Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

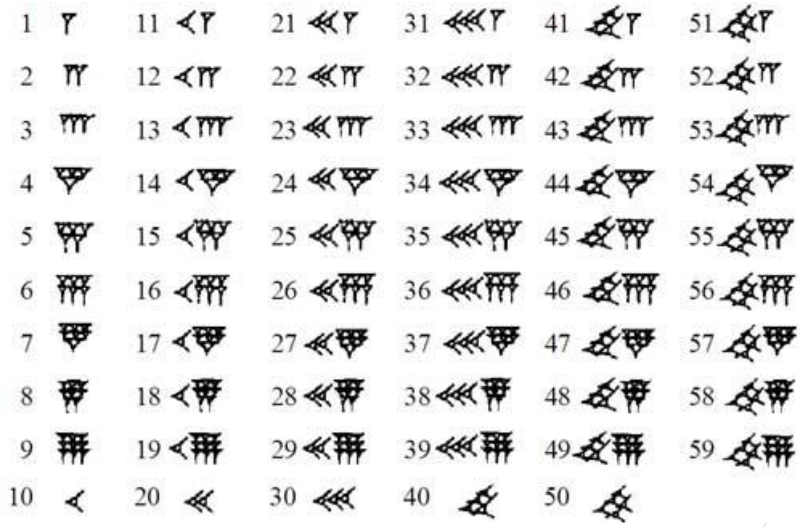
Számológép nélkül

Manapság az iskolában a matematika órán szinte mindenhez megengedett a számológép használata. Persze mindezen a mai világban már meg se lepődünk, hiszen a mindennapi tevékenységeink nagy részében jelen vannak a „modern kor gépei”. A következőkben arra az időre szeretnék visszatekinteni, mikor még az ember eszközei kezdetlegesek voltak, illetve néhány érdekes példát szeretnék hozni arra, hogy milyen számításokat lehet elvégezni számológép nélkül.

Első körben a **római számokról** ejtenék néhány szót. Ezt mindannyian tanuljuk az iskolában, de csak az alap jelöléseket $(1{:}\,I;\, 5{:}\,V;\, 10{:}\,X;\, 50{:}\,L;\, 100{:}\,C;\, 500{:}\,D;\, 1000{:}\,M)$. Azt, hogy ezekkel miként képzünk további számokat sokan elfelejtik, most lássunk erre egy példát: $1874 = MDCCCLXXIV874$, tehát balról haladunk (ezresek, százasok, tízesek, egyesek) jobb felé. Bár nagy számoknál szoktak rövidíteni, ez azonban nem megengedett, mert az I csak a V és az X előtt állhat (tehát a $999 = IM$ leírás nem helyes). A római számoknál továbbá használták a következő jelöléseket is: az adott érték százszorosát jelentette, ha az két függőleges vonal közé esett és ezerszeresét, ha egy vízszintes vonalat helyeztek el felé. Erre is nézzünk egy - egy példát: $|I| = 100; \overline{V} = 5000; \overline{|II|} = 200\,000$.

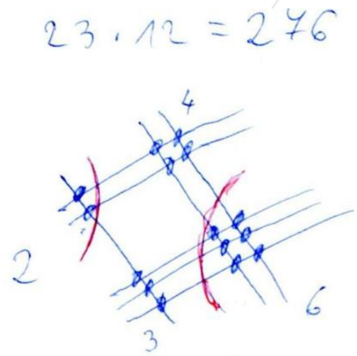
Ezután a kevésbé ismert, ám annál érdekesebb, **egyiptomi számolást** mutatnám be. Az egyiptomiaknál a számokat a következőképpen jelölték: 1-től 9-ig függőleges vonalakat húztak, míg a továbbiakra egy-egy képi szimbólumot használtak (tízesekre ∩ „halom”; százasokra:  „zsinór”; ezresekre:  „lótuszvirág”; tízezresekre: „ujj”; százezresekre:  „ebihal”; milliókra:  „feltartott kezű ember”). Ezekkel a jelölésekkel természetesen egy nagy szám leírása nehezebb volt, mint a rómaiaknál. Nézzünk egy példát erre is (itt szintén balról-jobbra haladunk): $231\,124 =$ . A szorzáshoz a duplázást és összeadást vették igénybe, mellyel könnyen lehetett számolni. Tekintsük a $13 \cdot 25 = 325$ kifejezést, amit ők a következőképpen számoltak ki: leírták egymás mellé az 1 - et és a 25 - öt, majd ezek alá sorba kezdték el írni a duplájukat (tehát az 1 - es alá került $2; 4; 8; \ldots$ és a 25 alá pedig $50; 100; 200; \ldots$). Ezután megnézték, hogy a 13, az első oszlop mely számainak összegéből áll elő $(13 = 1 + 4 + 8)$, s ennek megfelelően adták össze az ezekhez tartozó másik oszlopbeli számokat $(25 + 100 + 200 = 325)$. A törtek közül csak a kétharmadot () és a háromnegyedet () jelölték el, ezenkívül csak az 1 számlálójú törteket használtak (melynél a jel alá írták a nevezőt). Egy egyszerű szöveges feladatot a következőképpen oldottak meg: Melyik az a szám melyhez a negyedét adva 15 - öt kapunk? Megoldás: Először vettek egy olyan számot melynek a negyede könnyen kiszámítható, legyen ez most a 4. Erre a számta elvégezve a feladat szövegét 5 lesz az eredmény. Mivel a feladatban szereplő végeredmény (15) háromszorosa az általunk kapott 5 - nek, így a megoldás is háromszorosa lesz a korábban választott számunknak, tehát 12 a helyes válasz.

Mezopotámiában a sumérok a babiloniai matematikát használták, melyet ékírással írtak agyagtáblákra. A legkorábbi $(kb. i. e. 2500)$ írott matematikai emlékeink is az ókori suméroktól származnak. A számoláshoz a 60 - as számrendszert használták (lásd: lenti táblázat) és tőlük ered a mai időmérés alapja is (1 óra $= 60$ perc). A babiloniaiak ugyanúgy helyiértékes rendszert használtak, mint manapság mi is, tehát a bal oldalon álló számok nagyobb értéket jelöltek. Az egyeseket álló ékkel , a tízeseket fekvő ékkel  szemléltették. Ezek alapján a 4995 számot a következőképpen írták le:  $(1 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60^1 + 15 \cdot 60^0)$. A számításokhoz segédtáblázatokat használtak, amik különböző tulajdonság alapján tartalmazták a számokat: 1 - től 59 - ig a számok négyzeteit; köbszámokat; reciprokokat; négyzetgyököket; köbgyököket; szorzásokat, osztásokat. A gyökök közelítéséhez interpolációs módszert alkalmaztak, ami átlagoláson és osztáson alapult, mely elég gyors és pontos volt. Két szám szorzatát a következőképpen kapták meg: összeadták a két számot és vették annak a négyzetét, ezután kivonták az eredeti két számot és vették ennek is a négyzetét, majd a kapott négyzetszámokat kivonták egymásból, s az eredményt elosztották 4 - gyel (pl.: $9 \cdot 7 = [16^2 - 2^2]: 4 = 63$). Két szám osztását pedig a következőképpen végezték: az osztó reciprokával megszorozták az osztandót.

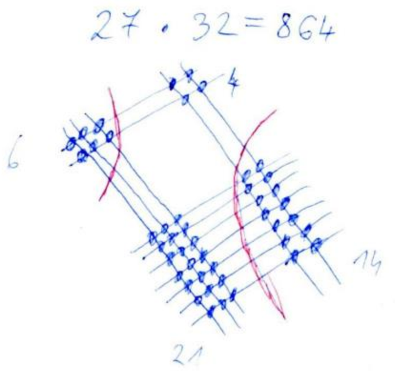


A **görögöknél** a matematika tudománya jóval kifinomultabb volt, mint a korábbi kultúráknál. A számokat érdekes tulajdonságok alapján különböztették meg. Azokat a számokat nevezték párosnak, melyek szemléltetéséhez egyenlő számú fehér és fekete színű kavicsot használtak. Egyenes számoknak nevezték azokat, melyeket nem lehetett kavicsokkal téglalap alakba kirakni, csak egy sorban (pl.: $2; 3; 5; \ldots$). Síkszámoknak nevezték ezáltal azokat, melyek két szám szorzatára bonthatóak, s így egy téglalappal szemléltethetőek (pl.: $6 = 3 \cdot 2$), s ennek voltak speciális esetei a négyzetszámok, melyek egyenlő tényezőkre bonthatóak (pl.: $16 = 4 \cdot 4$). Ezek alapján pedig testszámoknak nevezték azokat, melyek három tényező szorzataként is előállnak, s így egy térbeli téglatestként szemléltethetőek (pl.: $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$), s az előzhöz hasonlóan itt a speciális eseteket köbszámoknak nevezték. Az előzőekhez hasonlóan képeztek ún. háromszögszámokat is (pl.: $3; 6; 10; \ldots$), melyek a kavicsokkal háromszög alakban szemléltethetőek. Tökéletes számoknak nevezték azokat, melyek osztóinak összege éppen a szám kétszerese (pl.: $28: 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$). Ezek alapján megkülönböztettek bővelkedő és szűkölködő számokat is: az első esetben a szám osztóinak összege nagyobb, mint a szám kétszerese, míg a második esetben kisebb. Két számot pedig barátságosnak neveztek, ha az egyik szám önmagánál kisebb osztóinak összege egyenlő a másik számmal és viszont (pl.: 220 és 284). Végezetül prímszámoknak (törzsszámoknak) nevezték azokat a számokat, melyeknek pontosan kettő osztója van, 1 és önmaga (pl.: $2; 3; 5 \ldots$), s ezen belül ikerprímeket is tekintettek: azok a prímek, melyek különbsége pontosan kettő (pl.: 11 és 13).

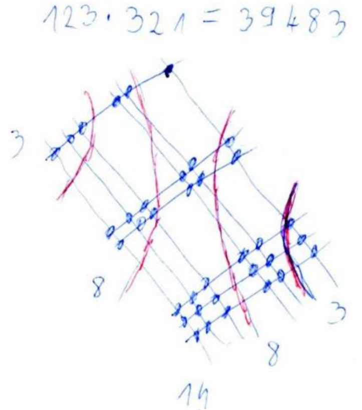
A **kínaiaknál** ismert a szorzásra egy érdekes eljárás. A két számot melyet összeszorzunk egyenesekkel szemléltetjük, majd a megoldásokat az egyenesek metszéspontjai fogják megadni. Amennyiben két kétjegyű számot szorzunk össze, akkor a metszéspontokat kettő vonallal 3 részre bonthatjuk, ahol minden részben megnézzük a pontok számát. A középső halmazba a metszéspontoknak két csoportja tartozik, melyek számát össze kell adnunk. A megoldást úgy kapjuk, hogy a különböző részek pontjainak számát egymás mellé sorban leírjuk.

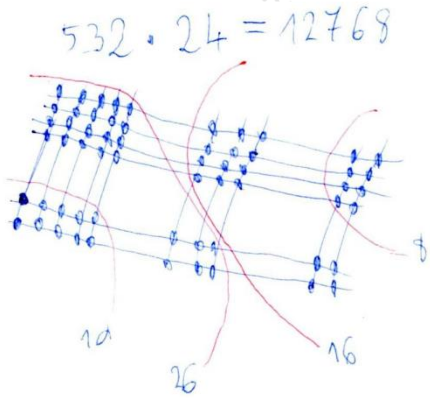


A helyzetet bonyolítja, ha a részekhez tartozó pontok összege kétjegyű szám. Ebben az esetben nem írhatjuk le az előző módszerrel, mert akkor nem megfelelő megoldást kapnánk. Ilyenkor hátulról tekintve a számokat, amennyiben kétjegyű számmal dolgozunk, úgy az első számjegyét hozzáadjuk a következő számhoz (ábrán: $14 \to 4; 1 + 25 = 26 \to 6; 2 + 6 = 8$).

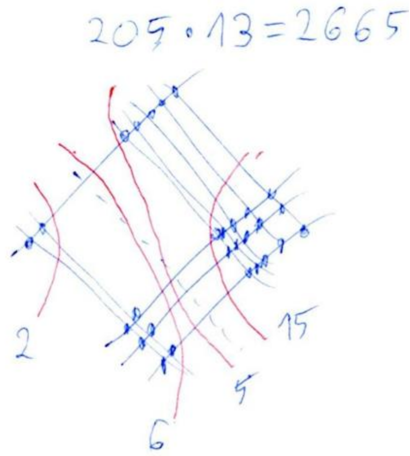


Ezután tekintsük azt az esetet amikor két háromjegyű számot szorzunk össze. A metszéspontokat négy vonallal 5 részre osztjuk: a második és negyedik részbe a pontok két csoportja, míg a középső részbe a pontok három csoportja tartozik. Amennyiben pedig egy kétjegyű és egy háromjegyű számot szeretnénk összeszorozni, akkor szintén négy vonalat használunk, de csak 4 részre bontjuk a metszéspontokat (középső rész hiányzik). A részekhez tartozó pontok számának lejegyzetelése után hasonlóan járunk el, mint fentebb.

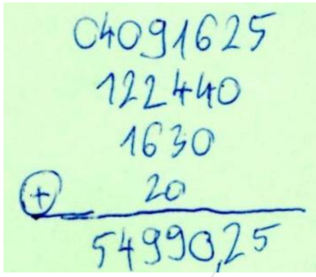




Végezetül nézzük meg miként alakítja a számolást, amikor valamelyik szám számjegyei között szerepel a 0. Ekkor ezt a számjegyet egy szaggatott vonallal jelöljük az ábrán, majd behúzzuk az egyes részeket határoló vonalakat az előzőekhez hasonlóan. A metszéspontok összeszámlálásánál pedig ügyelünk arra, hogy a szaggatott vonal által meghatározott metszéspontokat nem tekintjük (nullaként számoljuk).



Ezek után nézzük meg miként lehet kiszámítani egy számnak a **négyzetét** számológép nélkül. Legyen az a feladat, hogy számoljuk ki $234{,}5$ - nek a négyzetét. Első lépésben minden számjegynek vesszük a négyzetét és kettes csoportban leírjuk őket egymás mellé (04091625). Ezután alá írjuk egy jeggyel balra tolva a következőt (az eredeti szám alapján): az első számot megszorozzuk a mögötte állóval és még kettővel, s ezt folytatjuk végig (122440). Következő lépésben az első számot a kettővel mögötte levővel és még kettővel szorozzuk meg, majd ezt is beljebb tolva írjuk alá (1630). Végezetül az első számot a hárommal mögötte levővel szorozzuk meg és még kettővel, majd ismét alá írjuk az előzőeknek (20). Amennyiben végeztünk ezekkel a számításokkal már csak össze kell adnunk a fentebb egymás alá lejegyzett számokat , s az eredménynél kétszer annyi tizedesjegyet jelölünk meg, mint amennyi az eredeti számnál volt. Ebből a következő megoldás adódik: $234{,}5 \cdot 234{,}5 = 54990{,}25$.



Hasonló eljárást lehet **négyzetgyökvonásra** is alkalmazni, azonban a hosszúsága miatt, most csak egy érdekességre szeretnék rámutatni ezzel kapcsolatban. Amennyiben 25 - re végződik egy szám és az előtte álló számjegyekből álló szám felírható két egymást követő szám szorzataként, úgy a megoldás könnyen előáll. Példa: Mennyi 4225 és $20{,}25$ négyzetgyöke? Mivel $42 = 6 \cdot 7$, ezért $\sqrt{4225} = 65$ és $20 = 4 \cdot 5$, így $\sqrt{20{,}25} = 4{,}5$.

Bár mindezekre ma már nincs szüksége az embernek, azért furcsa belegondolni, hogy az ókori Babilonban a 60 - as számrendszert (60 - szor 60 - as szorzótáblát) használták, manapság pedig sajnos a 10 - szer 10 - es is sokaknak problémát jelent. Remélem, azért így is sikerült néhány érdekességgel megismertetnem az olvasókat és ahogy mondani szokás: ki tudja, egyszer még lehet ismét jól jöhet mindezek ismerete.

Brósch Zoltán