyik testátlójától!**

**21. (E) Mutasd meg, hogyan lehet felosztani egy kockát három egybevágó gúlára!**

**22. (E) Mekkora annak a kockának a térfogata, amelynek egy csúcsa a hozzá képest kitérő testátlótól $16,33\ cm$ távolságra van?**

**23. (E) Egy kocka két kitérő élének egymástól való távolsága $4\ cm$. Mekkora a kocka legnagyobb szabályos háromszög síkmetszetének területe?**

**24. (E) Milyen messze van a kocka egyik csúcspontja a rá nem illeszkedő élek felezőpontjától, ha a kocka éle $8$ egység?**

**25. (K) Egy téglatest élei $a = 4,2\ dm, b = 3,6\ dm, c = 2,8\ dm$. Mekkora a testátlója, a felszíne és a térfogata?**

**26. (K) Egy téglatest felszíne $1400\ cm^2$, éleinek aránya $2:3:4$. Mekkorák az élei?**

**27. (K) Egy téglatest éleinek aránya $1:3:5$. Felszínének és térfogatának mérőszáma megegyezik. Mekkorák az élei?**

**28. (K) Egy öntött vasból készült téglatest tömege $100\ kg$, éleinek aránya $1:2:3$. Mekkorák az élei, ha sűrűsége $7,5\ \frac{kg}{dm^3}$?**

**29. (K) Hány darab kisméretű tégla vethető $1\ m^3$ agyagból, ha a kiégetett tégla mérete $25\ cm \times 12\ cm \times 6,5\ cm$, és az agyag térfogatvesztesége az égetéskor $2\ \%$?**

**30. (K) Hány $kg$ égetett mészből készíthetünk annyi oltott meszet, amennyivel egy $3,5\ m$ hosszú, $2,5\ m$ széles, $2\ m$ mély meszesgödör megtelik? ($1\ m^3$ oltott mész készítéséhez $400\ kg$ égetett mészre van szükség.)**

**31. (K) Ha egy téglatest egy – egy élét $6\ cm$ – rel, illetve $4\ cm$ – rel meghosszíbbítjuk, akkor kockát kapunk. A kapott kocka térfogata $2059,2\ cm^3$ – rel nagyobb a téglatest térfogatánál. Mekkorák az élei?**

**32. (K) Egy téglatest két éle $9\ cm$ és $12\ cm$, a testátlója $\sqrt{325}\ cm$ hosszú. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata?**

**33. (K) Egy téglatest éleinek aránya $3:4:5$, testátlója $20\ cm$ hosszú.**

***a)*** **Mekkorák az élek?**

***b)*** **Mekkora szöget zár be a testátló a téglatest leghosszabb és legrövidebb élével?**

**34. (K) Egy téglatest két élének aránya $a:b=3:4$. A $b$ élhez illeszkedő átlós metszet $16\ m^2$ területű négyzet. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**35. (K) Mekkorák a téglatest élei, ha oldallapjainak területe $55\ cm^2, 105\ cm^2$ és $231\ cm^2$?**

**36. (E) Egy téglatest átlós síkmetszeteinek területe $20\ cm^2, 25\ cm^2$, illetve $30\ cm^2$. Milyen hosszúak az élei?**

**37. (E) Egy téglatest egyik csúcsából induló három élének összege $42\ cm$, testátlója $27\ cm$. Határozd meg a téglatest felszínét!**

**38. (E) Egy téglatest egy csúcsból induló élei hosszának összege $12\ cm$, felszíne $94\ cm^2$. Mekkora a testátlója?**

**39. (E) Egy téglatest térfogata $36\ cm^3$, testátlójának hossza $7\ cm$, egyik élének a hossza $6\ cm$. Mekkora a téglatest többi éle?**

**40. (E) Egy téglatest $A$ csúcsából kiinduló három élének hossza $4\ cm, 5\ cm$ és $20\ cm$. Mekkora $A$ távolsága a téglatest többi csúcsától? Mekkora az $A$ csúcsból kiinduló testátló távolsága a téglatest csúcsaitól?**

**41. (K) Egy téglatest lapátlóinak hossza $\sqrt{13}\ cm, 2 \cdot \sqrt{10}\ cm$ és $3 \cdot \sqrt{5}\ cm$. Mekkora a téglatest felszíne, térfogata? Mennyi a legnagyobb távolság, ami a téglatest két pontja között felléphet?**

**42. (E) Egy téglatest testátlójának a téglatest két élével bezárt szöge $23°$ és $72°$.**

***a)*** **Mekkora a testátlónak a harmadik éllel bezárt szöge?**

***b)*** **Mekkora a téglatest térfogata, ha a testátló hossza $80\ cm$?**

**43. (E) Egy téglatest testátlója az élekkel $\alpha, \beta, \gamma$ szögeket zár be. Bizonyítsd be, hogy $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$!**

**44. (K) Egy téglatest egyik lapjának átlója $52\ m$, és ez a síkjában levő egyik éllel $22°\ 37'$ szöget zár be. Egy másik lap átlója $101\ m$. Mekkora a téglatest térfogata?**

**45. (K) Egy téglatest két éle $7\ dm$ és $11\ dm$ hosszú. Ezek valamelyikéhez illeszkedő átlóssík négyzetben metszi a téglatestet. Mekkora a felszíne és térfogata?**

**46. (K) Egy téglatest egyik lapján az élek hosszának aránya $3:4$. A téglatest $50\ cm$ hosszú testátlója ezzel a lappal $30°$ - os szöget zár be. Mekkora a téglatest felszíne, térfogata?**

**47. (K) Egy téglatest testátlója $68,5°$ - os szöget zár be az alaplappal, magassága $19\ cm$. A másik két éle közül az egyik $\frac{3}{5}$ része a másiknak. Mekkora a felszíne és térfogata?**

**48. (E) Egy téglatest lapjainak területei úgy aránylanak egymáshoz, mint $16:21:28$. A testátló $29\ cm$. Mekkorák az élek?**

**49. (E) Téglatest testátlója $7\ cm$. Az alaplap kerülete $10\ cm$, a területe $6\ cm^2$. Mekkorák az élei?**

**50. (K) Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplapja olyan rombusz, amelynek egyik hegyesszöge $60°$. Mekkora a hasáb egy éle, ha a felszíne $143,3\ cm^2$?**

**51. (K) Egy $34\ cm$ magasságú egyenes hasáb alaplapja olyan rombusz, amelynek a hegyesszöge $60°$ - os. Mekkora a hasáb felszíne, ha térfogata $2944,49\ cm^3$?**

**52. (K) Egy négyzetalapú egyenes hasáb térfogata $19,845\ dm^3$, alapjának kerülete $84\ cm$. Mekkora a felszíne?**

**53. (K) Egy háromoldalú egyenes hasáb minden éle $10\ cm$. Mekkora a felszíne és térfogata?**

**54. (K) Egy négyzetes oszlop két szemben fekvő oldalélén átmenő síkmetszete négyzet, amelynek területe $283\ cm^2$. Mekkora a térfogata?**

**55. (K) Egy négyzetes oszlop térfogata $627,4\ cm^3$. A két szemben fekvő oldalélén átmenő síkmetszet területe $116,8\ cm^2$. Mekkorák az élei?**

**56. (K) Mekkora az alapéle és magassága annak a négyzetes oszlopnak, melynek oldallapátlója $9\ cm$, testátlója $12\ cm$?**

**57. (K) Egy hasáb tömege $175,8\ kg$, anyagának sűrűsége $0,3\ \frac{kg}{dm^3}$, magassága $3\ dm$. Mekkora az alapterülete?**

**58. (K) Egy háromoldalú egyenes hasáb minden éle egyenlő hosszúságú, térfogata $36\ cm^3$. Mekkorák az élei?**

**59. (K) Egy szabályos háromszög alapú hasáb alapéle $12\ cm$. A palást területe az alaplap területének az ötszöröse. Mekkora a hasáb magassága?**

**60. (K) Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle $3,4\ cm$, oldaléle $8,02\ cm$. Mekkora a térfogata?**

**61. (K) Egy $82\ cm$ magasságú háromoldalú hasáb alapéleinek hossza $33\ cm, 42\ cm$, illetve $54\ cm$. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**62. (K) Egy egyenes hasáb valamennyi éle egyenlő hosszú. Az alaplap $5\ cm$ élű, $63°$ szögű rombusz. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**63. (K) Egy $43\ cm$ magasságú egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú trapéz, amelynek párhuzamos oldalai $21\ cm$ és $16\ cm$, szárai pedig $9\ cm$ hosszúak. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**64. (K) Egy egyenes hasáb alaplapja egyenlő szárú háromszög, melynek szára $9,3\ dm$ hosszú, és a csúcsnál levő szöge $37,8°$. A hasáb magassága $23,6\ dm$. Mekkora a hasáb felszíne és a térfogata?**

**65. (K) Egy $40\ dm$ magas egyenes hasáb alaplapja egy $12\ dm$ sugarú körbe írt szabályos ötszög. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**66. (K) Egy $50\ cm$ magas egyenes hasáb alaplapja egy $15\ cm$ sugarú kör köré írt szabályos nyolcszög. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**67. (K) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle $12\ cm$. A palást területe az alaplap területének $36$ – szorosa. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?**

**68. (K) Egy háromoldalú hasáb alapélei $2,18\ m$ és $1,7\ m$, az alaplap hosszabb oldallal szemközti szöge $58°\ 23'$. A hasáb térfogata $26,75\ m^3$. Mekkora a magassága?**

**69. (K) Milyen tömegű az a szabályos hatszög alapú, egyenes hasáb alakú bazalttömb, amelynek alapéle $0,24\ m$, magassága $2,46\ m$, és a bazalt sűrűsége $2,85\ \frac{kg}{dm^3}$?**

**70. (K) Egy egyenes hasáb alaplapja $8\ m^2$ területű egyenlő szárú háromszög, melynek magassága az alapél fele. A hasáb felszíne $25\ m^2$. Mekkora a térfogata?**

**71. (E) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb felszíne $518,2\ dm^2$, magassága $22\ m$. Mekkora az alapéle és a térfogata?**

**72. (E) Egy háromszög alapú egyenes hasáb magassága $20\ cm$. Két oldallapja $70°\ 31'$ - os szöget zár be, és a területük aránya $2:3$. Mekkora a hasáb térfogata, ha a harmadik oldallap területe $120\ cm^2$?**

**73. (E) Egy négyzet alapú egyenes hasáb két szemközti oldalélén áthaladó síkmetszetének területe $60 \cdot \sqrt{2}\ cm^2$, az alaplap és fedőlap két szemközti élén áthaladó síkmetszet területe pedig $65\ cm^2$. Mekkora a hasáb felszíne, térfogata?**

**74. (K) Négyzetes oszlop alapéle $13\ cm$. Testátlója $42°$ - os szöget zár be az oldallappal. Mekkora a térfogata?**

**75. (K) Egy $6\ m$ magas vasúti töltés felül $8\ m$ széles. Keresztmetszete olyan húrtrapéz, amelynek szárai $7,3\ m$ hosszúak. Hány $m^3$ földmunkát kíván egy $50\ m$ hosszú szakasza?**

**76. (K) Egy kalapácsfej alakja derékszögű trapéz alapú egyenes hasáb. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza $15\ cm$ és $21\ cm$, magassága $8\ cm$. A hasáb magassága $4\ cm$, anyagának sűrűsége pedig $7,5\ \frac{g}{cm^3}$. Mekkora a kalapácsfej felszíne és tömege?**

**77. (K) Egy $6\ m$ magas vasúti töltés felül $15\ m$ széles. Kersztmetszete szimmetrikus trapéz. Emelkedése, azaz az oldal és az alap által bezárt szög tangense $\frac{2}{3}$. Hány $m^3$ földet kell beépíteni a töltésbe méterenként?**

**78. (K) Egy vízelvezető árok keresztmetszete olyan szimmetrikus trapéz, amelynek rövidebb alapja és szárai $1$ méteresek, a szárak ezzel az alappal $120°$ - os szöget zárnak be. Mennyi víz fér az árok $100\ m$ hosszú szakaszába, ha tele van vízzel?**

**79. (K) Egy vízelvezető árok keresztmetszete olyan téglalap, amelynek alapja $1\ m$, magassága $0,5\ m$. Mennyi víz folyik át az árok keresztmetszetén $1$ perc alatt, ha tele van vízzel és a víz folyási sebessége $1,2\ \frac{m}{s}$?**

**80. (K) Egy csatorna keresztmetszete lefele keskenyedő trapéz, melynek párhuzamos oldalai $2,4\ m$ és $1,6\ m$ hosszúságúak, magassága $1,2\ m$. Mennyi víz folyik rajta keresztül $1$ óra alatt, ha a víz a csatorna magasságának harmadáig ér és sebessége $1,5\ \frac{m}{s}$?**

**81. (K) Egy négyzetalapú egyenes hasáb alapéle $16\ cm$, magassága $68\ cm$. A hasábot elmetsszük egy olyan síkkal, amely az alaplappal $42°$ - os szöget zár be és az egyik oldallapot az alapéllel párhuzamos, attól $13\ cm$ – re levő szakaszban metszi. Mekkora a lemetszett rész (az alaplaptól távolabbi rész) felszíne és térfogata?**

**82. (E) Szabályos háromszög alapú egyenes hasábot olyan síkkal metszünk, amelyik átmegy egy alapélen, és az alaplappal $45°$ - os szöget zár be. Mekkora a kimetszett síkidom területe, ha az alaplap területe $\sqrt{50}\ cm^2$?**

**83. (E) Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb alapéle $18\ dm$. Az egyik alapélen és a vele nem közös lapon fekvő szemközti csúcsponton átmenő síkmetszet az alaplappal $62,7°$ - os szöget zár be. Mekkora a térfogata?**

**84. (E) Egy egyenes hasáb magassága $140\ mm$. A hasábot elmetszük egy olyan síkkal, amely minden oldalélt metsz, és az alapsíkkal $68,5°$ - os szöget zár be. Hány $cm^3$ a hasáb térfogata, ha a metszet területe $400\ mm^2$?**

**85. (E) Egy szabályos hatoldalú egyenes hasábot olyan síkkal metszünk el, amely az alaplappal $30°$ - os szöget zár be. A síkmetszet területe $197\ cm^2$. Mekkora a hasáb alapéle?**

**86. (E) Egy hasáb két lapja rombusz, a többi négy lapja négyzet. A hasáb minden éle $12\ cm$ hosszú, a hasábnak van $45°$ - os lapszöge.**

***a)*** **Mekkora a térfogata?**

***b)*** **Mekkorák a hasáb magasságai?**

**87. (K) Egy paralelepipedon két éle $13\ cm$ és $9\ cm$, hajlásszögük $48,6°$. A harmadik él $25\ cm$, és a másik kettő által kifeszített síkkal $68,3°$ - os szöget zár be. Mekkora a térfogata?**

**88. (K) Mekkora a paralelepipedon térfogata, ha két éle $21\ cm$ és $28\ cm$, a közbezárt szögük $53°\ 24'15''$, és a testmagasság $32\ cm$?**

**89. (K) Mekkora a háromoldalú ferde hasáb térfogata, ha alapélei $20\ dm, 26\ dm,$ $33\ dm$ az oldalélek hossza $52\ dm$, és az alaplappal $69,6°$ szöget zárnak be?**

**90. (K) Egy ferde hasáb alapja $5\ cm$ oldalú négyzet, két szemközti oldallapja olyan téglalap, amelynek oldalai $5\ cm$ és $13\ cm$; a hasáb magassága $12\ cm$. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?**

**91. (K) Határozd meg annak a háromoldalú ferde hasábnak a térfogatát, melynek alaplapja $8\ dm$ oldalú szabályos háromszög, oldalélei $15\ dm$ hosszúak, és az oldalélek az alaplappal $48°\ 16'$ szöget zárnak be!**

**92. (E) A romboéder nevű testet hat egybevágó rombusz határolja. Legyen most konkrétan a rombuszok éleinek hossza $5\ cm$ és egyik szögük $45°$ - os.**

***a)*** **Mekkora a test magassága, ha egyik lapjára állítjuk?**

***b)*** **Mekkora a test felszíne és térfogata?**

**93. (E) Egy paralelepipedon két éle $8\ cm$ és $11\ cm$, hajlásszögük $46,7°$. A harmadik $16\ cm$ hosszú él a $8\ cm$ – es éllel $62,5°$ - os szöget zár be. A $8\ cm$ – es élhez illeszkedő két lap hajlásszöge $53°$. Mekkora a térfogata?**

**94. (E) Egy háromoldalú hasáb alapja egy $3\ dm$ sugarú körbe írt háromszög, melynek szögei $50°\ 7'$ és $70°\ 13'$. A hasáb oldaléle $7\ dm$ hosszú, és az alaplappal $60°$ szöget zár be. Mekkora a térfogata?**

**95. (E) Egy szabályos hatszög alapú egyenes hasábból az oldalélekkel párhuzamosan lehasítunk részeket úgy, hogy a lehető legnagyobb térfogatú szabályos $12$ oldalú hasáb maradjon. Számítsd ki a két hasáb térfogatának arányát!**

**96. (K) Egy egyenes körhenger alaplapjának területe $34\ cm^2$, magassága $48\ cm$. Mekkora a felszíne és térfogata?**

**97. (K) Egy egyenes körhenger alapkörének átmérője és a magassága egyenlő. Mekkora a felszíne és térfogata, ha sugara $8\ cm$?**

**98. (K) Egy egyenes körhenger alapkörének átmérője és a magassága egyenlő, térfogata $865\ cm^3$. Számítsd ki a felszínét!**

**99. (K) Az egyenes körhenger alaplapjának kerülete $20,33\ cm$, a magasságnak és az alaplap sugarának különbsége $11,6\ cm$. Mekkora a felszíne?**

**100. (K) Egy egyenes körhenger felszíne $1111\ cm^2$. Az alaplap sugarának és a henger magasságának az összege $26,8\ cm$. Mekkora a sugár és a magasság?**

**101. (K) A $15\ m$ hosszú pince dongaboltozata egy $5,6\ m$ átmérőjű félhenger palástja. Mennyi idő alatt készíthető el a belső felület vakolása, ha $1$ óra alatt $4,5\ m^2$ – t lehet bevakolni?**

**102. (K) Egyenes körhenger sugara $8,7\ cm$, térfogata $5\,025,72\ cm^3$. Mekkora a felszíne?**

**103. (K) Egy forgáshenger magassága az alapkör sugarának a háromszorosa, a henger palástjának felszíne $150\pi$ területegység. Számítsd ki a henger térfogatát!**

**104. (K) Egyenes körhenger felszíne $21\,356,62\ cm^2$, az alaplap sugarának és a magasságnak az aránya $4:5$. Mekkora az alaplap sugara és a testmagasság?**

**105. (K) Egyenes körhenger felszíne $62\,528,7\ cm^2$, palástjának területe $51\,983,8\ cm^2$. Mekkora a térfogata?**

**106. (K) Mekkora a kétliteres, henger alakú edény magassága, ha kétszer olyan magas, mint amilyen széles?**

**107. (K) Henger alakú, felül nyitott edény készítéséhez $480\ cm^2$ lemezt használnak fel. Mekkora az edény térfogata, ha alapkörének sugara $6\ cm$?**

**108. (K) Egy egyenes körhenger alapkörének átmérője és a magassága egyenlő. Felszíne $597\ cm^2$. Mekkora a térfogata?**

**109. (K) Hány $hl$ víz van egy $1,6\ m$ széles kútban, ha a víz $3,2\ m$ magasan áll benne?**

**110. (K) Egy $100\ m$ hosszú rézdrót tömege $7,26\ kg$. Mekkora az átmérője? ($8,8\ \frac{kg}{dm^3}$ a réz sűrűsége.)**

**111. (K) Egy $3\ dl$ űrtartalmú, henger alakú bögre magassága $10\ cm$. A bögre kívül – belül mázzal van bevonva. Mennyi $m^2$ – nyi felületet kell mázzal bevonni $1500$ bögre készítésénél? (A bögre vastagsága és füle miatt számítsunk rá még $8\ \%$ - ot.)**

**112. (K) Mennyi festék kell egy $6,5\ m$ hosszú, $45\ cm$ átmérőjű oszlop befestéséhez, ha $1\ m^2$ – re $20\ dkg$ festéket számítunk?**

**113. (K) Egyenlő oldalú egyenes körhenger térfogata $785,25\ m^3$. Mekkora a felszíne?**

**114. (K) Henger alakú víztartály belső átmérője $2,3\ m$. Mennyit emelkedik a víz felszíne, ha a tartályba $10\ hl$ vizet engednek?**

**115. (K) Hány másodperc alatt tölthető tele benzinnel egy $300\ l$ – es benzintartály, ha a töltés $30\ mm$ belső átmérőjű csövön át történik és az ömlés sebessége $10\ \frac{m}{perc}$?**

**116. (K) Egy malomkő külső és belső sugara $0,5\ m$ és $0,1\ m$, vastagsága $0,2\ m$. Mekkora a tömege, ha sűrűsége $2,5\ \frac{kg}{dm^3}$?**

**117. (K) Egyenes körhenger tengelymetszete olyan négyzet, aminek területe $628,7\ cm^2$. Mekkora a felszíne és a térfogata?**

**118. (K) Egyenes körhenger térfogata $9\,628,17\ cm^3$, palástjának felszíne $2\,128,29\ cm^2$. Mekkora az alaplap sugara és a testmagasság?**

**119. (K) Határozd meg a henger alakú vasedény tömegét, ha a magassága $0,9\ m$, fenekének átmérője $0,7\ m$, és falának vastagsága $0,09\ m$. (A vas sűrűsége $7,42\ \frac{kg}{dm^3}$.)**

**120. (K) Egyenes körhenger kiterített palástja egy négyzet, melynek átlója $10\ cm$. Mekkora a henger térfogata?**

**121. (K) Egy $26\ cm$ és $33\ cm$ oldalú téglalapot kétféleképpen csavarhatunk hengerré. Hogyan aránylik egymáshoz ennek a két hengernek a térfogata?**

**122. (K) Egyenes körhenger térfogata $3\,280\ cm^3$, az alaplap sugara és a magasság úgy aránylik egymáshoz, mint $5:6$. Mekkora a henger felszíne?**

**123. (K) Egyenlő oldalú egyenes körhenger palástja $25\ m^2$. Mekkora a térfogata? (Egyenlő oldalú a henger, ha ugyanolyan magas, mint amilyen széles.)**

**124. (K) Egyenes körhenger felszíne $4\,532,6\ cm^2$, a tengelymetszet területe $969,5\ cm^2$. Mekkora a térfogata?**

**125. (K) Egy $80\ dm^2$ területű, téglalap alakú bádogból csövet akarunk készíteni. A téglalap egyik oldala a másik oldal $\frac{5}{8}$ része. A rövidebb oldal legyen a cső tengelyével párhuzamos. Ráhajtásra $2\ cm$ – t szánjunk. Mekkora lesz a cső átmérője és magassága?**

**126. (K) Egyenes körhenger alaplapjának sugara $6\ cm$, a magassága $11\ cm$. A tengelyre illeszkedő egymással $40°$ - os szöget bezáró két félsíkkal kivágunk egy részt. Mekkora a kisebbik rész térfogata?**

**127. (K) Mekkora a falvastagsága annak az üreges henger alakú öntöttvas oszlopnak, melynek külső keresztmetszete $90\ cm$ kerületű kör, magassága $3,6\ m$, tömege $650\ kg$, sűrűsége $7,5\ \frac{kg}{dm^3}$?**

**128. (K) Egy óránként $82\ hl$ vizet adó forrás egy $7,5\ m$ átmérőjű henger alakú medencébe folyik. Mennyit emelkedik a vízszint $4$ óra alatt?**

**129. (K) Szivattyú dugattyújának átmérője $18\ cm$, lökethossza $46\ cm$. Percenként $100$ – szor szív és nyom. Hatásfoka $0,9$. (A hatásfok a valóságos teljesítmény és az elméletből adódó teljesítmény hányadosa.) Mennyi vízet szállít percenként ez a szivattyú?**

**130. (K) Egy henger alakú, felül nyitott víztartály átmérője $2\ m$, magassága $1\ m$. Mennyi liter víz fér el a tartályban? Mennyi $m^2$ anyag kell a tartály külsejének lefedéséhez, ha a veszteség $6$ % - os?**

**131. (K) Egy henger alakú edény belső átmérője $24\ cm$. Az edényben $10\ cm$ magasan víz van. A vízbe egy tömör vasból készült téglatestet teszünk, melyet a víz teljesen ellep. A téglatest két éle $15\ cm$ és $1\ dm$ hosszúságú. Mekkora a harmadik éle, ha a vízszint a téglatest belemerülése után $21\ mm$ – t emelkedik, de a víz nem ömlik ki az edényből?**

**132. (E) Egyenes körhenger felszíne $659,6\ cm^2$. Ha az alaplap sugarát $4\ cm$ – rel, a magasságot pedig $3\ cm$ – rel növeljük, akkor a felszíne $923,4\ cm^2$ – rel növekszik. Mekkora az alaplap sugara és a henger magassága?**

**133. (E) Egy forgáshenger térfogatának és felszínének mérőszámai úgy aránylanak egymáshoz, mint $3:4$. A tengelymetszet területének mérőszáma $24$. Határozd meg az alapkör sugarának és a magasságnak a mérőszámát! (694)**

**134. (E) Egy 6 literes forgáshenger alapkörének területe a felszín $20\ \%$ - a. Hány $dm^2$ a henger felszíne?**

**135. (K) Egy $5,2\ m$ átmérőjű, kör keresztmetszetű alagút fenekén vízszintes felületű betonréteget építenek. A betonréteg körszelet – keresztmetszetének magassága $1\ m$. Hány tonna cementre van szükség, ha az alagút $2,5\ km$ hosszú, és $1\ m^3$ beton $150\ kg$ cementet tartalmaz?**

**136. (K) Erősáramú kábelben 3 darab $6,6\ mm$ átmérőjű rézdrót van. Kívül $2\ mm$ falvastagságú, $3\ cm$ – es belső átmérőjű ólomköpeny veszi körül, amelyen belül a fenn maradó részt szigetelőanyag tölti ki. Mekkora a tömege $1\ m$ kábelnek? (A réz sűrűsége $8,9\ \frac{kg}{dm^3}$, az ólomé $11,4\ \frac{kg}{dm^3}$, a szigetelőanyagé pedig $0,9\ \frac{kg}{dm^3}$.)**

**137. (K) Körhenger alakú fekvő kazán belső átmérője $150\ cm$, hossza $5\ m$. Mennyi víz van benne, ha a magasságának $\frac{4}{5}$ részéig áll a víz?**

**138. (K) Egy egyenes körhenger alapkörének sugara $8\ cm$, magassága $12\ cm$. A tengelytől $4\ cm$ – re levő, vele párhuzamos síkkal elmetsszük a hengert. Mekkora a lemetszett darab felszíne és térfogata?**

**139. (K) Egyenes körhenger alakú fahasábot tengelyével párhuzamos két síkkal 3 részre hasítunk szét úgy, hogy a síkok az alapkör egy átmérőjét három egyenlő részre osztják. Mekkora a keletkezett részek tömege, ha a hasáb alapkörének sugara $15\ cm$, magassága $45\ cm$, és a fa sűrűsége $0,71\ \frac{g}{cm^3}$?**

**140. (K) Egy hengerszerű test magassága $22\ cm$, alaplapja olyan körszelet, amelyet egy $10\ cm$ sugarú kör $240°$ - os íve határol. Számítsd ki a felszínét és a térfogatát!**

**141. (E) Egy $5\ cm$ sugarú kör alakú lapra három henger alakú $6\ cm$ magsságú díszgyertyát tervezünk, melyek érintik egymást és állítva éppen ráférnek a körlapra. Mekkora legyen a gyertyák alaplapjának sugara? Milyen magas, $4\ cm$ – es alapélű, négyzetes oszlop alakú tömör viaszból önthető ki a három gyertya? (A kanóc térfogata elhanyagolható.)**

**142. (E) Két forgáshenger mindegyikének a palástja $100\ cm^2$ területű, magasságaik aránya $2:5$. Határozd meg a sugaraik arányát és a térfogataik arányát!**

**143. (E) Hányszorosa az egyenes körhenger magassága az alaplap sugarának, ha a tengelymetszet területe megegyezik az alap területével?**

**144. (E) Határozd meg két egyenlő térfogatú egyenes körhenger palástjának arányát!**

**145. (K) Egy ferde henger alkotója $3,42\ m$, az alkotónak az alapsíkkal bezárt szöge $32°\ 16'$, az alapkör sugara $1,57\ m$. Mekkora az alapsíkra merőleges, az alapkör és a fedőkör középpontjait tartalmazó metszet területe?**

**146. (K) Egy ferde körhenger alkotói $15\ dm$ hosszúak, az alkotók az alapsíkkal $67°\ 34'$ szöget zárnak be. Az alaplap kerülete a magasság ötszöröse. Mekkora a henger térfogata?**

**147. (K) Egy ferde körhenger alkotói $30\ cm$ hosszúak, az alkotók az alapsíkkal $57°\ 28'$ szöget zárnak be. Az alaplap sugara $5\ cm$. Mekkora a henger térfogata?**

**148. (K) Egy ferde körhenger alkotói $36\ dm$ hosszúak, az alkotók az alaplappal $32°\ 48'$ szöget zárnak be. Az alaplapra merőleges, az alapkör egy átmérőjén átmenő metszet területe $354,5\ dm^2$. Mekkora a henger térfogata?**

**149. (K) Egy egyenes körhengert, amelynek alapköre $8\ cm$ sugarú, metszünk el egy olyan síkkal, amely az alkotókkal $45°$ - os szöget zár be és minden alkotót metsz. A sík alatti rész legrövidebb alkotója $10\ cm$ hosszúságú. Mekkora a sík alatti test térfogata?**

**150. (E) Mennyi víz önthető egy egyenes körhenger alakú, a függőleges helyzetből $36,57°$ szöggel elfordított literes edénybe, ha az edény magassága az átmérő kétszerese?**

BZmatek.eu

# Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye I.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(9) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(10) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(11) Dobcsányi János; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(12) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(13) Saját anyagok