Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Oszthatósági problémák

Érdekes kérdés, hogy egy adott számot el lehet - e osztani egy másik számmal (maradék nélkül). Ezek eldöntésére a matematika tanulmányok során néhány speciális esetre látunk is példát $(2; 3; 4; 5; \dots)$, amikor az oszthatósági szabályokat tanuljuk. A következő oldalakon két eljárást is szeretnék mutatni arra, miként lehet eldönteni egyszerűen azt, hogy egy tetszőleges számmal osztható - e az előre megadott X szám.

A felírt X számot bontsuk két részre: jelölje a szám utolsó számjegyét A, míg az utolsó számjegy elhagyásával keletkező számot pedig B. Ezek alapján az X szám felírható a következőképpen: $X = 10B + A$. Kérdés: Mikor osztható az X szám egy tetszőlegesen választott p prímszámmal (olyan számmal, melynek pontosan két osztója van, 1 és önmaga).

Belátható, ha p nem osztja A - t, akkor egy alkalmas k szám választásával a p biztosan osztója lesz a $B + k \cdot A$ számnak. Ekkor azonban biztosan osztja a következőt is: $10 \cdot (B + k \cdot A) = 10B + A + (10k - 1) \cdot A$. Ebben az esetben, ha p osztója a $(10k - 1) \cdot A$ számnak, akkor a $10B + A$ számnak is, mely éppen az eredetileg megadott X számunk. Így tehát elegendő azt megvizsgálni, hogy a $10k - 1$ milyen k (egész) esetén osztható p - vel. Összegezve: keressük azt a (számolás megkönnyítése végett) legkisebb k egész számot, melyre igaz, hogy $t \cdot p = 10k - 1$ (ahol t egy egész szám). Látható, hogy $p = 2; 5$ esetén nincs megoldás. Ezt követően az eredeti szám helyett a $B + k \cdot A$ számot vizsgáljuk a p - vel történő oszthatóság szempontjából. Amennyiben p osztja a $B + k \cdot A$ számot, akkor biztosan osztója lesz az eredeti $X = 10B + A$ számnak is, mivel előzetesen feltesszük, hogy osztója a $(10k - 1) \cdot A$ számnak is.

Tekintsünk néhány konkrét példát.

- $p = 7$ és $X = 17884$: Ekkor $7t = 10k - 1$ adódik, ahonnan $k = 5$. A $k = 5 - 7 = -2$ szintén jó megoldás, s mivel kisebb, így ezzel célszerű számolni. Ezután az $X = 10B + A$ szám helyett tekintsük a $B - 2A$ számot és nézzük meg osztható-e 7 - tel. Amennyiben még mindig túl nagy számot kapunk, akkor tovább folytatjuk a bontást. Ezek alapján a megoldás: $1788 - 2 \cdot 4 = 1780 \ \rightarrow \ 178 - 2 \cdot 0 = 178 \ \rightarrow \ 17 - 2 \cdot 8 = 1$, ami nem osztható 7 - tel, s így az $X = 17884$ sem.

- $p = 11$ és $X = 4562$: Ekkor $11t = 10k - 1$ adódik, ahonnan $k = -1$. Ezután tekintsük a $B - A$ számot és nézzük meg osztható-e 11 - gyel. Ezek alapján a megoldás: $456 - 2 = 454 \rightarrow 45 - 4 = 41$, ami nem osztható 11 - gyel, s így az $X = 4562$ sem.

- $p = 13$ és $X = 1235$: Ekkor $13t = 10k - 1$ adódik, ahonnan $k = 4$. Ezután tekintsük a $B + 4A$ számot és nézzük meg osztható-e 13 – mal. Ezek alapján a megoldás: $123 + 4 \cdot 5 = 143 \rightarrow 14 + 4 \cdot 3 = 26$, ami osztható 13 – mal, s így az $X = 1235$ is.

- $p = 19$ és $X = 21213$: Ekkor $19t = 10k - 1$ adódik, ahonnan $k = 2$. Ezután tekintsük a $B + 2A$ számot és nézzük meg osztható-e 19 – cel. Ezek alapján a megoldás: $2121 + 2 \cdot 3 = 2127 \rightarrow 212 + 2 \cdot 7 = 226 \rightarrow 22 + 2 \cdot 6 = 34$, ami nem osztható 19 – cel, s így az $X = 21213$ sem.

A példákat tovább folytatva rájöhetünk azonosságokra is.

A k értéke könnyedén meghatározható, ha megvizsgáljuk a p $(\neq 2{,}5)$ prímszám mennyi maradékot ad 10 - zel osztva:

- ha p 1 - et ad maradékul, akkor $k = \frac{1-p}{10}$

- ha p 3 - at ad maradékul, akkor $k = \frac{3p+1}{10}$

- ha p 7 - et ad maradékul, akkor $k = \frac{1-3p}{10}$

- ha p 9 - et ad maradékul, akkor $k = \frac{p+1}{10}$

Ezek alapján nézzük meg az oszthatósági szabályokat 1 - től 40 - ig.

OSZHATÓSÁGI SZABÁLYOK

- 1: Minden egész szám osztható 1 - gyel.

- 2: Akkor osztható egy szám 2 - vel, ha az utolsó számjegye osztható 2 – vel (utolsó számjegye páros).

- 3: Akkor osztható egy szám 3 - mal, ha a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadva az utolsó számjegyet, 3 - mal osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 3 - mal. (pl.: $324 \to 32 + 4 = 36 \to$ osztható)

- 4: Akkor osztható egy szám 4 - gyel, ha az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 4 – gyel. (pl.: 12344)

- 5: Akkor osztható egy szám 5 - tel, ha az utolsó számjegye osztható 5 - tel (utolsó számjegye 0 vagy 5).

- 6: Akkor osztható egy szám 6 - tal, ha osztható 2 – vel és 3 – mal is. (pl.: 228)

- 7: Akkor osztható egy szám 7 - tel, ha a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonva az utolsó számjegy kétszeresét, 7 - tel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 7 - tel. (pl.: $329 \to 32 - 2 \cdot 9 = 14 \to$ osztható)

- 8: Akkor osztható egy szám 8 - cal, ha az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható 8 - cal. (pl.: 1160)

- 9: Akkor osztható egy szám 9 - cel, ha a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadva az utolsó számjegyet, 9 - cel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 9 - cel. (pl.: $171 \to 17 + 1 = 18 \to$ osztható)

- **10:** Akkor osztható egy szám 10 - zel, ha az utolsó számjegye osztható 10 – zel (utolsó számjegye 0).

- 11: Akkor osztható egy szám 11 - gyel, ha a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonva az utolsó számjegyet, 11 - gyel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 11 - gyel. (pl.: $561 \rightarrow 56 - 1 = 55 \rightarrow$ osztható)

- 12: Akkor osztható egy szám 12 – vel, ha osztható 3 – mal és 4 – gyel is. (pl.: 48)

- 13: Akkor osztható egy szám 13 - mal, ha a szám első számjegyétől utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadva az utolsó számjegy 4 - szeresét, 13 - mal osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 13 - mal. (pl.: $416 \rightarrow 41 + 4 \cdot 6 = 65 \rightarrow$ osztható)

- 14: Akkor osztható egy szám 14 – gyel, ha osztható 2 – vel és 7 – tel is. (pl.: 266)

- 15: Akkor osztható egy szám 15 – tel, ha osztható 3 – mal és 5 – tel is. (pl.: 785)

- 16: Akkor osztható egy szám 16 – tal, ha az utolsó négy számjegyéből képzett négyjegyű szám osztható 16 - tal. (pl.: 14832)

- 17: Akkor osztható egy szám 17 - tel, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonva az utolsó számjegy ötszörösét, 17 - tel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 17 - tel. (pl.: $527 \rightarrow 52 - 5 \cdot 7 = 17 \rightarrow$ osztható)

- 18: Akkor osztható egy szám 18 – cal, ha osztható 2 – vel és 9 – cel is. (pl.: 378)

- 19: Akkor osztható egy szám 19 - cel, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadva az utolsó számjegy kétszeresét, 19 - cel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 19 - cel. (pl.: $589 \rightarrow 58 + 2 \cdot 9 = 76 \rightarrow$ osztható)

- 20: Akkor osztható egy szám 20 - szal, ha az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 20 - szal. (pl.: 140)

- 21: Akkor osztható egy szám 21 – gyel, ha osztható 3 – mal és 7 – tel is. (pl.: 441)

- 22: Akkor osztható egy szám 22 – vel, ha osztható 2 – vel és 11 – gyel is. (pl.: 308)

- 23: Akkor osztható egy szám 23 - mal, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadva az utolsó számjegy 7 - szeresét, 23 - mal osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 23 - mal. (pl.: $713 \rightarrow 71 + 7 \cdot 3 = 92 \rightarrow$ osztható)

- 24: Akkor osztható egy szám 24 – gyel, ha osztható 3 – mal és 8 – cal is. (pl.: 1248)

- 25: Akkor osztható egy szám 25 - tel, ha az utolsó két számjegyéből képzett kétjegyű szám osztható 25 - tel. (pl.: 12375)

- 26: Akkor osztható egy szám 26 – tal, ha osztható 2 – vel és 13 – mal is. (pl.: 156)

- 27: A számot hátulról blokkokba rendezzük, úgy, hogy egy blokkba 3 számjegy kerüljön. Akkor osztható a szám 27 - tel, ha a blokkok összege osztható 27 - tel.
(pl.: $1\ 350\ 563 \rightarrow 1 + 350 + 563 = 914 \rightarrow$ osztható)

- 28: Akkor osztható egy szám 28 – cal, ha osztható 4 – gyel és 7 – tel is. (pl.: 336)

- 29: Akkor osztható egy szám 29 - cel, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számhoz hozzáadva az utolsó számjegy háromszorosát, 29 - cel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 29 - cel. (pl.: $319 \rightarrow 31 + 3 \cdot 9 = 58$)

- 30: Akkor osztható egy szám 30 – cal, ha osztható 3 – mal és 10 – zel is. (pl.: 780)

- 31: Akkor osztható egy szám 31 - gyel, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonva az utolsó számjegy háromszorosát, 31 - gyel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 31 - gyel. (pl.: $651 \rightarrow 65 - 3 \cdot 1 = 62$)

- 32: Akkor osztható egy szám 32 - vel, ha az utolsó öt számjegyéből képzett ötjegyű szám osztható 32 - vel. (pl.: 732032)

- 33: Akkor osztható egy szám 33 – mal, ha osztható 3 – mal és 11 – gyel is. (pl.: 429)

- 34: Akkor osztható egy szám 34 – gyel, ha osztható 2 – vel és 17 – tel is. (pl.: 714)

- 35: Akkor osztható egy szám 35 – tel, ha osztható 5 – tel és 7 – tel is. (pl.: 525)

- 36: Akkor osztható egy szám 36 – tal, ha osztható 4 – gyel és 9 – cel is. (pl.: 396)

- 37: Akkor osztható egy szám 37 - tel, ha a szám első számjegyétől az utolsó előtti számjegyéig képzett számból kivonva az utolsó számjegy 11 - szeresét, 37 - tel osztható számot kapunk. Mindezt addig folytatjuk, amíg olyan számot kapunk, amiről biztosan meg tudjuk állapítani, hogy osztható-e 37 - tel. (pl.: $1184 \rightarrow 118 - 11 \cdot 4 = 74 \rightarrow$ osztható)

- 38: Akkor osztható egy szám 38 – cal, ha osztható 2 – vel és 19 – cel is. (pl.: 836)

- 39: Akkor osztható egy szám 39 – cel, ha osztható 3 – mal és 13 – mal is. (pl.: 429)

- 40: Akkor osztható egy szám 40 - nel, ha az utolsó három számjegyéből képzett háromjegyű szám osztható 40 - nel. (pl.: 12720)

Megjegyzés:

- 3 - mal osztható egy szám akkor is, ha a számjegyeinek összege osztható 3 - mal.

- 9 - cel osztható egy szám akkor is, ha a számjegyeinek összege osztható 9 - cel.

- 11 - gyel osztható egy szám akkor is, ha a páros helyiértéken álló számjegyeinek összege megegyezik a páratlan helyiértéken álló számjegyek összegével, vagy a kettő különbsége 11 - nek a többszöröse. (pl.: $3548193 \rightarrow 3-9+1-8+4-5+3=-11$)

- 0 - t minden számmal el lehet osztani, de a 0 - val való osztás nincs értelmezve: ha 0 osztaná az a számot, akkor lennie kellene egy olyan b számnak, amelyre $a = b \cdot 0$ következne. Ez azonban csak az $a = 0$ esetben lehetséges, ekkor viszont a b nem egyértelmű (tetszőleges szám lehet).

Egy másik lehetőség az oszthatóság meghatározására a következő: Először vizsgáljuk meg, hogy az osztóval elosztva 10 hatványait milyen maradékok adódnak. A kapott maradékokat rendre szorozzuk meg a maradékokhoz tartozó helyiértékeken álló számjegyekkel, s ezeket a szorzatokat adjuk össze. Amennyiben az összeg osztható az adott számmal, akkor az eredeti számunk is osztható vele.

Példa: Osztható - e 7 – tel a 18356724?

<u>Megoldás:</u>

Először nézzük meg milyen maradékok adódnak, ha elosztjuk 7 – tel 10 hatványait:

1 → maradék: 1
10 → maradék: 3
100 → maradék: 2
1000 → maradék: 6
10000 → maradék: 4
100000 → maradék: 5
1000000 → maradék: 1

Nem kell tovább tekinteni a maradékokat, mert a számsorozat ismétlődni fog.

Szorozzuk össze a maradékokat a megfelelő helyiértéken álló számjeggyel:

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 106.$$

Ezek alapján, mivel a 106 nem osztható 7 - tel, így a 18356724 sem.

Példa: Osztható - e 13 – mal az 1604928?

Megoldás:

Először nézzük meg milyen maradékok adódnak, ha elosztjuk 13 – mal 10 hatványait:

$1 \rightarrow$ maradék: 1

$10 \rightarrow$ maradék: 10

$100 \rightarrow$ maradék: 9

$1000 \rightarrow$ maradék: 12

$10000 \rightarrow$ maradék: 3

$100000 \rightarrow$ maradék: 4

$1000000 \rightarrow$ maradék: 1

Nem kell tovább tekinteni a maradékokat, mert a számsorozat ismétlődni fog.

Szorozzuk össze a maradékokat a megfelelő helyiértéken álló számjeggyel:

$$8 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 9 \cdot 9 + 4 \cdot 12 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 182.$$

Ezek alapján, mivel a 182 osztható 13 - mal, így az 1604928 is.

Megjegyzés:

Ennél a módszernél a szabály minden számra teljesül, tehát a 2 – re és 5 – re is alkalmazható.

Brósch Zoltán