Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Bizonyítások

Bizonyítási módszerek:

- Direkt bizonyítás:
  Ez a leggyakoribb bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő: Ismert definíciók, tételek segítségével lépésről lépésre történő következtetések levonása után jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

- Indirekt bizonyítás:
  Ennek lényege a következő: Egy állítás bizonyítását úgy végezzük el, hogy először feltételezzük az állítás tagadását, majd ebből kiindulva, lépésről lépésre történő következtetések levonása után egy ismert állítással ellentmondó állításhoz jutunk. Ezt az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, ha a kiindulási feltételezésünk (a bizonyítandó állítás tagadása) nem igaz. Ekkor azonban az eredeti állítás igaz.

- Teljes indukció:
  Ennek lényege a következő: A természetes számokkal kapcsolatos állítást először ellenőrizzük néhány konkrét számértékre, pl.: $n = 1$ – re, $n = 2$ - re. Ezután megmutatjuk, hogy ha valamely k természetes számra igaz az állítás (a k létezését már számítással ellenőriztük), akkor a következő $k + 1$ természetes számra is igaz lesz. Ekkor a tulajdonság k – ról $k + 1$ – re öröklődik, vagyis az állítás minden természetes számra igaz lesz.

- Skatulya – elv:
  Ennek lényege a következő: Azt használjuk fel, hogy ha van n darab sktulyánk, és ezekbe n - nél több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe egynél több dolog kerül. Továbbá, ha az n skatulyába $n \cdot k$ – nál több dolgot helyezünk el, akkor biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amelybe k – nál több dolog kerül.

TÉTEL: (Képzési szabály)
Ha egy mértani sorozat első tagja a_1, kvóciense q, akkor n – edik tagja megkapható a következő összefüggés segítségével: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Bizonyítás:
Az állítást teljes indukcióval látjuk be:

- $n = 1$ – re az állítás teljesül: $a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$.

- Tegyük fel, hogy $n = k$ – ra igaz az állítás, vagyis $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$.

- Megmutatjuk, hogy ekkor $n = k + 1$ – re is teljesül az állítás, vagyis $a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$.

  Használjuk a mértani sorozat definícióját és az indukciós feltevést:

  $a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^k$.

Ezek alapján minden n – re teljesül a bizonyítandó állítás.

■

TÉTEL:
A mértani sorozat bármely elemének négyzete (a másodiktól kezdve) egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemek szorzatával. Jelölés: $a_n^{\ 2} = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$.

Bizonyítás:
Írjuk fel az a_{n-k} és a_{n+k} tagokat a következőképpen:

$a_{n-k} = \frac{a_n}{q^k}$ $\qquad$ $a_{n+k} = a_n \cdot q^k$

Tekintsük a két tag szorzatát, s megfelelő átalakításokkal adódik a bizonyítandó állítás:

$a_{n-k} \cdot a_{n+k} = \frac{a_n}{q^k} \cdot a_n \cdot q^k = a_n^{\ 2}$.

Ebből négyzetgyökvonással adódik a következő alak is: $|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$.

■

TÉTEL:
A különböző tagokból álló (a_n) mértani sorozat első n elemének összege: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Bizonyítás:
Ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja a_1, vagyis az első n tag összege: $S_n = n \cdot a_1$.

Ha $q \neq 1$, akkor írjuk fel az első n tag összegét a_1 és q segítségével:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát q – val:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n.$$

A kapott egyenleteket egyenletrendszerként tekintve, a második egyenletből vonjuk ki az elsőt:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \qquad \rightarrow \qquad S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$$

A kapott egyenletet átrendezve adódik a bizonyítandó állítás:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

■

TÉTEL: (kamatos – kamat számítás)
Ha T_n – nel jelöljük az n – edik év (vagy más időszak) végén felvehető összeget, T_0 – lal az induló tőkét (a kezdetkor betett összeget), p – vel a százaléklábat (évente ennyi százalékkal növekszik a betett összeg), n – nel az évek (vagy más időszakok) számát, akkor a betett összeg növekedése a következő képlettel írható le: $T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Bizonyítás:
A hatványozás definíciójából adódik az állítás:

$$T_n = T_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{n\ darab} = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

■

TÉTEL: (gyűjtőjáradék számítás)
Ha minden év elején ugyanakkora T_0 értéket teszünk be a bankba, s ez évente p százalékkal kamatozik, akkor az n – edik év végén felvehető összeg a következő képlettel írható le: $T_n = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$.

<u>Bizonyítás:</u>
Az első évben betett T_0 érték n – szer, a második évben betett T_0 érték $(n-1)$ – szer, az utolsó évben betett összeg pedig egyszer fog kamatozni.

Ezeket összeadva egy mértani sorozatot kapunk, melyből adódik a bizonyítandó állítás:

$$T_n = T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n + T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \dots + T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) =$$

$$= T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \left[1 + \left(1+\frac{p}{100}\right) + \dots + \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2} + \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{p}{100}\right) - 1} = T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$$

■

TÉTEL: (törlesztőrészlet számítás)
Ha egy T_0 nagyságú, p százalékos kamatozású kölcsönt kell visszafizetnünk n év alatt úgy, hogy minden évben ugyanakkora T_n összeget fizetünk vissza, akkor a T_n törlesztő részlet nagysága a következő képlettel írható le: $T_n = T_0 \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}$.

<u>Bizonyítás:</u>
Az n – edik év végére a kölcsön p százalékos megnövekedett értéke: $T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Az n – edik év végére befizetett összeg: $T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}$.

Mivel az n – edik év végére a befizetésnek egyenlőnek kell lennie a kölcsön megnőtt értékével, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$T_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n = T_n \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\frac{p}{100}}.$$

Az egyenlet rendezésével adódik a bizonyítandó állítás: $T_n = T_0 \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}$.

■