Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 0; 1; 2$ .... Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL:
Legyen az S_1 és S_2 síkok hajlásszöge α. Az S_1 síkban fekvő T_1 területű háromszög S_2 síkra eső merőleges vetületének területét jelölje T_2. A háromszög és merőleges vetületének területe között mindig fennáll a következő összefüggés: $T_2 = T_1 \cdot \cos\alpha$.

Bizonyítás:
Először tekintsük azt az esetet, amikor a síkok hajlásszöge $\alpha = 0°$ (ekkor a két sík párhuzamos).

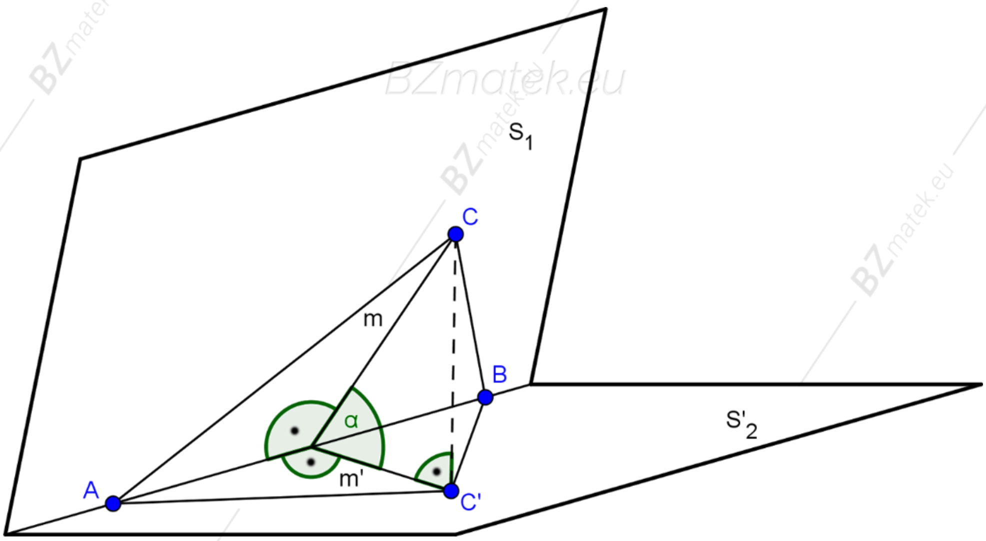
Ebből a következő adódik: $T_2 = T_1 = T_1 \cdot 1 = T_1 \cdot \cos 0° = T_1 \cdot \cos\alpha$.

Most tekintsük azt az esetet, amikor a síkok hajlásszöge $\alpha = 90°$ (ekkor a két sík merőleges).

Ebből a következő adódik: $T_2 = 0 = T_1 \cdot 0 = T_1 \cdot \cos 90° = T_1 \cdot \cos\alpha$.

Végül tekintsük azt az esetet, amikor a síkok hajlásszöge $0° < \alpha < 90°$.

Amennyiben a háromszög valamelyik oldala párhuzamos a két sík metszésvonalával, akkor vegyük fel azt az S_2 – vel párhuzamos ${S_2}'$ síkot, amelyik tartalmazza a metszésvonallal párhuzamos háromszögoldalt. (Mivel S_2 párhuzamos ${S_2}'$ - vel, így $T_2 = {T_2}'$.)



Ekkor a következő adódik: $T_2 = \frac{|AB| \cdot m\prime}{2} = \frac{|AB| \cdot m \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{|AB| \cdot m}{2} \cdot \cos\alpha = T_1 \cdot \cos\alpha$.

Amennyiben a háromszög egyik oldala sem párhuzamos a két sík metszésvonalával, akkor létezik a háromszög egyik csúcsán áthaladó olyan, a metszésvonallal párhuzamos egyenes, amelyik a háromszöget két, az előző pont feltételeinek megfelelő háromszögre bontja. Ezekre külön – külön teljesül a kívánt összefüggés:

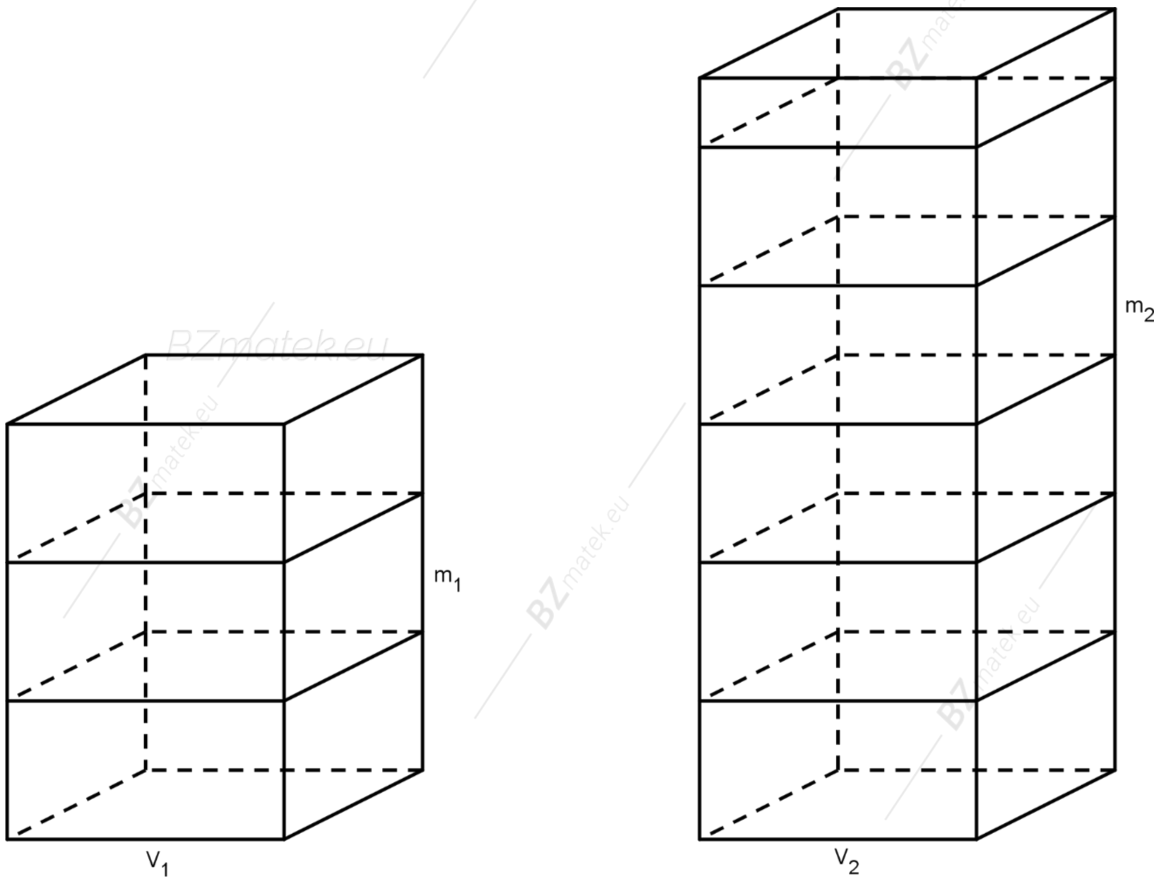
$T_2 = {T_2}' + {T_2}'' = {T_1}' \cdot \cos\alpha + {T_1}'' \cdot \cos\alpha = ({T_1}' + {T_1}'') \cdot \cos\alpha = T_1 \cdot \cos\alpha$

■

TÉTEL:
Ha két téglatest alaplapja egybevágó, akkor térfogatuk aránya a magasságuk arányával egyenlő.

Bizonyítás:
Legyen az egyik téglatest magassága m_1, térfogata V_1, míg a másiké pedig m_2, illetve V_2.

Osszuk fel az m_1 magasságot n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ egyenlő részre, majd ezt az $\frac{m_1}{n}$ nagyságú részt mérjük fel az m_2 magasságra annyiszor, ahányszor ráfér. Legyen a felmérések száma k $(k \in \mathbb{Z}^+)$.



Ebből felírhatjuk a következőt:

$$k \cdot \frac{m_1}{n} \leq m_2 < (k+1) \cdot \frac{m_1}{n} \qquad \rightarrow \qquad \frac{k}{n} \leq \frac{m_2}{m_1} < \frac{k+1}{n}$$

Amennyiben az osztópontokon át a téglatest alaplapjával párhuzamos síkokat fektetünk, akkor az első téglatestet pontosan n darab egybevágó részre osztjuk, melyek térfogata egyenként $\frac{V_1}{n}$.

Ebből felírhatjuk a következőt:

$$k \cdot \frac{V_1}{n} \leq V_2 < (k+1) \cdot \frac{V_1}{n} \qquad \rightarrow \qquad \frac{k}{n} \leq \frac{V_2}{V_1} < \frac{k+1}{n}$$

Az $\frac{m_2}{m_1}$ és a $\frac{V_2}{V_1}$ értéke ugyanazon a $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ intervallumban van, így távolságuk kisebb, mint az intervallum hossza. Ebből a következő adódik: $\left|\frac{m_2}{m_1}-\frac{V_2}{V_1}\right|<\frac{1}{n}$.

Mivel az n számot megválasztva az $\frac{1}{n}$ értéke bármilyen kicsi pozitív szám lehet (határérték számítással: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$), így a távolságuk 0.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $\frac{m_2}{m_1}=\frac{V_2}{V_1}$.

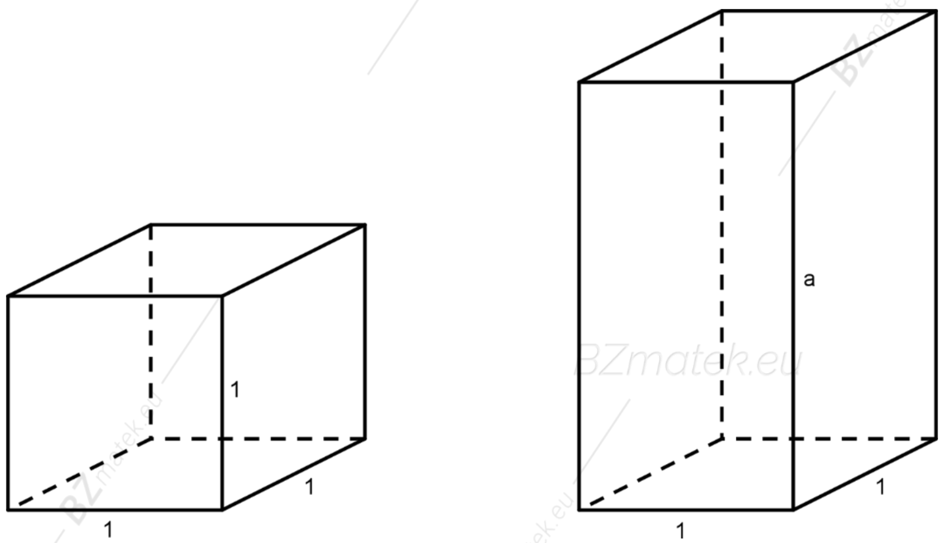
■

TÉTEL:
A téglatest térfogata megegyezik az egy csúcsából kiinduló három élének szorzatával.

Bizonyítás:
Legyen az egy csúcsából kiinduló élek hossza a, b, c, s ekkor a térfogata: $V=a\cdot b\cdot c$.

Tudjuk, hogy az egységnyi élű kocka térfogata: $V_1=1$.

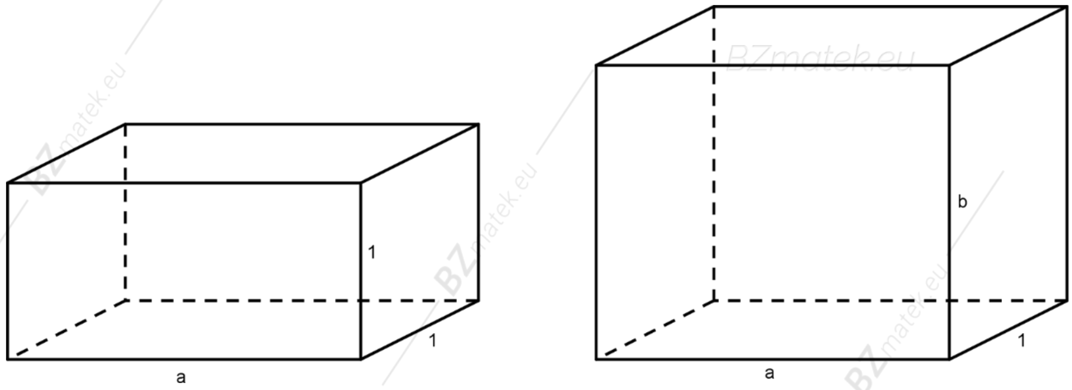
Tekintsük először az $1, 1, a$ élű téglatestet, melynek térfogata legyen V_2.



Ekkor ennek az alaplapja megegyezik az 1 élű kocka alaplapjával és magassága a, így felírhatjuk a következőt:

$\frac{a}{1}=\frac{V_2}{1}$ $\quad\rightarrow\quad$ $V_2=a$

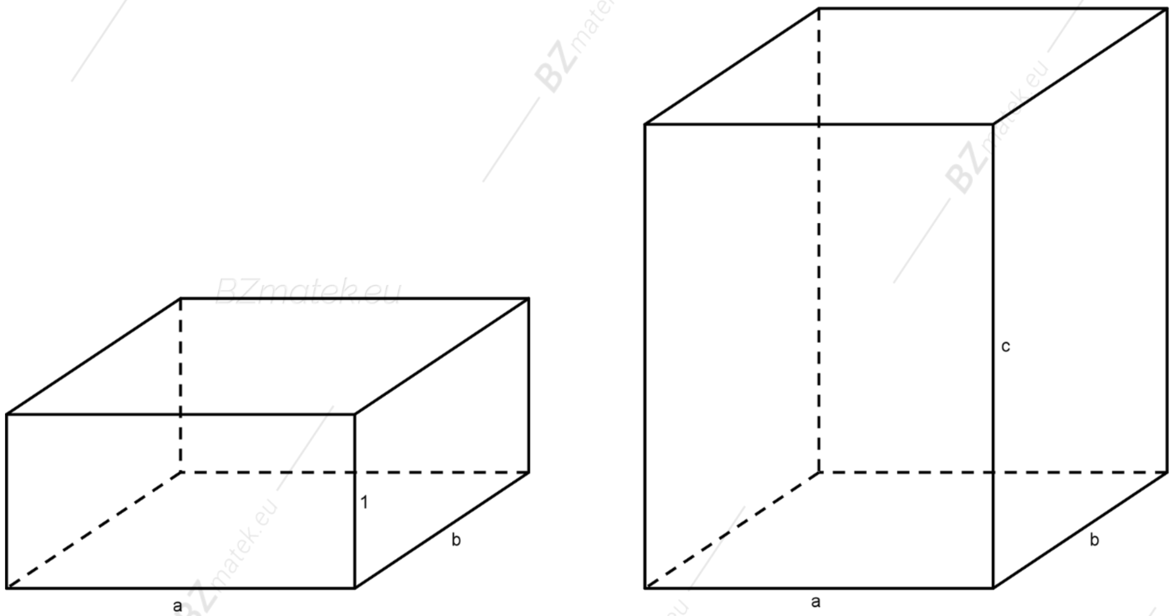
Tekintsük most az $1, a, b$ élű téglatestet, melynek térfogata legyen V_3.



Ekkor ennek az alaplapja megegyezik az $1, a, 1$ élű téglatest alaplapjával és magassága b, így felírhatjuk a következőt:

$\frac{b}{1} = \frac{V_3}{V_2} \qquad \rightarrow \qquad V_3 = V_2 \cdot b = a \cdot b$

Tekintsük végül az a, b, c élű téglatestet, melynek térfogata legyen V_4.



Ekkor ennek az alaplapja megegyezik az $a, b, 1$ élű téglatest alaplapjával és magassága c, így felírhatjuk a következőt:

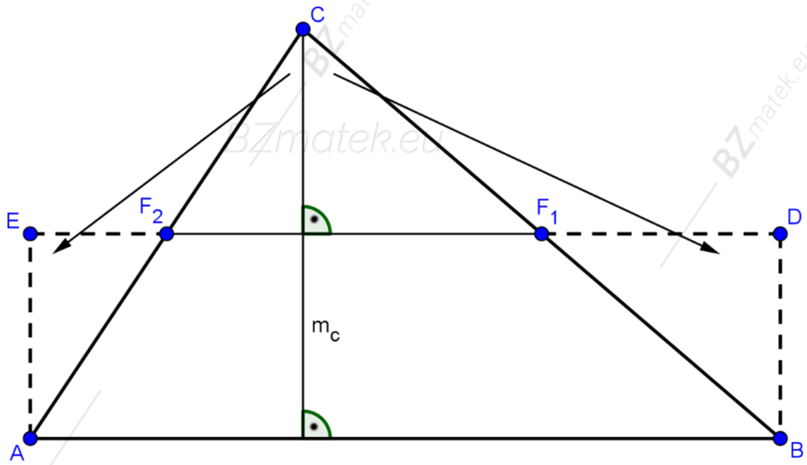
$\frac{c}{1} = \frac{V_4}{V_3} \qquad \rightarrow \qquad V_4 = V_3 \cdot c = a \cdot b \cdot c$

■

TÉTEL:
Egy T_a alapterületű, M magasságú hasáb térfogata: $V = T_a \cdot M$.

Bizonyítás:
Először tekintsük a háromszög alapú egyenes hasábokat.

Bármely háromszög az ábrán látható módon átdarabolható téglalappá:



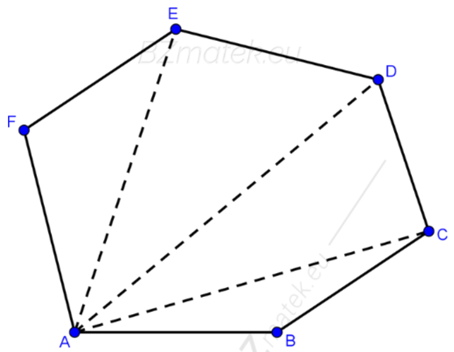
Az F_1F_2 szakasz a háromszög középvonala, míg az m_c a c oldalhoz tartozó magassága.

Az $ABC\ \Delta$ területe megegyezik az $ABDE$ téglalap területével.

Ebből adódik, hogy a háromszög alapú egyenes hasáb az alaplapra merőleges síkokkal téglalap alapú hasábbá darabolható át, melynek térfogata: $V = T_{ABDE} \cdot M = T_{ABC} \cdot M = T_a \cdot M$.

Most tekintsük a sokszög alapú egyenes hasábokat.

Bármely n oldalú sokszög az átlók mentén $(n-2)$ darab háromszöggé bontható fel.

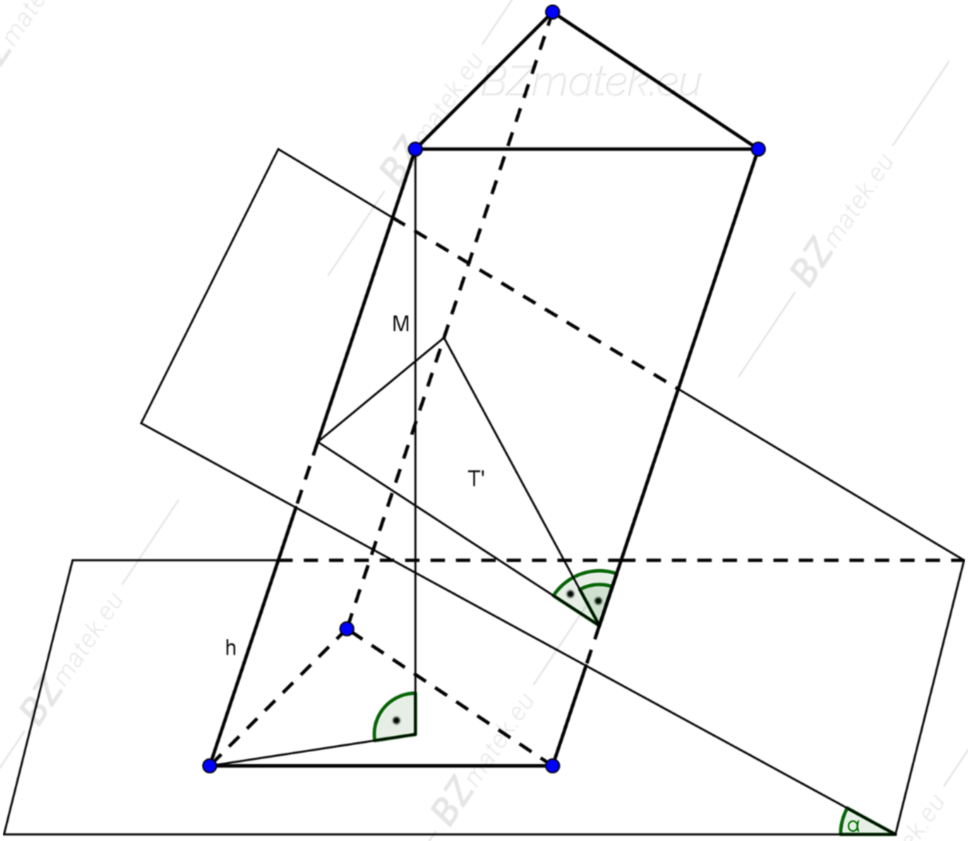


Az $ABCDE$ sokszög területe megegyezik a keletkező háromszögek területének összegével.

Ebből adódik, hogy a sokszög alapú egyenes hasáb az alaplap egyik csúcsából kiinduló átlóira fektetett merőleges síkokkal háromszög alapú egyenes hasábokra darabolható fel, vagyis térfogata: $V = T_1 \cdot M + T_2 \cdot M + \dots + T_{n-2} \cdot M = (T_1 + T_2 + \dots + T_{n-2}) \cdot M = T_a \cdot M$.

Végül tekintsük a sokszög alapú ferdehasábokat.

Amennyiben a hasáb elegendő magas, akkor el tudjuk metszeni egy olyan síkkal, amely valamennyi oldalélét merőlegesen metszi.



Legyen a síkmetszet területe T'.

A két részt illesszük össze úgy, hogy az eredeti hasáb alaplapjai egymásra kerüljenek (az eredeti fedőlapra az eredeti alaplap kerül). Ekkor egy T' alapterületű, h (oldalél) magasságú egyenes hasáb keletkezik, melynek térfogata $V = T' \cdot h$, s ez megegyezik az eredeti test térfogatával.

Mivel a T_a és a T' területű háromszög síkja α szöget zár be egymással, és a T' területű háromszög a T_a területűnek merőleges vetülete, így a következő adódik: $T' = T_a \cdot \cos\alpha$.

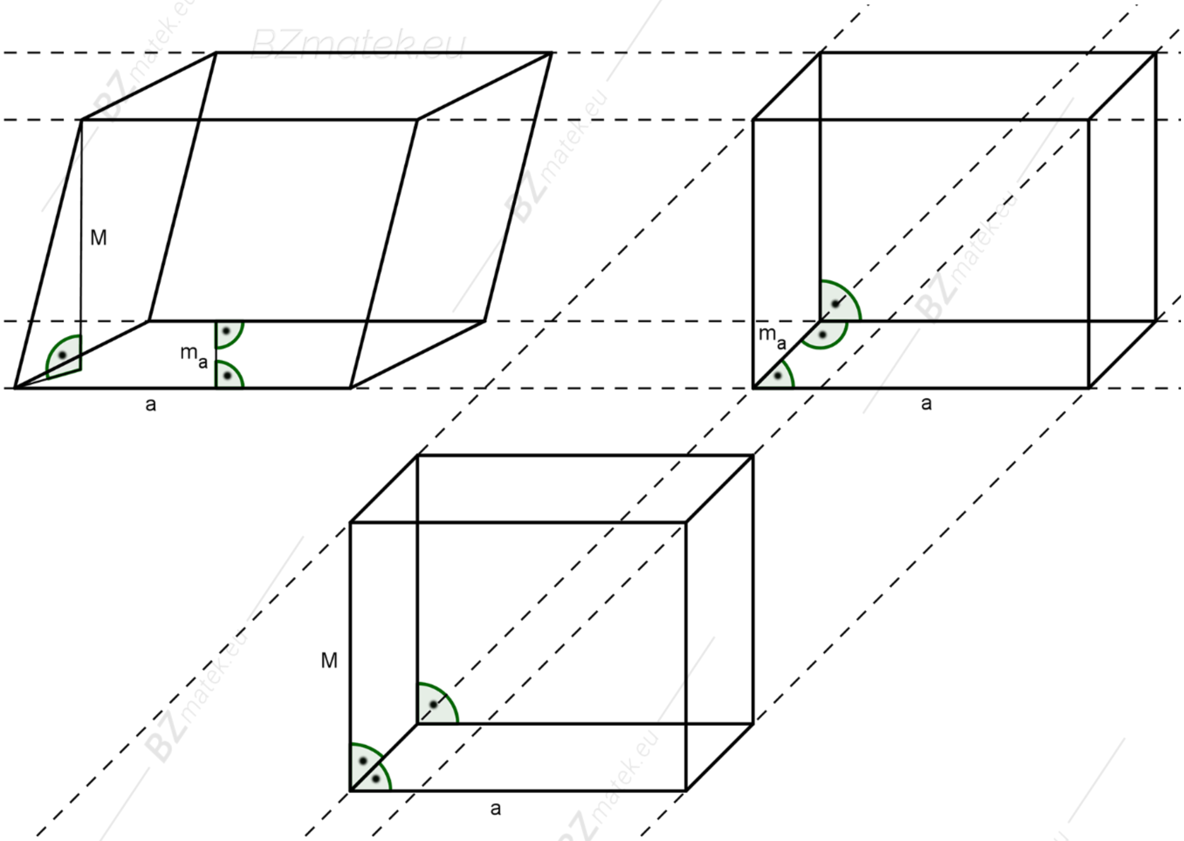
Az ábrán látható derékszögű háromszög M és h oldalai az α szöget bezáró szakaszokra merőlegesek, így szintén α szöget zárnak be egymással, vagyis teljesül a következő: $h = \frac{M}{\cos\alpha}$.

Ezeket behelyettesítve adódik a ferdehasáb térfogata: $V = T_a \cdot \cos\alpha \cdot \frac{M}{\cos\alpha} = T_a \cdot M$.

Amennyiben a hasáb olyan alacsony, hogy nem lehet minden oldalélét merőlegesen metszeni, akkor rakjunk egymásra annyi, az eredetivel egybevágó hasábot, hogy az előzőleg látott eljárás végrehajtható legyen. A síkkal való metszés és az összeillesztés után a kapott térfogatot annyi részre kell osztani, ahány egybevágó hasábot egymásra helyeztünk: $\frac{V}{n} = \frac{T_a \cdot M}{n}$, így $V = T_a \cdot M$.

Második bizonyítás:

Először tekintsük a paralelepipedonok térfogatát.



A paralelepipedon a hosszú élével párhuzamos élekre illeszkedő egyeneseket metsszük el egy rájuk merőleges síkpárral, melyek távolsága a. Az átdarabolás után látható második paralelepipedon alapterülete, magassága és így a térfogata megegyezik az eredeti testével. Ezt követően a második test m_a hosszú élével párhuzamos élekre illeszkedő egyeneseket metsszük el egy rájuk merőleges helyzetű síkpárral, melyek távolsága m_a. Az átdarabolás után keletkező paralelepipedon már téglatest lesz, melynek egyik lapjának területe megegyezik az eredeti paralelepipedon alaplapjának területével, az erre a lapra merőleges él hossza pedig a test magassága M. A térfogata megegyezik a második paralelepipedon térfogatával, s így az eredeti test térfogtával is. Ebből adódik, hogy a paralelepipedon térfogata: $V = T_a \cdot M$.

Most tekintsük a háromszög alapú hasábokat.

Amennyiben bármelyik oldallap középpontjára tükrözzük a háromszög alapú hasábot, akkor az eredetivel együtt egy paralelepipedont kapunk, amelynek térfogata kétszerese az eredeti test térfogatának. Ebből adódik, hogy a háromszög alapú hasáb térfogata: $V = \frac{2 \cdot T_a \cdot M}{2} = T_a \cdot M$.

Végül tekintsük a sokszög alapú hasábokat.

A hasábot az alaplap átlói mentén, az alaplapra merőleges síkokkal feldarabolva, háromszög alapú hasábokká bonthatjuk fel, amelyeknek magassága megegyezik az eredeti hasáb magasságával. A hasáb térfogata ezek térfogatának összege lesz.

■

TÉTEL:
Egy r sugarú, kör alapú, M magasságú henger térfogata: $V = T_a \cdot M = r^2 \cdot \pi \cdot M$.

<u>Bizonyítás:</u>
Tekintsük az r sugarú M magasságú hengerbe és a henger köré írt egyre nagyobb oldalszámú szabályos sokszög alapú hasábokat. A beírt hasáboknál a sokszögek csúcsai a körvonalra esnek, a köréírt hasáboknál a szabályos sokszögek oldalai érintik a kört. A hasábok alkotói párhuzamosak a henger alkotóival. A hasábok és a henger fedőlapjai egy síkba esnek.

A henger térfogata V, s ez tartalmazza bármely beírt hasábjának V_b térfogatát, illetve bármely köré írt hasábjának V_k térfogata tartalmazza a henger térfogatát.

Ebből felírhatjuk a következőt:

$$V_b < V < V_k \qquad \rightarrow \qquad T_b \cdot M < V < T_k \cdot M \qquad \rightarrow \qquad T_b < \frac{V}{M} < T_k$$

Mivel az r sugarú körre igaz, hogy a nagyobb sokszög belsejében van és tartalmazza a kisebb sokszöget, ezért területükre fennáll a következő: $T_b < r^2 \cdot \pi < T_k$.

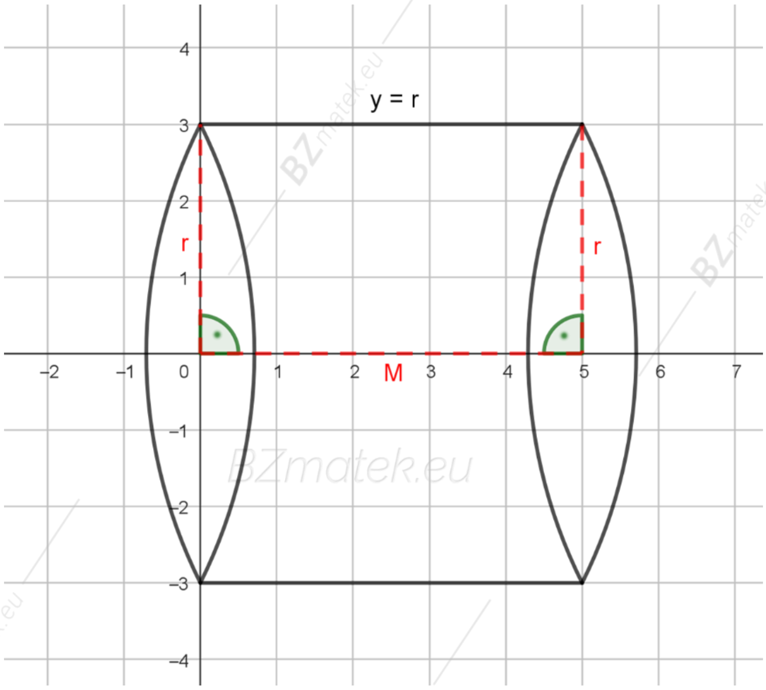
Ebből felírhatjuk a következőt: $\left|\frac{V}{M} - r^2 \cdot \pi\right| < T_k - T_b$.

Mivel az oldalszám növelésével a két sokszög területe egyre jobban megközelíti egymást, ezért a területük különbsége 0 – hoz tart. Így az előző egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet bármelyik sokszög esetén, ha $\left|\frac{V}{M} - r^2 \cdot \pi\right| = 0$, vagyis $\frac{V}{M} = r^2 \cdot \pi$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $V = r^2 \cdot \pi \cdot M = T_a \cdot M$.

Második bizonyítás:

Forgassuk meg az $y = r$ egyenletű egyenest az x – tengely körül a $[0; M]$ intervallumon:



$V = \pi \cdot \int_0^M r^2\, dx = \pi \cdot [r^2 \cdot x]_0^M = \pi \cdot (r^2 \cdot M - r^2 \cdot 0) = r^2 \cdot \pi \cdot M.$

■

TÉTEL:
Egy r sugarú, kör alapú, M magasságú henger felszíne: $A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + M)$.

Bizonyítás:
Az alaplapok területe: $T_a = r^2 \cdot \pi$.

A palást kiterítve egy téglalap, melynek egyik oldala a henger magassága, másik oldala pedig az alaplap kerülete, vagyis a területe: $T_p = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot M$.

Ebből adódik a bizonyítandó állítás: $A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + M)$.

■