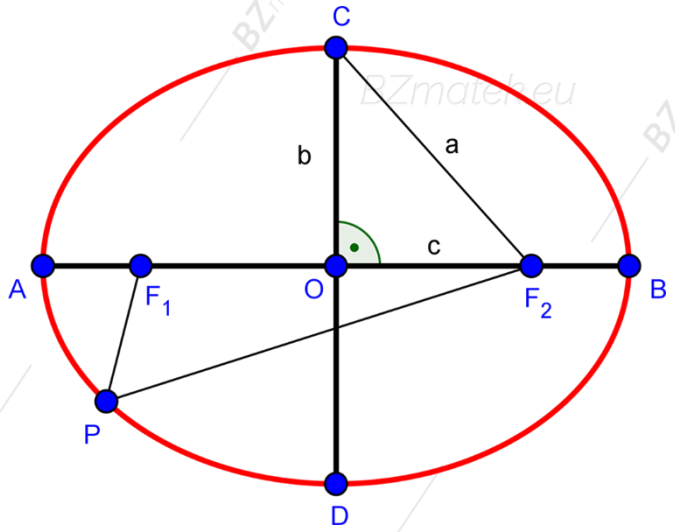
Brósch Zoltán (Debreceni Egyetem Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziuma)

Ellipszis, hiperbola egyenlete

DEFINÍCIÓ: (Ellipszis)
Ellipszisnek nevezzük a sík azon P pontjainak halmazát, amelyeknek két adott F_1 és F_2 ponttól mért távolságuk összege állandó érték, s ez az állandó a két adott pont távolságánál nagyobb: $d\,(P;F_1)+d\,(P;F_2)=2a>d\,(F_1;F_2)$.



Megjegyzés:

- *Az adott F_1 és F_2 pontokat az ellipszis fókuszpontjainak nevezzük.*
- *A fókuszpontokra illeszkedő egyenes az ellipszis egyik szimmetriatengelye. Az ellipszis ebből kimetszi az AB szakaszt, s ezt az ellipszis nagytengelyének nevezzük.*
- *A fókuszpontok távolságánál nagyobb $2a$ állandó az ellipszis nagytengelyének hossza: $d\,(A;B)=2a$.*
- *A nagy tengely felezőmerőlegese az ellipszis másik szimmetriatengelye. Az ellipszis ebből kimetszi a CD szakaszt, s ezt az ellipszis kistengelyének nevezzük. A kistengely hosszát $2b$ - vel jelöljük: $d\,(C;D)=2b$.*
- *Az ellipszisnek a tengelyekkel vett metszéspontjait tengelypontoknak nevezzük.*
- *A két tengely O metszéspontja az ellipszis szimmetria - középpontja (centruma). A fókuszpontok centrumtól való távolságát lineáris excentricitásnak nevezzük és c – vel jelöljük: $d\,(F_1;O)=d\,(F_2;O)=c$.*
- *A $d\,(F_1;P)=r_1$ és a $d\,(F_2;P)=r_2$ szakaszokat vezérsugaraknak nevezzük: $r_1+r_2=2a$.*
- *A fókusz körül a nagytengellyel, mint sugárral írt kört az ellipszis vezérkörének nevezzük.*
- *Az O középpontú, a sugarú kört az ellipszis főkörének nevezzük.*

- *A szimmetriából adódik, hogy* $d\ (A; F_1) = d\ (B; F_2)$.
  Ezek alapján $d\ (A; F_1) + d\ (A; F_2) = d\ (B; F_2) + d\ (A; F_2) = 2a$.

- *A szimmetriából adódik, hogy* $d\ (C; F_1) = d\ (C; F_2) = a$.
  Ezek alapján Pitagorasz – tétel segítségével felírhatjuk a következőt: $a^2 = b^2 + c^2$.

- *Ha* $F_1 = F_2$, *akkor az ellipszis kör.*

- *Az ellipszis másképpen azon pontok halmaza a síkon, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható.*

DEFINÍCIÓ: (Ellipszis belső pontja)
A sík egy P pontja az ellipszis belső pontja, ha $d\ (P; F_1) + d\ (P; F_2) < 2a = d\ (A; B)$.

DEFINÍCIÓ: (Ellipszis külső pontja)
A sík egy P pontja az ellipszis külső pontja, ha $d\ (P; F_1) + d\ (P; F_2) > 2a = d\ (A; B)$.

<u>Ellipszis középponti egyenlete:</u>
Ha az ellipszis középpontja az origó (nagytengelye az x – tengellyel, kistengelye az y – tengellyel esik egybe), fókuszpontjai az $F_1\ (-c; 0)$ és $F_2\ (c; 0)$ pontok és nagytengelyének hossza $2a\ (> 2c)$, kistengelyének hossza pedig $2b\ (< 2a)$, akkor az ellipszis középponti (kanonikus, tengelyponti) egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>Megjegyzés:</u>
Ha az ellipszis középpontja az origótól különböző $K\ (u; v)$ *pont és a nagytengelye párhuzamos az* x *– tengellyel, akkor az egyenlete:* $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$.

DEFINÍCIÓ: (Ellipszis érintője)
Az ellipszis érintője olyan egyenes, melynek egy közös pontja van az ellipszissel és minden további pontja külső pont.

DEFINÍCIÓ: (Ellipszis rádiuszvektora)
Az ellipszis P pontjához tartozó rádiuszvektorokon a $\overrightarrow{r_1}\ (P;\ F_1)$ és $\overrightarrow{r_2}\ (P;\ F_2)$ reprezentánsú vektorokat értjük.

TÉTEL:
Az ellipszis minden pontjába egy és csak egy érintő húzható, amely felezi a ponthoz tartozó rádiuszvektorok mellékszögét.

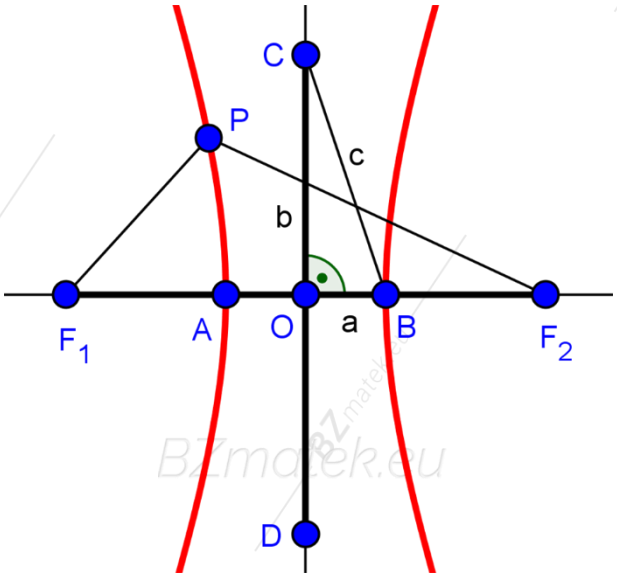
Ellipszis szerkesztése:

- 1. módszer:
  Első lépésben felvesszük az ellipszis tengelyeit és megszerkesztjük az ellipszis fókuszpontjait. Ezt követően az OF_2 szakaszon felveszünk egy tetszőleges S_1 segédpontot. A fókuszpontok egyikéből AS_1, a másikból BS_1 sugarú, egymást metsző köríveket rajzolunk. A keletkező $E_1; E_2$ metszéspontok az ellipszis pontjai lesznek. További segédpontok felvételével hasonló módon szerkeszthető az ellipszis többi pontjai is.

- 2. módszer:
  Első lépésben felvesszük az ellipszis fókuszpontjait és megszerkesztjük az ellipszis tengelyeit. Ezt követően az F_1 fókuszpont körül megrajzoljuk a vezérkört $2a$ sugárral. A vezérkörön felveszünk egy tetszőleges S_1 segédpontot, majd megrajzoljuk az F_2S_1 szakasz felezőmerőlegesét. A felezőmerőleges és az F_1S_1 szakasz metszéspontja az ellipszis E_1 pontja lesz. További segédpontok felvételével hasonló módon szerkeszthető az ellipszis többi pontjai is.

- 3. módszer: (fonalszerkesztés)
  Első lépésben egy fonalat két végénél rögzítünk, ahol a fonal hossza legyen nagyobb a rögzítési pontok távolságánál. Ezt követően, ha a fonalat kifeszítjük, akkor annak az ellipszisnek egy pontját kapjuk, melynek nagytengelye a fonál hossza, fókuszai pedig a rögzített pontok. Ha a fonal nem lazul meg, akkor a kifeszítési pont változtatásával megrajzolható az ellipszis.

DEFINÍCIÓ: (Hiperbola)
Hiperbolának nevezzük a sík azon P pontjainak halmazát, amelyeknek két adott F_1 és F_2 ponttól mért távolságuk különbségének abszolútértéke állandó érték, s ez az állandó a két adott pont távolságánál kisebb: $|d\ (P; F_1) - d\ (P; F_2)| = 2a < d\ (F_1; F_2)$.



Megjegyzés:

- *Az adott F_1 és F_2 pontokat a hiperbola fókuszpontjainak nevezzük.*
- *A fókuszpontokra illeszkedő egyenes a hiperbola egyik szimmetriatengelye. A hiperbola ebből kimetszi az AB szakaszt, s ezt a hiperbola valós tengelyének (főtengelyének) nevezzük.*
- *A fókuszpontok távolságánál kisebb $2a$ állandó a hiperbola valós tengelyének hossza: $d\ (A; B) = 2a$.*
- *A hiperbolának a valós tengellyel vett metszéspontjait tengelypontoknak nevezzük.*
- *Az AB szakasz O felezőpontja a hiperbola szimmetria - középpontja (centruma). A fókuszpontok centrumtól való távolságát lineáris excentricitásnak nevezzük és c – vel jelöljük: $d\ (F_1; O) = d\ (F_2; O) = c$.*
- *A valós tengely felező merőlegese a hiperbola másik szimmetriatengelye. Ennek a hiperbolával nincs közös pontja, azonban bevezethetünk egy szakaszt, amely megfelel az ellipszis kistengelyének. A valós tengely egyik végpontjából c sugarú körzőnyílással metsszük el a szimmetriatengelyt. A kapott CD szakaszt a hiperbola képzetes tengelyének (mellék tengelyének) nevezzük. A képzetes tengely hosszát $2b$ - vel jelöljük: $d\ (C; D) = 2b$.*
- *Az $F_1P = r_1$ és $F_2P = r_2$ szakaszokat vezérsugaraknak nevezzük: $|r_1 - r_2| = 2a$.*
- *A fókusz körül a valóstengellyel, mint sugárral írt kört a hiperbola vezérkörének nevezzük.*
- *Az O középpontú, a sugarú kört a hiperbola főkörének nevezzük.*
- *A szimmetriából adódik, hogy $d\ (A; F_1) = d\ (B; F_2)$.*
  Ezek alapján $d\ (A; F_2) - d\ (A; F_1) = d\ (A; F_2) - d\ (B; F_2) = 2a$.
- *A Pitagorasz – tétel segítségével felírhatjuk a következőt: $c^2 = a^2 + b^2$.*
- *A hiperbola másképpen azon pontok halmaza a síkon, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő kör írható.*

Hiperbola egyenlete:

Ha a hiperbola középpontja az origó (valósengelye az x – tengellyel, képzetes tengelye az y – tengellyel esik egybe), fókuszpontjai az $F_1\ (-c; 0)$ és $F_2\ (c; 0)$ pontok és valóstengelyének hossza $2a\ (< 2c)$, kistengelyének hossza pedig $2b$, akkor a hiperbola középponti (kanonikus, tengelyponti) egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Megjegyzés:

Ha a hiperbola középpontja az origótól különböző $K\ (u; v)$ pont és a valóstengelye párhuzamos az x – tengellyel, akkor az egyenlete: $\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$.

DEFINÍCIÓ: (Hiperbola belső pontja)
A sík egy P pontja a hiperbola belső pontja, ha $|d\ (P; F_1) - d\ (P; F_2)| > 2a = d\ (A; B)$.

DEFINÍCIÓ: (Hiperbola külső pontja)
A sík egy P pontja a hiperbola külső pontja, ha $|d\ (P; F_1) - d\ (P; F_2)| < 2a = d\ (A; B)$.

DEFINÍCIÓ: (Hiperbola érintője)
A hiperbola érintője olyan egyenes, melynek egy közös pontja van a hiperbolával és minden további pontja külső pont.

DEFINÍCIÓ: (Hiperbola rádiuszvektora)
A hiperbola P pontjához tartozó rádiuszvektorokon a $\overrightarrow{r_1}\ (P;\ F_1)$ és $\overrightarrow{r_2}\ (P;\ F_2)$ reprezentánsú vektorokat értjük.

TÉTEL:
A hiperbola minden pontjában egy és csak egy érintő húzható, amely felezi a ponthoz tartozó rádiuszvektorok szögét.

<u>Hiperbola szerkesztése:</u>

- 1. módszer:
  Első lépésben felvesszük a hiperbola tengelyeit és megszerkesztjük a hiperbola fókuszpontjait. Ezt követően a valós tengely egyenesén, az F_1F_2 szakaszon kívül felveszünk egy tetszőleges S_1 segédpontot. A fókuszpontok egyikéből AS_1, a másikból BS_1 sugarú, egymást metsző köríveket rajzolunk. A keletkező $H_1; H_2$ metszéspontok a hiperbola pontjai lesznek. További segédpontok felvételével hasonló módon szerkeszthető a hiperbola többi pontjai is.

- 2. módszer:
  Első lépésben felvesszük a hiperbola fókuszpontjait és megszerkesztjük a hiperbola tengelyeit. Ezt követően az F_1 fókuszpont körül megrajzoljuk a vezérkört $2a$ sugárral. A vezérkörön felveszünk egy tetszőleges S_1 segédpontot, majd megrajzoljuk az F_2S_1 szakasz felezőmerőlegesét. A felezőmerőleges és az F_1S_1 egyenes metszéspontja a hiperbola egy H_1 pontja lesz. További segédpontok felvételével hasonló módon szerkeszthető a hiperbola többi pontjai is.

<u>Megjegyzés:</u>
A vezérkör és a fókuszokra emelt Thalesz – kör metszéspontjaiba húzott sugárral párhuzamos O pontra illeszkedő egyenesek a hiperbola aszimptotái: ezeket a hiperbola egyre jobban megközelíti, de soha nem éri el. A középponti egyenletű hiperbola aszimptotáinak egyenlete: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Gyakorló feladatok

1. **Írd fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszpontjai $F_1\ (-4; 0)$ és $F_2\ (4; 0)$, továbbá nagytengelyének hossza 10!**

2. **Írd fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek fókuszpontjai $F_1\ (-3; 2)$ és $F_2\ (9; 2)$, továbbá nagytengelyének hossza 13!**

3. **Döntsd el, hogy az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű ellipszishez képest hol helyezkednek el a $P\ (0; -3)$, $Q\ (4; -2)$ és $R\ (-4; 1)$ pontok?**

4. **Számítsd ki az ellipszis nagytengelyének, illetve kistengelyének hosszát, valamint a fókuszainak koordinátáit!**

   a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

   b) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$

   c) $9x^2 + 16y^2 = 25$

   d) $x^2 + 4y^2 + 16y + 12 = 0$

5. **Írd fel az ellipszis egyenletét, ha centruma az $O\ (2\ ; -3)$, egyik fókusza az $F_1\ (5; -3)$ pont, nagytengelye pedig 8!**

6. **Egy ellipszis kistengelyének hossza 32, szimmetriatengelyei a koordinátatengelyek, egyik fókuszpontja pedig $F_1\ (5; 0)$. Számítsd ki a másik fókuszpont koordinátáit, a nagytengely hosszát, és írd fel az ellipszis egyenletét!**

7. **Egy ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Milyen hosszúságú vezérsugarak tartoznak azokhoz az ellipszispontokhoz, amelyeknek akkora az abszcisszájuk, mint a gyújtópontoknak?**

8. Írd fel a $P\ (10; -8)$ pontból az $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszishez húzható érintők egyenletét!

9. Hol vannak a síkban azon körök középpontjai, amelyek érintik az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kört, és átmennek a $P\ (3; 0)$ ponton?

10. Határozd meg a $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipszis azon szelőjének az egyenletét, amely áthalad a $P\ (1; 1)$ ponton, és amelyre teljesül, hogy a kimetszett húrt a P pont felezi!

11. Írd fel a hiperbola egyenletét, ha szimmetriatengelyei a koordinátatengelyek, valós tengelyének hossza 6, egyik fókuszpontja pedig $F_1\ (-7; 0)$!

12. Írd fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek fókuszpontjai $F_1\ (-5; 0)$ és $F_2\ (5; 0)$, továbbá valós tengelyének hossza 8!

13. Számítsd ki a hiperbola valós és képzetes tengelyének a hosszúságát, valamint fókuszainak a koordinátáit! Írd fel az aszimptotáinak egyenletét!

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x+\sqrt{2})^2}{8} - \frac{(y+2\pi)^2}{2} = 1$

c) $4x^2 - y^2 = 1$

d) $9x^2 + 36x - 4y^2 + 24y - 36 = 0$

14. Döntsd el, hogy az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ egyenletű hiperbolához képest hol helyezkednek el a $P\ (1; 2)$, $Q\ \left(5; \frac{16}{3}\right)$ és $R\ (-5; 4)$ pontok?

15. Egy hiperbola aszimptotáinak egyenlete $y = \pm\frac{1}{2}x$, érintője az $5x - 6y - 8 = 0$ egyenes. Írd fel a hiperbola egyenletét!

16. Határozd meg a $6x + y + b = 0$ egyenletű egyenes paraméterének értékét, ha tudjuk, hogy az egyenes érinti az $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ hiperbolát!

17. Egy hiperbola szimmetriatengelyei a koordinátatengelyek, fókuszpontjai illeszkednek az x – tengelyre, két pontja pedig $P\left(5; \frac{8}{3}\right)$ és $Q\left(-\frac{3\cdot\sqrt{13}}{2}; -3\right)$. Írd fel a hiperbola egyenletét, és számítsd ki a fókuszpontok koordinátáit!

18. Az $xy = 2$ hiperbola melyik pontja van az origóhoz a legközelebb?

19. Határozd meg az $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ egyenletű hiperbolába írható négyzet csúcsait!

20. Hol vannak azok a pontok a síkban, amelyek háromszor akkora távolságra vannak a $P\ (1; 1)$ ponttól, mint az $e: x = 3$ egyenletű egyenestől?

Felhasznált irodalom

(1) Hajdu Sándor; 2004.; Matematika 11.; Műszaki Könyvkiadó; Budapest

(2) Urbán János; 2003.; Sokszínű matematika 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(3) Ábrahám Gábor; 2010.; Matematika 11 – 12 emelt szint; Maxim Könyvkiadó; Szeged

(4) Urbán János; 2012.; Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11; Mozaik Kiadó; Szeged

(5) Czapáry Endre; 2006.; Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(6) Czapáry Endre; 2009.; Geometriai feladatok gyűjteménye II.; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(7) Korányi Erzsébet; 1998.; Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából; Nemzeti Tankönyvkiadó; Budapest

(8) Ruff János; 2012.; Érettségi feladatgyűjtemény matematikából 11 – 12. évfolyam; Maxim Kiadó; Szeged

(9) Fröhlich Lajos; 2006.; Alapösszefüggések matematikából – emelt szint; Maxim Kiadó; Szeged

(10) https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/list.html

(11) Saját anyagok