Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Rekurzív sorozatok

DEFINÍCIÓ: (Számsorozat)
A számsorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete a valós számok egy részhalmaza. Jelölés: $(a_n), \{a_n\}$.

Megjegyzés:

- *Az* 1 *– hez hozzárendelt szám a sorozat első tagja. Jele:* a_1.
- *A sorozat tagjait a sorozat elemeinek nevezzük.*

Sorozat megadása:

- függvényszerűen, pl.: $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}; x \longmapsto x^2 + 1$
- az n – edik (általános) tagot előállítható képlettel, pl.: $a_n = 2^n - 3$
- körülírással, pl.: $\{a_n\} = \{a\ páros\ pozitív\ egész\ számok\ növekvő\ sorozat\}$
- rekurzív módon, pl.: $a_1 = 4;\ a_2 = 7;\ a_n = 6 \cdot a_{n-1} + 5 \cdot a_{n-2}$

DEFINÍCIÓ: (Rekurzív sorozat)
Az olyan sorozatokat, amelyeknél a sorozat általános tagját az előtte levők függvényében adjuk meg, rekurzív sorozatoknak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: (Fibonacci – sorozat)
A Fibonacci – sorozat speciális rekurzív sorozat, ahol $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$ és az általános tag: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

<u>A Fibonacci – sorozat tulajdonságai:</u>

- A sorozat monoton növekvő.
- A sorozat alulról korlátos, az alsó korlát: $k = 1$.
- A sorozat n – edik tagja 1 – gyel nagyobb, mint az $(n-2)$ elem összege.
- Minden $m > 1$ természetes számnak van többszöröse a sorozatban.
- A sorozat elemeit egy $m > 1$ természetes számmal osztva a maradékok periodikus sorozatot alkotnak. A periódus hossza legfeljebb m^2.
- A sorozat bármely két szomszédos eleme relatív prím.
- A tagok négyzetösszege: ${a_1}^2 + {a_2}^2 = a_2 \cdot a_3$; ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = a_3 \cdot a_4$; ...
- Ha a Pascal – háromszög elemeit megfelelő módon összeadjuk, akkor a Fibonacci – sorozat tagjait kapjuk eredményül.
- A sorozat általános tagja megkapható a következő képlettel: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Gyakorló feladatok

K: középszintű feladat **E: emelt szintű feladat**

1. (K) Számítsd ki a következő sorozatok ötödik és huszadik elemét!

$a_n = 2n - 12$ $b_n = 100 - 5n$ $c_n = 2n^2 - 30n$

$d_n = n^3 - 15n + 3$ $e_n = \sqrt{3n + 4}$ $f_n = \sqrt{4n + 1} - n$

$g_n = \frac{3n - 15}{2n + 1}$ $h_n = \frac{n^2 - 3}{n - 3}$ $i_n = \sin(n \cdot \pi)$

2. (K) A (c_n) sorozat n – edik tagja $c_n = \binom{n+1}{2}$. Számítsd ki a c_1; c_2 és c_{10} tagokat!

3. (K) Írd fel a következő sorozatok első három tagját!

$a_n = 2n - 5$ $b_n = -n^2 + 4n$ $c_n = (-1)^{n+1} \cdot (-2)^n$

4. (K) Határozd meg a következő sorozatok első négy tagját!

$a_n = \frac{64}{4^n}$ $b_n = 2010 - 4n$ $c_n = \sqrt{4n - 1}$

$d_n = 1 - n^2$ $e_n = \frac{(-1)^n}{-n}$ $f_n = \frac{2^{n-1}}{2n + 1}$

$g_n = \frac{n - 5}{n + 1}$ $h_n = \frac{n - 1}{n}$ $i_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

5. (K) Add meg a következő sorozatok első öt tagját!

$a_n = 3n$ $b_n = n^2 - 6n + 9$ $c_n = |n^2 - 6n|$

$d_n = (-1)^n$ $e_n = 3 - \frac{1}{n}$ $f_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$g_n = 9 - 4n$ $h_n = \frac{n + 2}{n}$ $i_n = \frac{(-2)^n}{3n - 2}$

6. (K) Számítsd ki az alábbi általános taggal adott sorozatok első hat tagját!

$a_n = 0,5n - 2$ $\quad$ $b_n = n^3 - 4n^2$ $\quad$ $c_n = |n^3 - 4n^2|$

$d_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad$ $e_n = (-2)^n$ $\quad$ $f_n = 2 + \frac{1}{n}$

$g_n = 3 + (-1)^{n+1}$ $\quad$ $h_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$ $\quad$ $i_n = \cos(n \cdot \pi)$

7. (E) Írd fel annak a számsorozatnak az első öt tagját, amelynek n – edik tagja a következő!

$a_n = \lg[\cos(2n\pi)]$ $\quad$ $b_n = \sin\left(n \cdot \pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$c_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ $\quad$ $d_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

8. (K) Egy sorozat n – edik tagja $a_n = \frac{n}{4} + \frac{13}{6}$. A sorozat 12. tagja nagyobb – e 6 – nál?

9. (K) Döntsd el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben!

A: az $a_n = 9 + 3 \cdot (-1)^n$ sorozat 50. tagja vagy a $b_n = \sqrt{n} + 7$ sorozat 25. tagja

B: az $a_n = \frac{5n}{n+3}$ sorozat 12. tagja vagy a $b_n = (-1)^{n+6} + 5$ sorozat 99. tagja

C: az $a_n = 1$ sorozat 60. tagja vagy a $\frac{8}{7}$ tizedestört alakjában a tizedes vessző utáni 67. jegy

D: az $a_n = \cos\frac{7n \cdot \pi}{3}$ sorozat 43. tagja vagy a $b_n = \frac{7n - 7}{12n + 88}$ sorozat 101. tagja

E: az $a_n = \lg(13n - 1)$ sorozat 77. tagja vagy a $b_n = \sqrt[n+3]{146n + 2}$ sorozat 7. tagja

10. (K) Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 14?

$a_n = 8n - 18$ $\quad$ $b_n = \frac{10n + 20}{3n - 26}$ $\quad$ $c_n = |47 - 7n|$

11. (K) Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 30?

$a_n = n^2 - 11n + 18$ $\quad$ $b_n = \log_2 n$ $\quad$ $c_n = 60 \cdot \sin\frac{n \cdot \pi}{6}$

12. (K) Hányadik tagja az alábbi sorozatoknak a 9?

$a_n = \frac{30n-21}{3n+13}$ $\qquad$ $b_n = n^2 - 10n - 2$ $\qquad$ $c_n = \sqrt[3]{2n+7}$

13. (K) Egy sorozat n – edik elemét az alábbi képlettel definiáljuk: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2016$. Hányadik tagja lesz a sorozatnak először hatjegyű?

14. (K) Határozd meg az $a_n = cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ sorozat 2020. tagját és az első 2018 tag összegét!

15. (K) Határozd meg az $a_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$ sorozat 2010. tagját és az első 2010 tag összegét!

16. (K) Tekintsük az $a_n = (-1)^{n+1} \cdot (2n+1)$ sorozatot! Mennyi a sorozat első 8 elemének összege?

17. (K) Mennyi a következő sorozat első 5 elemének összege?

$$a_n = (-1)^n \cdot \sin\left[(2n+1) \cdot \frac{\pi}{4}\right]$$

18. (E) Legyen egy sorozat n – edik tagja $a_n = \frac{4}{(4n+1)\cdot(4n+5)}$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$. Add meg az első 100 tag összegét!

19. (K) Ábrázold derékszögű koordináta – rendszerben az $a_n = (n-1)^2 - 4$ sorozat első négy tagját! Hanyadik tagja a sorozatnak a 45?

20. (K) Ábrázold koordináta - rendszerben az $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ sorozat első hét tagját! Mennyi az a_n számsorozat 127. tagja? Hány egész szám van az a_n sorozat tagjai között?

21. (K) Folytasd az alábbi sorozatokat, add meg a sorozat általános tagját!

$-3; -1; 1; 3; 5; \dots$ $\quad$ $-1; -2; -4; -8; -16; \dots$ $\quad$ $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

$\sqrt{7}; \sqrt[3]{7}; \sqrt[4]{7}; \sqrt[5]{7}; \sqrt[6]{7}; \dots$ $\quad$ $0; 1; \log_2 3; 2; \log_2 5; \dots$ $\quad$ $1; 2; 3; 1; 2; \dots$

26. (K) Add meg általános tagjával azt a sorozatot, amelynek elemei:

a) **az 5 – tel osztva 2 maradékot adó természetes számok**

b) **a 7 – tel osztható természetes számok**

c) **a 2 természetes szám kitevőjű hatványai**

d) **a pozitív páros számok**

e) **a pozitív természetes számok reciprokai**

f) **a pozitív természetes számok négyzetei.**

27. (E) Háromszögszámokat kapunk, ha kavicsokat háromszög alakban rendezünk el úgy, hogy mindegyik sorban 1 – el több kavics van, mint a fölötte levőben. Mennyi a 100 – adik háromszögszám? Mennyi az n – edik háromszögszám?

28. (K) Írd fel az alábbi rekurzív módon megadott sorozatok első 7 tagját! $(n \in \mathbb{N})$

$a_1 = 3$ és $a_n = 2a_{n-1} + 3 \ (n > 1)$

$b_1 = 2; b_2 = 1$ és $b_n = (-1)^n \cdot b_{n-1} + 3b_{n-2} \ (n > 2)$

$c_1 = 2; c_2 = 3$ és $c_n = \sqrt{2} \cdot c_{n-2} \ (n > 2)$

$d_1 = 2; d_n = d_{n-1} + 5 \ (n > 1)$

$e_1 = -\frac{5}{2}; e_n = -\frac{e_{n-1}}{2} \ (n > 1)$

$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \ (n > 0)$

$g_1 = 3, g_2 = 0, g_{n+2} = 2g_n + g_{n+1} \quad (n > 0)$

$h_1 = 1; h_2 = 1; h_n = h_{n-1} + h_{n-2} \ (n > 2)$

$i_1 = 2; i_2 4; i_n = \frac{i_{n-1} + i_{n-2}}{2} \ (n > 2)$

29. (K) Írd fel az alábbi sorozatok első 10 elemét! $(n \in \mathbb{N})$

$a_1 = -2; a_n = 1 + 2 \cdot a_{n-1}\ (n > 1)$

$b_1 = \frac{1}{2}; b_2 = -\frac{1}{2}; b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3 \cdot b_{n-2}\ (n > 2)$

$c_1 = -1; c_n = n^2 - 2 \cdot c_{n-1}\ (n > 1)$

$d_1 = 1; d_2 = 2; d_3 = 3; d_n = d_{n-1} + \frac{d_{n-2} + d_{n-3}}{2}\ (n > 3)$

$e_1 = 1; e_n = e_{n-1} + 1\ (n > 1)$

$f_1 = 2, f_n = 2 + f_{n-1}\ (n > 1)$

$g_1 = \frac{1}{4}; g_n = 2 \cdot g_{n-1}\ (n > 1)$

$h_1 = 1; h_n = 4 - h_{n-1}\ (n > 1)$

$i_1 = 1; i_2 = 4; i_n = \frac{i_{n-1}}{i_{n-2}}\ (n > 2)$

30. (K) Egy számsorozat első eleme 5. Számítsd ki a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz a következő!

$a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6$

$b_n = -3 \cdot b_{n-1} + 21$

$c_n = \frac{2}{3} \cdot c_{n-1} - 1$

$d_n = \frac{d_{n-1}}{n}$

31. (K) Egy sorozat első tagja $\frac{2}{3}$, n – edik tagja $a_n = a_{n-1} + \frac{n}{6}$ (a másodiktól kezdve). Számítsd ki a sorozat első négy tagját!

32. (K) Egy sorozat első tagja (-5), a második tagja 2. Minden további tag a közvetlenül előtte álló két tag összegével egyenlő. Mennyi a sorozat első 7 tagjának összege?

33. (K) Egy sorozat elemeire a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2014. tagja és az első 2017 tag összege, ha $a_1 = 1; a_2 = 2$?

34. (K) Legyen adott az $a_1 = 1; a_2 = 2; a_n = \frac{a_{n-1}+1}{a_{n-2}}$ rekurzív sorozat! Határozd meg a sorozat 2012. tagját és az első 99 tagjának az összegét!

35. (K) Legyen adott az $a_1 = 1; a_2 = 3; a_n = \frac{3a_{n-1}}{a_{n-2}}$ $(n > 2)$! Határozd meg a sorozat 2012. tagját és az első 32 tagjának az összegét!

36. (K) Egy sorozat tagjaira a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2010. eleme és az első 2010 elem összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

37. (K) Egy sorozat elemeire a harmadiktól kezdve teljesül, hogy $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Mennyi a sorozat 2009. eleme és az első 2009 tag összege, ha $a_1 = a_2 = 1$?

38. (K) Egy sorozat első és második tagja 2, valamint a további tagokat az $a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ képlet határozza meg. Add meg a sorozat 2013. tagját és az első 2013 tag összegét!

39. (K) Egy sorozatról tudjuk, hogy minden soron következő tagja az előző kétszeresénél 5 – tel kevesebb. Ha a sorozat 8. tagja 133, akkor mi az első tagja?

40. (K) Egy számsorozatban minden szám (a 3. számtól kezdve) az őt megelőző két szám szorzatánál kilenccel kisebb. A sorozat harmadik tagja 3, ötödik tagja 18. Add meg a számsorozat első, második és negyedik tagját!

41. (E) Az a_n sorozatban $a_1 = p; a_2 = q$, adott pozitív számok, a sorozat tagjaira igaz, hogy $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$. Add meg a sorozat 2014. tagját p és q segítségével!

42. (E) Egy számsorozat első tagja 5. Add meg a sorozat első hat tagját, ha tudjuk, hogy $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}^+$! Fejezd ki a sorozat n – edik tagját n segítségével!

43. (E) Az (a_n) sorozatot a következő módon lehet megadni: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$ és minden $n \geq 1$ egészre $a_{n+2} = 3 \cdot a_{n+1} - 2 \cdot a_n$. Fejezd ki a_n – t n – nel!

44. (E) Egy sorozat elemei pozitív egész számok, a harmadiktól kezdve mindegyik elem az összes őt megelőző elem összege. A sorozat első eleme 1. Mekkora lehet a sorozat második eleme, ha a sorozat n – edik eleme 1000, és n a lehető legnagyobb? Lehet – e eleme a sorozatnak a 2010?

45. (K) Egy lépcsőn felfelé haladva egyszerre 1 vagy 2 lépcsőfokot léphetünk. Ha azt a lépcsőfokot, amelyiken eredetileg állunk, az első lépcsőfoknak tekintjük, akkor hányféleképpen juthatunk fel

a tizedik a tizenegyedik az n – edik lépcsőfokra?

Milyen sorozatot kapunk, ha a sorozat elemeinek az adott lépcsőfokra történő feljutási lehetőségek számát tekintjük?

46. (K) Hányféleképpen juthatunk fel egy 10 lépcsőből álló lépcsősoron, ha egyszerre egyet, kettőt vagy három lépcsőfokot lépünk?

47. (E) Írd fel zárt alakban: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n \cdot (3n + 1)$!

48. (E) Az $\{a_n\}$ sorozat általános tagja: $a_n = \left\{ \ldots \left\{ \left[\left(5^{\frac{1}{5}} \right)^{\frac{1}{25}} \right]^{\frac{1}{125}} \right\} \ldots \right\}^{\frac{1}{5^n}}$.

a) **Számítsd ki a sorozatból az első három tag ötös alapú logaritmusának az összegét!**

b) **Igazold, hogy az $\log_{\frac{1}{5}}[\log_5(a_{2011})]$ osztható 503 – mal!**

49. (E) Igazold, hogy a Fibonacci – sorozat minden negyedik tagja osztható 3 – mal!

50. (E) Adjuk össze a Fibonacci – sorozat tagjainak négyzetét az elejétől kezdve az n – edik tagig. Mi lesz az összeg?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2005.; Matematika 12.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2007.; Sokszínű matematika 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Ábrahám Gábor; 2011; Matematika 12. középszint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(5) Trembeczki Csaba; 2015; Az analízis elemei; Mozaik Kiadó; Szeged

(6) Urbán János; 2010.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 12; Mozaik Kiadó; Szeged

(7) Trembeczki Csaba; 2016; Az analízis elemei feladatgyűjtemény; Mozaik Kiadó; Szeged

(8) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(9) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika I.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(10) Vancsó Ödön; 2005.; Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény Matematika II.; Konsept H Könyvkiadó; Piliscsaba

(11) Fröhlich Lajos; 2008.; 15 próbaérettségi matematikából középszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(12) Fröhlich Lajos; 2006.; 15 próbaérettségi matematikából emeltszint - írásbeli; Maxim Kiadó; Szeged

(13) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(14) Dobcsányi János; 2013. ; Feladattornyok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(15) Dr. Ruff János; 2018.; Érettségi mintafeladatsorok matematikából; Maxim Kiadó; Szeged

(16) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(17) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(18) Saját anyagok